उच्चतर माध्यमिक पाठ्यक्रम

गणित (311)

1

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक

विद्याधनम् सर्वधनं प्रधानम्

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान

(मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार की एक स्वायत्त संस्था)

ए-24/25, शैक्षणिक क्षेत्र, एन.एच-24, सैक्टर-62, नोएडा-201309 (उ॰प्र॰)

Website: www.nios.ac.in, Toll Free No. 18001809393

सलाहकार समिति

डा. एस.एस. जेना
अध्यक्ष
एनआईओएस

डॉ. कुलदीप अग्रवाल
निदेशक (शैक्षिक)
एनआईओएस

डॉ. रचना भाटिया
सहा. निदेशक (शैक्षिक)
एनआईओएस

पाठ्यक्रम समिति

प्रो. जी. रविन्द्र
निदेशक (सेवानिवृत्त),
एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

प्रो. मोहन लाल
प्राचार्य (सेवानिवृत्त), पीजीडीएवी कॉलेज
नेहरू नगर, नई दिल्ली

प्रो. अरुण कुमार
प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), गणित विभाग
जेएमआई विश्वविद्यालय, नई दिल्ली

प्रो. डी.पी. शुक्ला
गणित विभाग
लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

प्रो. वी.पी. गुप्ता
मापन एवं मूल्यांकन विभाग
एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

प्रो. सी.पी.एस. चौहान
शिक्षा विभाग
एएमयू, अलीगढ़

श्री जी.डी. ढल
रीडर (सेवानिवृत्त), एन.सी.ई.आर.टी.
नई दिल्ली

श्री जे.सी. निझावन
उपप्राचार्य (सेवानिवृत्त)
राजकीय उच्च माध्यमिक बाल विद्यालय
केशवपुरम, नई दिल्ली

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
एनआईओएस

पाठ लेखक

प्रो. वी.पी. गुप्ता
मापन एवं मूल्यांकन विभाग
एन.सी.ई.आर.टी., नई दिल्ली

श्री पी.के. गर्ग
प्राचार्य (सेवानिवृत्त), रामजस
उच्च माध्यमिक विद्यालय
आनंद पर्वत, नई दिल्ली

श्री एस.सी. आनंद
प्राचार्य (सेवानिवृत्त), डीएवी केंटनरी पब्लिक स्कूल
पश्चिम एन्क्लेव, नई दिल्ली

श्री जे.सी. निझावन
उपप्राचार्य (सेवानिवृत्त)
राजकीय उच्च माध्यमिक बाल विद्यालय
केशवपुरम, नई दिल्ली

श्री एस.डी. शर्मा
पीजीटी (गणित)
राजकीय उच्च माध्यमिक बाल विद्यालय
सरोजनी नगर, नई दिल्ली

श्री डी.आर. शर्मा
उपप्राचार्य, नवोदय विद्यालय समिति
मुंगेशपुर, नई दिल्ली

डॉ. आर.पी. सिंह
प्रवक्ता
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
गांधीनगर, नई दिल्ली

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्राचार्य, एसएनआई, कॉलेज
पिलाना, बागपत, (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
एनआईओएस

संपादक

श्री जे.सी. निझावन
उपप्राचार्य (सेवानिवृत्त)
राजकीय उच्च माध्यमिक बाल विद्यालय
केशवपुरम, नई दिल्ली

श्री पी.के. गर्ग
प्राचार्य (सेवानिवृत्त), रामजस
उच्च माध्यमिक विद्यालय
आनंद पर्वत, नई दिल्ली

श्री डी.आर. शर्मा
उपप्राचार्य, नवोदय विद्यालय समिति
मुंगेशपुर, नई दिल्ली

डॉ. आर.पी. सिंह
प्रवक्ता
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
गांधीनगर, नई दिल्ली

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्राचार्य, एसएनआई, कॉलेज
पिलाना, बागपत, (उ.प्र.)

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
एनआईओएस

अनुवादक

श्री जे.सी. निझावन
उपप्राचार्य (सेवानिवृत्त)
राजकीय उच्च माध्यमिक बाल विद्यालय
केशवपुरम, नई दिल्ली

श्री पी.के. गर्ग
प्राचार्य (सेवानिवृत्त), रामजस
उच्च माध्यमिक विद्यालय
आनंद पर्वत, नई दिल्ली

श्री डी.आर. शर्मा
उपप्राचार्य, नवोदय विद्यालय समिति
मुंगेशपुर, नई दिल्ली

डॉ. आर.पी. सिंह
प्रवक्ता
राजकीय प्रतिभा विकास विद्यालय
गांधीनगर, नई दिल्ली

डॉ. सत्यवीर सिंह
प्राचार्य, एसएनआई, कॉलेज
पिलाना, बागपत, (उ.प्र.)

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित)
एनआईओएस

रेखा चित्रकार एवं टाइप सेटिंग

एमएस कम्प्यूटर्स, पटपड़गंज, नई दिल्ली 92
mscomputers11@gmail.com
(9868087825, 9718824866)

अध्यक्ष का संदेश

प्रिय शिक्षार्थी,

व्यापक रूप से समाज की आवश्यकताएँ समय के साथ–साथ बदलती रहती हैं, इसलिए इन आकांक्षाओं को पूरा करने के तरीके भी बदलने पड़ते हैं। शिक्षा परिवर्तन का एक साधन है। सही समय पर, सही प्रकार की शिक्षा, समाज के दृष्टिकोण में सकारात्मक परिवर्तन ला सकती है तथा यह कठिन स्थितियों तथा नई चुनौतियों का सामना करने की क्षमता देती है। ऐसा, शिक्षा के पाठ्यक्रम को समय समय पर आवश्यकता अनुसार बदल कर किया जा सकता है। एक निश्चित पाठ्यक्रम से कोई उद्देश्य प्राप्त नहीं होता क्योंकि यह समय की मांग तथा समाज और व्यक्ति की आकांक्षाओं को पूरा करने में सक्षम नहीं होता।

केवल इस उद्देश्य से ही देश के कोने–कोने से शिक्षाविद् नियमित अन्तराल पर इकट्ठे होकर, आवश्यक परिवर्तनों पर चर्चा करते रहते हैं। इन चर्चाओं के परिणामस्वरूप, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF 2005) तैयार हुआ जो स्पष्ट रूप से व्याख्या करता है कि विभिन्न स्तरों – प्राथमिक स्तर से उच्च माध्यमिक स्तर तक, किस प्रकार की शिक्षा वांछनीय है।

इस शिक्षा ढाँचे, राष्ट्र तथा समाज की आवश्यकताओं का ध्यान रखते हुए, हमने सभी विषयों में उच्चतर माध्यमिक स्तर पर पाठ्यक्रम को वर्तमान बनाने तथा समाज की आवश्यकतानुसार बनाकर बदलने का प्रयास किया है। 'राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्' (NCERT) तथा 'भारतीय विद्यालय शिक्षा बोर्ड मण्डल' (COBSE) के अनुसार समान पाठ्यचर्या के लिए प्रदत्त निर्देशों के अनुसार लेखन सामग्री का बनाना, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान के सभी कार्यक्रमों, जो मुक्त तथा दूरस्थ शिक्षा के माध्यम से उपलब्ध करवाई जाती हैं, का एक अभिन्न अंग है। हमने इस बात का विशेष ध्यान रखा है कि नयी तैयार की गई अध्ययन सामग्री उपयोगकर्ता के योग्य तथा आकर्षक हो।

मैं उन सब प्रतिष्ठित व्यक्तियों को, जिन्होंने इस सामग्री को आकर्षक तथा आपकी आवश्यकतानुसार बनाया, धन्यवाद देता हूँ। मेरा अपना मत है कि आप इस सामग्री को उपयोगी तथा आकर्षक पायेंगे।

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान की ओर से मैं आपके उज्जवल तथा सफल भविष्य की कामना करता हूँ।

(डॉ. एस.एस. जेना)
अध्यक्ष, एनआईओएस

निदेशक की कलम से

प्रिय शिक्षार्थी,

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान का शैक्षिक विभाग आपकी जरूरतों के अनुसार नए पाठ्यक्रम संचालित करने या वर्तमान पाठ्यक्रम में बदलाव करने का सदैव प्रयास करता है। हाल ही में संस्थान ने उच्चतर माध्यमिक स्तर पर सभी विषयों के पाठ्यक्रम को सुधारने का बीड़ा उठाया। आपको देश के दूसरे बोर्डों के समतुल्य पाठ्यक्रम देने के लिए केन्द्रीय माध्यमिक शिक्षा बोर्ड तथा देश के अन्य राज्य के बोर्डों के पाठ्यक्रम को भी देखा गया। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद् (NCERT) तथा भारतीय विद्यालय शिक्षा बोर्ड मण्डल (COBSE) द्वारा बनाए गए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा को हमने आधार माना। इनका विस्तृत तुलनात्मक अध्ययन करने के पश्चात, हमने अपने बनाए पाठ्यक्रम को अधिक क्रियात्मक, लाभदायक तथा जीवन से जुड़ा पाया। हमने देश के प्रसिद्ध शिक्षाविदों को बुलाकर उनके तत्वाधान में पाठ्यक्रम का पुनःनिरीक्षण किया तथा आवश्यकता के अनुरूप पाठ्यक्रम में परिवर्तन किया गया।

इसके साथ–साथ हमने उस शिक्षण सामग्री, पर भी ध्यान दिया जो आपके पास आनी है। हमने पुरातन निष्क्रिय सूचनाओं को हटा कर नई तथा लाभदायक सूचनाएं जोड़ दी हैं तथा सामग्री को आपके लिए आकर्षक तथा रोचक बनाया गया है।

मैं आशा करता हूँ कि आपको नई सामग्री रोचक तथा आकर्षक लगेगी। इस सामग्री को और अधिक लाभप्रद बनाने के लिए सुझावों का स्वागत है।

मैं आप सब के सुखद तथा उज्जवल भविष्य की कामना करता हूँ।

(डॉ. कुलदीप अग्रवाल)
निदेशक (शैक्षिक), एनआईओएस

शिक्षार्थी हेतु संदेश

प्रिय शिक्षार्थी,

मैं, उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित विषय में आप सभी का स्वागत करता हूँ। यह मेरे लिए बहुत खुशी की बात है कि आपने गणित को अध्ययन विषय के रूप में चुना है। गणित का अध्ययन परिशुद्धता, तार्किकता एवं विश्लेषणात्मक चिंतन तथा तर्क संगत एवं वैज्ञानिक स्वभाव को विकसित करने में योगदान देता है। निःसंदेह यह सभी योग्यताएं जीवन में, जो भी रोजगार आप चुनते हैं, सफलता के लिए आवश्यक हैं। गणित विभिन्न महत्वपूर्ण क्षेत्रों जैसे इंजिनियरिंग, वास्तु शिल्प, सांख्यिकी, वाणिज्य और बहीखाता पर आधारित व्यवसाय, अर्थमिति इत्यादि के लिए आवश्यक है।

गणित का वर्तमान पाठ्यक्रम दो भागों में बांटा गया है: भाग 1 में पांच मॉड्यूल के अन्तर्गत 19 अध्याय हैं। ये मॉड्यूल समुच्चय, संबंध एवं फलन, अनुक्रम एवं श्रेणियां, बीजगणित–I, निर्देशांक ज्यामिति, सांख्यिकी एवं प्रायिकता है। इसी तरह भाग–2 में भी पांच मॉड्यूल के अन्तर्गत 19 अध्याय हैं। ये मॉड्यूल बीजगणित–II, संबंध एवं फलन, कलन, सदिश और त्रिविमीय ज्यामिति तथा रैखिक प्रोग्रामन और गणितीय विवेचन हैं।

आपको अवधारणाओं की अच्छी समझ हो सके, इस हेतु पाठ को विकसित करने में विभिन्न उदाहरणों एवं चित्रों को ध्यान में रखा गया है। आप सबसे पहले हल किए गए उदाहरणों को समझें तथा इसके पश्चात् प्रत्येक पाठ में 'आपने क्या सीखा' तथा अन्त में अभ्यास प्रश्नों को हल करें। यदि आप कठिनाई महसूस करें तो मुझसे संपर्क करने में संकोच न करें। आपके सुझावों एवं संदेहों का सदैव स्वागत है।

मैं आप सभी के सुखद तथा उज्जवल भविष्य की कामना करता हूँ।

आपका,

डॉ. राजेन्द्र कुमार नायक
शैक्षिक अधिकारी (गणित), एनआईओएस
aomaths@nios.ac.in

भारत में गणित

गणित हमारे चारों ओर की घटनाओं का परिमाणात्मक एवं क्रमबद्ध रूप से अध्ययन करने वाला विषय है। यह विषय संख्याओं के निश्चित तार्किक अर्थों पर आधारित है एवं मानव सभ्यता का अभिन्न अंग है। गणित एक सृजनात्मक क्रियाकलाप है और मानवीय ज्ञान खण्डों में से सर्वाधिक उपयोगी, लुभावना तथा प्रेरणा प्रदान करने वाला सबसे महत्वपूर्ण विषय है। यह सूचनाओं के प्रबंधन एवं सम्प्रेषण की प्रक्रिया है तथा वास्तविक समस्याओं के समाधान हेतु पूर्वानुमान लगाने की क्षमता प्रदान करने के साथ-साथ नये काल्पनिक संसार की छानबीन करते हेतु व्यक्तिगत रूप से योग्य बनाता है। हम रोजमर्रा की जिन्दगी में, विज्ञान में, औद्योगिक क्षेत्रों में, व्यवसायों में तथा खाली समय में गणित का उपयोग करते हैं। गणित की शिक्षा अर्जन करने, समझने और कौशलों के प्रयोग से संबंधित है। किसी बालक, जो बाद में व्यस्क बनता है, के पूरे जीवन में समस्या समाधान हेतु आवश्यक कौशलों को प्रदान करने में गणितीय साक्षरता की महत्वपूर्ण भूमिका है। समाज को ऐसे नागरिकों की आवश्यकता है जो परिमाणात्मक रूप से सोच विचार कर सकें तथा सम्प्रेषण कर सके और उन परिस्थितियों की पहचान कर सकें जहाँ समस्या समाधान में गणित का उपयोग किया जाता है। मीडिया द्वारा प्रस्तुत किए जाने वाली सूचनाओं का सामना करने हेतु समझ पैदा करना, व्यावसायिक गणितीय ज्ञान की समझ हेतु समझ बनाना तथा इस तरह के प्रयोगों के समर्थन हेतु उचित तकनीकी का उपयोग करना अति आवश्यक है।

भारतीय उपमहाद्वीप में गणितीय ज्ञान की खोज की शुरूआत प्राचीन काल से ही दिखाई देती है। गणित के क्षेत्र में संकेत प्रणाली, दाशमिक पद्धति तथा शून्य का उपयोग तीन प्रमुख योगदान है। **आर्यभट्ट** में अक्षरों का उपयोग संख्याओं को सार्थक करने के लिए, स्थानीय मान पद्धति पर कार्य किया। भारतीय गणितज्ञों की गणित में सबसे प्रमुख योगदान शून्य, जिसका मतलब है कुछ नहीं, की खोज है। यह अवधारणा अपने आप में मानव सभ्यता एवं संस्कृति के विकास में सबसे सार्थक खोजों में से एक है। **ब्रहमगुप्त** ने ऋणात्मक संख्याओं एवं शून्य की विविध संक्रियाओं के बारे में बताया। उन्होंने ब्रहम, स्तूप सैद्धान्तिका की रचना की जिसके कारण अरब के लोग गणितीय पद्धति को जान सके। गणित के क्षेत्र में **भास्कराचार्य**, जिसे **भास्कर-II** के नाम से भी जाना जाता है, भारतीय प्राचीन गणितज्ञों में से सबसे अधिक सृजनशील तथा शक्तिशाली गणितज्ञों में से एक थे। उन्होंने अनन्त का विचार, ऋणात्मक संख्याए तथा शून्य के नियमों का योगदान दिया।

बोधायन ने गणित के बहुत से प्रत्ययों को बहुत पहले ही बता दिया था, जिसकी खोज बाद में पाश्चात्य देशों द्वारा की गई। पाई (π) के मान की खोज सबसे पहले उनके द्वारा ही की गई। पाइथागोरस प्रमेय के प्रमाण पहले से ही शुल्व सूत्र के अन्तर्गत मिलते हैं जो पाइथागोरस की आयु से भी बहुत पहले लिखी गई थी। महावीराचार्य, एक अन्य भारतीय प्रसिद्ध गणितज्ञ थे, जिन्होंने त्रिकोणमितीय फलनों तथा घन समीकरणों को समझने में योगदान दिया। उन्होंने फलनों, बीजगणितीय समीकरणों, लघुगणकों एवं चरघातांकीय फलनों का बहुत ही रोचक तरीके से वर्णन किया है। **श्रीधर**, जिन्होंने द्विघात समीकरणों के हल प्रस्तुत करने में महत्वपूर्ण योगदान दिया, भारत के सम्मानित गणितज्ञों में से एक हैं।

खगोल शास्त्र एक प्रयोग आधारित गणित है जिसका उपयोग गणितीय समीकरणों के जरिए ब्रहमाण्ड का वर्णन करने के लिए या ब्रहमाण्ड के विभिन्न पहलुओं का अनुमान लगाने के लिए किया जाता है। गणित सदैव से ही खगोल शास्त्र के महत्व में केन्द्रीय भूमिका में रहा है।

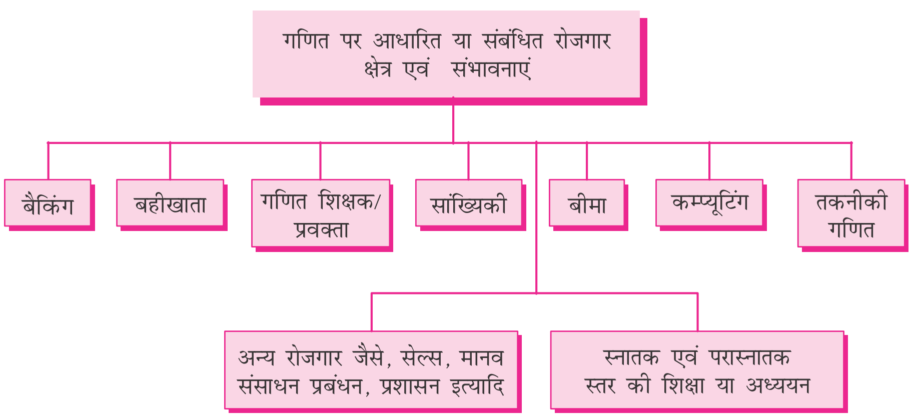
प्राचीन भारत में, **नागार्जुन**, जो कि प्रमुख खगोलवेत्ता तथा गणितज्ञ रहे हैं, ने तारों एवं ग्रहों की गति का वर्णन करने के लिए विविध गणितीय समीकरणों का उपयोग किया था। **वाराहमिहिर** भारतीय खगोलवेत्ता रहे हैं जिन्होंने खगोल शास्त्र पर मुख्य रूप से कार्य किया है। उन्होंने पास्कल के काल से पहले ही पास्कल त्रिभुज के एक आयाम तथा जादुई वर्ग पर कार्य किया था। वे, न्यूटन से बहुत पहले ही गुरूत्वाकर्षण की जानकारी रखते थे।

आधुनिक काल में **श्री निवासा रामानुजन** भारत के महान प्रमुख बुद्धिमान गणितज्ञों में से एक थे। रामानुजन का अधिकतम योगदान संख्या सिद्धान्तों पर था। **रामानुजन** ने बताया कि 1729 ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योग के रूप में विविध तरीकों से लिखा जा सकता है। इसके बाद से संख्या 1729 को रामानुजन-हार्डी संख्या कहा जाने लगा।

शकुन्तला देवी भी विश्व में एक जानी-पहचानी भारतीय गणितज्ञ रही हैं। उन्हें उनकी जटिल से जटिल गणितीय समस्याओं की बिना किसी सहायता से हल कर पाने की योग्यता के कारण ही उन्हें उनके उपनाम 'मानव कम्प्यूटर' से जाना जाता हैं।

विद्यालयों में गणित शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चे की सोच का गणितीयकरण करना है। आपके विचारों में स्पष्टता लाना तथा मान्यताओं को तार्किक निष्कर्षों तक पहुंचाना ही गणित शिक्षा का केन्द्रीय कार्य है। चिंतन के बहुत से तरीके एवं स्तर होते हैं और गणित में जिस तरह का चिंतन करना बच्चा सीखता है वह अमूर्तों के साथ कार्य करना तथा समस्या समाधान के तरीकों पर आधारित है। उच्च माध्यमिक स्तर ऐसा स्तर है जहां शिक्षार्थी अपने कैरियर के चुनाव के बारे में निर्णय लेते हैं कि उन्हें विश्वविद्यालय स्तर की पढ़ाई जारी रखनी या कुछ और करना है।

इसी समय, शिक्षार्थी की रुचियों तथा दृष्टिकोण व्यापक रूप से निर्धारित होते हैं और इन दो वर्षों में गणितीय शिक्षा उनकी योग्यताओं में और अधिक पैनापन लाती है। विश्वविद्यालय स्तर की बहुत सी उपाधियों के लिए गणित एक अनिवार्य विषय की रूप में आवश्यक होता है। ऐसे शिक्षार्थी जो माध्यमिक स्तर तथा उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित की पढ़ाई में विशेष गंभीर नहीं होते या लापरवाह होते हैं, उन्हें विश्वविद्यालय या अन्य स्तरों पर बहुत से अवसरों से वंचित रहना पड़ता है जिन्हें वे प्राप्त कर सकते थे। आधे से भी अधिक शिक्षार्थियों को इस स्तर से व्यवसाय या नौकरी के कार्यों में लग जाने के लिए बाध्य होना पड़ता है। अच्छे रोजगार हेतु गणित को महत्वपूर्ण स्थान देना कोई अतिश्योक्ति नहीं है। भैतिक विज्ञानों (रसायन शास्त्र, भौतिक शास्त्र, इंजीनियरिंग), भोजन एवं स्वास्थ्य विज्ञान (जीव विज्ञान, मनोविज्ञान, औषध विज्ञान, उपचर्या (नर्सिंग), दृष्टिमाप विज्ञान) सामाजिक विज्ञानों जैसे सम्प्रेषण, अर्थशास्त्र, शिक्षाशास्त्र, भाषा विज्ञान, भूगोल, तकनीकी विज्ञानों जैसे-कम्प्यूटर विज्ञान, नेटवर्किंग, सॉफ्टवेयर विकास, व्यवसाय एवं वाणिज्य, कृषि विज्ञान इत्यादि सभी क्षेत्रों में उपाधि प्राप्त करने हेतु शिक्षार्थी को गणित एवं सांख्यिकी का ज्ञान होना आवश्यक है। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित सीखना आपको इन क्षेत्रों में रोजगार के चयन में मदद करेगा।



अपने पाठ कैसे पढ़ें

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान में प्रवेश लेकर आप यह देखेंगे आप ऐसे निकाय में आ गए हैं, जहाँ शिक्षा एक आम विद्यालय की शिक्षा से भिन्न है।

आप अब स्वयं शिक्षार्थी हैं

एक आम विद्यालय में कक्षा लेने, सन्देह दूर करने, निर्देश देने तथा उत्साहित करने के लिए शिक्षक हर समय उपलब्ध हैं। वहाँ आप अपने आयु वर्ग के साथियों में चर्चा कर सकते हैं, पाठ्य सहगामी क्रियाओं में भाग लेते हैं, दूरदर्शन पर शिक्षा सम्बन्धी कार्यक्रम देखते हैं, रेडियो प्रोग्राम सुनते हैं, इत्यादि। यह सभी आप के ज्ञान में वृद्धि करते हैं।

दूसरी ओर, राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान में, कोई शिक्षक उपलब्ध नहीं है। यहाँ आपको स्वयं ही सब कुछ सीखना है इसका अर्थ यह हुआ कि आप स्वशिक्षार्थी बन गए हैं। एक साधारण शिक्षार्थी जो शिक्षा पर निर्भर है, से स्वशिक्षार्थी का उत्तरदायित्व कहीं अधिक तथा चुनौतीपूर्ण है।

यहाँ यह आप ही हैं, जो अपनी शिक्षा के लिए उत्तरदायी हैं। इसका अर्थ है कि आपको अपने अध्ययन को व्यवस्थित करना है, नियमित अध्ययन करना है, अपने उत्साह को बनाए रखना है तथा अपने लक्ष्य को प्राप्त करना है।

अपनी शिक्षण सामग्री को समझना

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान आपको शिक्षण सामग्री देकर आपकी सहायता करेगा, जिसका कुछ भाग आपके हाथ में है। हम इसे शिक्षण सामग्री कहते है क्योंकि यह पुस्तकों, जो आप स्कूल में पढ़ते हैं, से भिन्न है। यहाँ सामग्री में हमने पाठ्यपुस्तक तथा अध्यापक को मिला दिया है। आप पाएंगे कि अन्तर्वस्तु, संकल्पनाओं तथा विषय को इस प्रकार समझाया है, जैसे अध्यापक कक्षा में समझाता है। आप इनमें उदाहरण तथा प्रयोगात्मक (उदाहरण) पायेंगे जो आपको सामग्री को समझने में सहायक होंगे। यही कारण है कि आप इस सामग्री को भारी तथा मोटा पायेंगे, लेकिन आप इससे डरें नहीं।

इन पाठों में आप कुछ खंड पायेंगे। आइए आपको उनको लाने का उद्देश्य बताएँ।

भूमिका: यह आपको विषय के बारे में परिचय देगा।

उद्देश्य: इसमें आपको उद्देश्यों की तालिका मिलेगी जिन्हें आपने पाठ पढ़ने के पश्चात प्राप्त करना है। क्योंकि यह मापित रूप में दिए गए हैं इसलिए आप जान पायेंगे कि आपने इन्हें पा लिया है या नहीं।

देखें आपने कितना सीखा: इन्हें आप इस पाठ के प्रत्येक खंड के बाद पायेंगे। इनमें आपको वस्तुनिष्ठ प्रश्न, छोटे उत्तर तथा लम्बे उत्तर वाले प्रश्न मिलेंगे, जिन्हें करके आपको पता चलेगा कि आपने उस खंड को ठीक समझा है या नहीं। इन प्रश्नों के उत्तर आपको पाठ के अन्त में मिलेंगे। यदि आप उन प्रश्नों के उत्तर दे पायेंगे तो आप आगे के खंड पर जा सकते हैं अन्यथा पहले खंड को फिर से दोहराएँ।

आइए दोहराएँ: इसमें आपको मुख्य बिन्दुओं का सारांश मिलेगा जो आपको पाठ को दोहराने में सहायक होगा।

आइए अभ्यास करें: इसमें कुछ छोटे उत्तर वाले तथा लम्बे उत्तर वाले प्रश्न दिए गए हैं जो आपको आपकी जानकारी को परिपक्व करने तथा प्रश्नों के उत्तर देने तथा परीक्षा की तैयारी में सहायक होंगे।

उत्तरमाला: **"देखें आपने कितना सीखा"** तथा **"आइए अभ्यास करें"** वाली प्रश्नावलियों के उत्तर प्रत्येक पाठ के अन्त में दिए गए हैं। कठिन प्रश्नों के लिए संकेत भी दिये गए हैं।

पाठ्यसामग्री के अतिरिक्त, आपको प्रतिदर्श प्रश्न पत्र तथा पिछले वर्षों के प्रश्न–पत्र इत्यादि भी मिलेंगे जो आपको पढ़ाई तथा परीक्षा की तैयारी में सहायक होंगे।

व्यक्तिगत संपर्क प्रोग्राम (कार्यक्रम)

केन्द्र पर कुछ पाठ/सत्र आपको पढ़ाये जायेंगे। लेकिन ध्यान रखें यह आपको पढ़ाने के लिए नहीं है, जैसा कि एक सामान्य विद्यालय में होता है। यहाँ आपको आपकी शंकाओं के समधान का अवसर मिलेगा, प्रश्न हल करने में तथा पढ़ाई किस प्रकार की जाए इसके विषय में निर्देश दिया जायेगा। इसलिए कक्षाओं में अच्छी प्रकार तैयार होकर जाएँ ताकि अधिक से अधिक लाभ पाएँ।

गणितीय क्रियाकलाप

अपने अध्ययन केन्द्र पर आप गणितीय क्रियाकलाप करने के अवसर से आप राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान द्वारा उपलब्ध कराई गई पुस्तिका में दिए गए क्रियाकलापों को कर सकेंगे।

दृश्य–श्रव्य कार्यक्रमों का प्रयोग

राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान ने कुछ दृश्य–श्रव्य कार्यक्रमों का निर्माण किया है, जो आपको पसन्द आयेंगे तथा आपकी पढ़ाई में सहायक होंगे। आप अपने केन्द्र से इनकी प्रतिलिपि ले सकते हैं।

अपने अध्ययन को योजनाबद्ध तथा व्यवस्थित करना

आइए मैं आपको आपके अध्ययन को योजनाबद्ध तथा व्यवस्थित करने के लिए कुछ संकेत देता हूँ।

पहले यह जान लें कि परिश्रम का कोई विकल्प नहीं है। जितना अधिक आप परिश्रम करेंगे उतना ही अधिक अच्छा फल पायेंगे। यह भी जान लें कि सफलता का कोई छोटा रास्ता नहीं है। यदि किसी ने आपको यह विश्वास दिलाया है कि वह आपको सफल होने में सहायता करेगा, तो यह नहीं हो सकेगा क्योंकि परीक्षा में कड़ी निगरानी तथा चौकसी होगी। किसी प्रकार उत्तीर्ण होने पर भी आप शिक्षण में कुछ नहीं कर पाएंगे। अतः ईमानदारी से उत्तीर्ण होने के लिए तथा अपने जीवन में पढ़ाई का लाभ पाने के लिए आपको पढ़ना पड़ेगा।

अब तक आप यह जान चुके होंगे कि राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान आपको पढ़ाई में काफी आजादी देता है। उदाहरणतया आपको एक साथ सभी विषयों में परीक्षा देना आवश्यक नहीं है। अतः सर्वप्रथम आपको आपके पास मिलने वाले समय को देखकर यह निर्णय लेना है कि अपने सभी विषय एक साथ पढ़ने हैं अथवा एक के बाद एक। सभी विषयों को एक साथ पढ़ने का जुआ खेलकर आप ऐसी स्थिति में पहुँच सकते हैं कि आप एक भी विषय पर ध्यान केन्द्रित न कर सकें।

इसके बाद आप पढ़ने का समय निश्चित करें–सुबह, दोपहर अथवा सायं जो भी आपको उपयुक्त लगे। जो भी विषय आगे पढ़ने हैं, उन्हें उनके लिए एक समय–सारणी बनाइए तथा उसका पूरी तरह पालन करें। पढ़ते समय जो बिन्दु आपको आवश्यक लगें, उन्हें रेखांकित कर लें। आप राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान द्वारा दी गयी शिक्षण सामग्री को पढ़िए। उसके साथ आप कुछ अन्य पुस्तकें भी पढ़ सकते हैं, यदि आपके पास समय है। परन्तु आपके लिए हमारे द्वारा दी गयी शिक्षण सामग्री भी बहुत है। जो विषय आप तैयार कर रहे हैं उसके लिए एक अलग कापी बनाएं। उन बिन्दुओं को नोट कीजिए जो आपको समझ नहीं आए। उन्हें आप संरक्षकों (माता, पिता) दोस्तों अथवा केन्द्र के अध्यापकों से चर्चा कर सकते हैं।

सामग्री में दी गई सभी प्रश्नावलियों तथा प्रश्नों को हल कीजिए। यह केवल पढ़ने में ही आपको सहायता नहीं करेंगे, वह आपको परीक्षा की तैयारी भी करायेंगे। आप प्रतिदर्श प्रश्न पत्र तथा पिछले वर्षों के प्रश्न पत्रों को भी हल कर सकते हैं। अपने उत्तरों को आप अपने माता–पिता, मित्रों तथा अध्यापकों को दिखा कर चर्चा कर सकते हैं।

कुछ संकेत आपकी सहायता के लिए हैं। हो सकता है आपके पास कुछ अन्य संकेत हों जो आपकी अधिक सहायता करें। यदि आप चाहें तो उनका अनुसरण कर सकते हैं। मुझे पूरी आशा है कि आप अपने उद्देश्य में सफल होंगे।

पाठ्यक्रम सामग्रीः एक नजर में

भाग 1: शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र हेतु

मॉडयूल-I: समुच्चय, संबंध एवं फलन

1. समुच्चय
2. संबंध एवं फलन-I
3. त्रिकोणमितीय फलन-I
4. त्रिकोणमितीय फलन-II
5. त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों में संबंध

मॉडयूल-II: अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

6. अनुक्रम तथा श्रेणियाँ
7. कुछ विशेष श्रेणियाँ

मॉडयूल-III: बीजगणित-I

8. सम्मिश्र संख्याएं
9. द्विघात समीकरण एवं रैखिक असमिकाएं
10. गणितीय आगमन का सिद्धान्त
11. क्रमचय तथा संचय
12. द्विपद प्रमेय

मॉडयूल-IV: निर्देशांक ज्यामिति

13. निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली
14. सरल रेखाएं
15. वृत
16. शंकु परिच्छेद

मॉडयूल-V: सांख्यिकी एवं प्रायिकता

17. प्रकीर्णन के मापक
18. यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाएं
19. प्रायिकता

महत्वपूर्ण सूचनाः भाग-I की सभी विषय-वस्तु का आकलन/परीक्षण शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र के द्वारा किया जाऐगा। शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र अनिवार्य है और इसकी भारिता 20% अंक है। शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र के अंक/ग्रेड अंक तालिका में दर्शाये जायेंगे।

भाग 2: लोक परीक्षा हेतु

मॉडयूल-VI: बीजगणित - II

20. आव्यूह
21. सारणिक तथा इसके अनुप्रयोग
22. आव्यूह का प्रतिलोम तथा इसके अनुप्रयोग

मॉडयूल-VII: संबंध एवं फलन -II

23. संबंध एवं फलन -II
24. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

मॉडयूल-VIII: कलन

25. सीमा एवं सांतत्य
26. अवकलन
27. त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज
28. चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनों का अवकलज
29. अवकलज के अनुप्रयोग
30. समाकलन
31. निश्चित समाकलन
32. अवकल समीकरण

मॉडयूल-IX: सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

33. त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय
34. सदिश
35. समतल
36. सरल रेखाएं

मॉडयूल-X: रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन

37. रैखिक प्रोग्रामन
38. गणितीय विवेचन

महत्वपूर्ण सूचना: भाग 2 की सभी विषय-वस्तु का आकलन/परीक्षण सत्रांत परीक्षाओं के द्वारा किया जाएगा। सत्रांत परीक्षाएं अनिवार्य हैं और इसकी भारिता 80% अंक है।

विषय वस्तु

उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित (311) की पाठ्यचर्या

1. मूलाधार

उच्चतर माध्यमिक स्तर पर अधिगम हेतु गणित एक महत्वपूर्ण विषय है। गणित की अवधारणाओं के जरिए शिक्षार्थी वास्तविक जीवन की परिचित एवं अपरिचित परिस्थितियों में समस्या समाधान की योग्यता अर्जित करता है। परिशुद्धता, विवेकपूर्ण एवं विश्लेषणात्मक चिंतन जैसी योग्यताओं के विकास में गणित का मुख्य योगदान है। उच्चतर माध्यमिक स्तर निर्णायक स्तर होता है जहाँ शिक्षार्थी पहली बार विविधता की ओर अग्रसर होता है। इस स्तर पर शिक्षार्थी अपने भविष्य में कैरियर के संबंध में उपयुक्त विषय के चयन हेतु महत्वपूर्ण निर्णय लेने के बारे में सोचना शुरू कर देता है। यह वह स्तर है, जहाँ से शिक्षार्थी या तो गणित में उच्च शैक्षिक शिक्षा का चयन करता है, या किसी व्यावसायिक पाठ्यक्रम का या फिर पढ़ाई बंद कर देता है। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित सीखने का मुख्य उद्देश्य शिक्षार्थी में समस्या समाधान के कौशलों तथा अपने चारों ओर परिमाणन अनुभवों का विकास करना है। इसके अन्तर्गत समस्या निर्माण तथा उनके हल प्रस्तुत करने की योग्यता एवं अभिवृति तथा कार्य करने की शैली शामिल है (एन.सी.एफ. 2005)। इसके पीछे मुख्य विचार शिक्षार्थियों को यह आत्मसात कराना है कि गणित क्यों एवं कैसे हमारे चारों ओर है? इन तथ्यों को संज्ञान में रखते हुए यह महत्वपूर्ण है कि उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित की शिक्षा को अधिक व्यापक एवं अर्थपूर्ण बनाया जाए। इसी वजह से गणित में संशोधित पाठ्यक्रम को इस प्रकार तैयार किया गया है कि यह अधिगमकर्ताओं की विविध आवश्यकताओं को पूरा कर सके। संशोधित पाठ्यचर्या की पाठ्यवस्तु एवं रूपरेखा को व्यापक रूप से 'भारतीय विद्यालय शिक्षा बोर्ड मण्डल' (COBSE) द्वारा सुझाए गए समान पाठ्यचर्या के आधार पर तैयार किया गया है। गणित को राष्ट्रीय मुक्त विद्यालयी शिक्षा संस्थान के शिक्षार्थियों की परिस्थितियों एवं दैनिक जीवन की वास्तविक परिस्थितियों से जोड़ने के लिए विभिन्न अवणारणाओं के समझ के आधार पर प्रयोग करने पर अधिक बल दिया गया है।

2. उद्देश्य

उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित सीखने के मुख्य उद्देश्य शिक्षार्थी को निम्न कार्यों में सक्षम बनाना है:

- आधारभूत अवधारणाओं, तथ्यों, सिद्धान्तों, पदों, प्रतीकों और प्रक्रियाओं को समझना तथा संबधित ज्ञान अर्जित करना।
- अपने परिवेश में परिमाणन अनुभवों को अर्जित करना तथा उनका संबंध अपने जीवन से स्थापित करना।
- तर्क प्रस्तुत करना तथा परिणाम प्राप्ति हेतु दिए गए तर्क का उपयोग करना।
- शाब्दिक समस्याओं को गणितीय रूप में रूपान्तरण करके उनका हल प्रस्तुत करना।
- दी गई सूचना को विश्लेषित करने के विभिन्न तरीकों से शिक्षार्थी को रूबरू करा सकें तथा परिणाम तक पहुँचने में उनकी मदद कर सकें।
- गणित के व्यापक प्रयोग की सराहना करने के अवसर प्रदान करना तथा इस प्रकार के प्रयोगों को पूरा करने में आधारभूत उपकरणों से लैस करना।
- विज्ञान, व्यावसायिक अध्ययन, अर्थशास्त्र तथा दैनिक जीवन में गणित की अवधारणओं के प्रयोग के प्रभाव एवं उत्कृष्टता की सराहना हेतु विकसित करना।
- विविध समस्याओं के हल प्रस्तुत करने में गणितीय कौशलों एवं ज्ञान को लागू करना।
- गणित एवं इसकी अवधारणओं के प्रयोग के प्रति सकारात्मक अभिवृति का विकास करना।

3. पाठ्यक्रम संरचना

गणित की वर्तमान पाठ्यचर्या को दो भागों तथा दस मॉडयूलों में विभाजित किया गया है। भाग 1 में पाँच मॉडयूल समुच्चय, संबंध एवं फलन, अनुक्रम तथा श्रेणियां, बीजगणित-I, निर्देशांक ज्यामिति तथा सांख्यिकी एवं प्रायिकता हैं। इसी प्रकार भाग 2 में भी पाँच मॉडयूल बीजगणित-II, संबंध एवं फलन, कलन, सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति तथा सांख्यिकी एवं प्रायिकता हैं। प्रत्येक मॉडयूल विभिन्न पाठों में विभाजित किया गया है।

अध्यायों की संख्या, सुझावित अध्ययन अवधि तथा प्रत्येक इकाई के लिए निर्धारित अंक इस प्रकार है:

भाग 1

मॉडयूल/ पाठ	पाठों की संख्या	अध्ययन अवधि (घंटों में)
मॉडयूल-I: समुच्चय, संबंध एवं फलन	05	30
1. समुच्चय		
2. संबंध एवं फलन-I		
3. त्रिकोणमितीय फलन-I		
4. त्रिकोणमितीय फलन-II		
5. त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों में संबंध		
मॉडयूल-II: अनुक्रम तथा श्रेणियां	02	15
6. अनुक्रम तथा श्रेणियां		
7. कुछ विशेष श्रेणियां		
मॉडयूल-III: बीजगणित-I	05	30
8. सम्मिश्र संख्याएं		
9. द्विघात समीकरण एवं रैखिक असमिकाएं		
10. गणितीय आगमन का सिद्धान्त		
11. क्रमचय तथा संचय		
12. द्विपद प्रमेय		
मॉडयूल-IV: निर्देशांक ज्यामिति	04	30
13. निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली		
14. सरल रेखाएं		
15. वृत		
16. शंकु परिच्छेद		
मॉडयूल-V: सांख्यिकी एवं प्रायिकता	03	15
17. प्रकीर्णन के मापक		
18. यादृच्छिक प्रयोग एवं घटनाएं		
19. प्रायिकता		
कुल	19	120

भाग 2

मॉडयूल/ पाठ	पाठों की संख्या	अध्ययन अवधि (घंटों में)
मॉडयूल-VI: बीजगणित -II	03	30
20. आव्यूह		
21. सारणिक तथा इसके अनुप्रयोग		
22. आव्यूह का प्रतिलोम तथा इसके अनुप्रयोग		
मॉडयूल-VII: संबंध एवं फलन-II	02	30
23. संबंध एवं फलन -II		
24. प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन		
मॉडयूल-VIII: कलन	08	60
25. सीमा एवं सांतत्य		
26. अवकलन		
27. त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज		
28. चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनों का अवकलज		
29. अवकलज के अनुप्रयोग		
30. समाकलन		
31. निश्चित समाकलन		
32. अवकल समीकरण		
मॉडयूल-IX: सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति	04	30
33. त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय		
34. सदिश		
35. समतल		
36. सरल रेखा		
मॉडयूल-X: रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन	02	30
37. रैखिक प्रोग्रामन		
38. गणितीय विवेचन		
कुल	19	180

4. पाठ्यक्रम विवरण

भाग-1

मॉड्यूल-I: समुच्चय, सम्बन्ध एवं फलन

पाठ 1: समुच्चय

समुच्चय तथा उनका निरूपण, समुच्चयों का वर्गीकरण, उपसमुच्चय, वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय के रूप में अन्तराल, घात समुच्चय, समष्टीय समुच्चय, वेन आरेख, समुच्चयों का अन्तर, समुच्चय का पूरक और इसके गुण, समुच्चयों का सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ।

पाठ 2: संबंध एवं फलन-I

दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन, वास्तविक समुच्चयों का स्वयं के साथ कार्तीय गुणन, संबंध की परिभाषा, संबंध के प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर, फलन की परिभाषा, फलन के प्रान्त, सहप्रान्त तथा परिसर, एक फलन का आलेखीय निरूपण, कुछ विशेष फलन, फलनों का योग, अन्तर, गुणन तथा भाग।

पाठ 3: त्रिकोणमितीय फलन-I

कोण की वृत्तीय माप, त्रिकोणमितीय फलन, कुछ विशिष्ट वास्तविक संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख, त्रिकोणमितीय फलनों की आवर्तता।

पाठ 4: त्रिकोणमितीय फलन-II

त्रिकोणमितीय फलनों का योग तथा गुणा, गुणन को योग में रूपांतरित करना और विलोमत:, कोणों के गुणज तथा अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय समीकरण।

पाठ 8: त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों में सम्बन्ध

ज्या सूत्र, कोज्या सूत्र, प्रक्षेप सूत्र, ज्या एवं कोज्या सूत्र के साधारण अनुप्रयोग।

मॉड्यूल-II: अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

पाठ 6: अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

अनुक्रम, समान्तर श्रेणी, समांतर माध्य, गुणोत्तर श्रेणी, समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी के व्यापक पद, समांतर श्रेणी एवं गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योग, अपरिमित गुणोत्तर श्रेणी तथा इसका योग, गुणोत्तर माध्य, समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य में संबंध।

पाठ 7: कुछ विशेष श्रेणियाँ

श्रेणी, विशेष प्रकार की श्रेणियों के n पदों का योग: $\Sigma n, \Sigma n^2$ तथा Σn^3

मॉड्यूल-III: बीजगणित-I

पाठ 8: सम्मिश्र संख्याएं

सम्मिश्र संख्याओं को समझना, i की घात, सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी, सम्मिश्र संख्या का ज्यामितीय निरूपण, सम्मिश्र संख्या का मापांक, दो सम्मिश्र संख्याओं की समानता, सम्मिश्र संख्याओं का योग एवं घटा, सम्मिश्र संख्या का ध्रुवीय निरूपण एवं कोणांक, दो सम्मिश्र संख्याओं की गुणा एवं भाग, एक सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल।

पाठ 9: द्विघात समीकरण तथा रैखिक असमिकाएं

द्विघात समीकरण के मूल, गुणखण्डन तथा द्विघात सूत्र के प्रयोग से द्विघात समीकरण का हल, द्विघात समीकरण के मूलों एवं गुणांकों में संबंध, बीजगणित की मूलभूत प्रमेय।

रैखिक असमिकाएं, एक चर की रैखिक असमिकाओं का बीजगणितीय हल तथा हल का संख्या रेखा पर निरूपण। दो चरों की रैखिक असमिकाओं का आलेखीय हल। दो चरों के रैखिक असमिका निकाय का आलेखीय हल।

पाठ 10: गणितीय आगमन का सिद्धान्त

कथन को समझना, गणितीय आगमन का सिद्धान्त और इसके साधारण अनुप्रयोग

पाठ 11: क्रमचय तथा संचय

गणन का मूलभूत सिद्धान्त, क्रमगुणित $n(n!$ or $\lfloor n$), क्रमचय तथा संचय, सूत्रों की उपपत्ति और उनके सम्बन्ध तथा साधारण अनुप्रयोग।

पाठ 12: द्विपद प्रमेय

प्राकृत घातांक के लिए द्विपद प्रमेय, द्विपद प्रसार के व्यापक एवं मध्य पद, द्विपद प्रमेय के साधारण अनुप्रयोग।

मॉड्यूल-IV: निर्देशांक ज्यामिति

पाठ-13: निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली

आयताकार निर्देशांक अक्ष, दो बिंदुओं के बीच की दूरी, विभाजन सूत्र, त्रिभुज का क्षेत्रफल, तीन बिन्दुओं के सरेख होने का प्रतिबन्ध, एक रेखा की आनति (झुकाव) तथा प्रवणता, दो विभिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता, रेखाओं की समान्तरता और लम्बवतता के प्रतिबन्ध, एक रेखा द्वारा अक्षों पर बने अन्त:खण्ड, दो रेखाओं के बीच कोण, मूल बिन्दु का स्थानान्तरण।

पाठ 14: सरल रेखाएं

एक अक्ष के समान्तर रेखा, विभिन्न मानक रूपों में सरल रेखा का समीकरण, प्रथम घात का दो चरों का व्यापक समीकरण, एक बिन्दु की रेखा से दूरी, समान्तर अथवा लम्बवत् रेखाओं के समीकरण, दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु से होकर जाने वाले रेखा परिवार का समीकरण।

पाठ 15: वृत

वृत को परिभाषित करना, मानक रूप में वृत का समीकरण, वृत का व्यापक समीकरण।

पाठ 16: शंकु परिच्छेद

शंकु परच्छेद, दीर्घवृत, परवलय, अतिपरवलय, आयताकार अतिपरवलय, परवलय, दीर्घवृत एवं अतिपरवलय के मानक समीकरण एवं साधारण गुणधर्म।

मॉड्यूल-V: सांख्यिकी एवं प्रायिकता

पाठ 17: प्रकीर्णन के मापक

प्रकीर्णन को समझना, प्रकीर्णन के माप, यथाप्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य विचलन, प्रसरण तथा मानक विचलन, विभिन्न प्रसरण एवं समान माध्य की बारंबारता बंटनों का विश्लेषण।

पाठ 18: यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाएं

यादृच्छिक प्रयोग; परिणाम, प्रतिदर्श समष्टि, घटनाएं: घटना का घटित होना, 'नहीं', 'और' एवं 'अथवा' घटनाएं, निरपेक्ष घटनाएं, परस्पर अपवर्जी घटनाएं, स्वतन्त्र और आश्रित घटनाएं, समप्रायिक घटनाएं।

पाठ 19: प्रायिकता

घटनाएं और उनकी प्रायिकता, क्रमचय एवं संचय के प्रयोग से प्रायिकता का परिकलन, घटना का पूरक, प्रायिकता का योग एवं गुणन नियम, प्रतिबंधी प्रायिकता, स्वतन्त्र घटनाएं, कुल प्रायिकता नियम, Bays प्रमेय, यादृच्छिक चर तथा इसकी प्रायिकता बंटन, यादृच्छिक चर का माध्य एवं प्रसरण, बरनौली प्रयास तथा द्विपद बंटन।

भाग - 2

मॉड्यूल-VI: बीजगणित-II

पाठ 20: आव्यूह

आव्यूह और उनका निरूपण, कोटि, समानता, आव्यूहों के प्रकार, शून्य आव्यूह, एक आव्यूह का परिवर्त, सममित तथा विषम सममित आव्यूह, आव्यूहों का योग, व्यवकलन गुणन और एक आव्यूह का अदिश गुणन, योग, व्ययकलन, गुणन एवं अदिश गुणन के साधारण गुणधर्म, व्युत्क्रमणीय आव्यूह, प्रारंभिक संक्रियाएं, प्रारंभिक संक्रियाओं से आव्यूह का प्रतिलोम (व्युत्क्रम)।

पाठ 21: सारणिक तथा इसके अनुप्रयोग

एक वर्ग आव्यूह का सारणिक (3×3 आव्यूहों तक), सारणिकों के गुणधर्म, उपसारणिक, सहखंड, सारणिक के गुणधर्मों के प्रयोग से सारणिक का मान ज्ञात करना, सारणिकों के अनुप्रयोग।

पाठ 22: आव्यूह का प्रतिलोम और इसके अनुप्रयोग

अव्युत्क्रमणीय तथा व्युत्क्रमणीय आव्यूह एवं आव्यूह का सहखण्डज तथा प्रतिलोम, रैखिक समीकरण निकाय का हल, रैखिक समीकरण निकाय की संगतता की कसौटी, आव्यूह के प्रतिलोम के प्रयोग से दो अथवा तीन चरों के रैखिक समीकरण निकाय का हल (केवल अद्वितीय हल) ज्ञात करना।

मॉड्यूल-VII: संबंध एवं फलन

पाठ 23: संबंध एवं फलन-II

संबंध को समझना, संबंध के प्रकार, तुल्यता-संबंध, एकैकी तथा आच्छादक फलन, फलनों का संयोजन, एक फलन का प्रतिलोम, द्विआधारी संक्रियाएं।

पाठ 24: प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन

परिभाषा, परिसर, प्रान्त, मुख्य मान शाखाएं, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के आरेख, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों के गुणधर्म।

मॉड्यूल-VIII: कलन

पाठ 25: सीमा एवं सांतत्य

एक फलन की सीमा, बायां पक्ष तथा दायां पक्ष सीमाएं, सीमाओं की आधारभूत प्रमेय, कुछ विशेष फलनों की सीमाएं, किसी बिन्दु पर एक फलन का सांतत्य, सतत् फलनों के गुणधर्म।

पाठ 26: अवकलन

एक फलन का अवकलज, वेग की सीमा के रूप में, $\frac{dy}{dx}$ का ज्यामितीय अर्थ निर्वचन, अचर फलन का अवकलन, प्रथम सिद्धान्त से एक फलन का अवकलज, अवकलजों का बीजगणित, फलनों के योग, अन्तर तथा गुणन का अवकलज, भाग नियम, श्रृंखला नियम।

पाठ 27: त्रिकोणमितीय फलनों का अवकलज

त्रिकोणमितीय फलनों के अवकलज, प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलनों में अवकलज, द्विकोटि के अवकलज।

पाठ 28: चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनों का अवकलज

चरघातांकी तथा लघुगणकीय फलनों के अवकलज, प्राचलिक फलनों के द्विकोटि अवकलज, रोल प्रमेय।

पाठ 29: अवकलज के अनुप्रयोग

मात्राओं के परिवर्तन की दर, सन्निकटन, स्पर्श रेखा तथा अभिलम्ब के समीकरण, रोल प्रमेय का गणितीय निरूपण, लागरांज का माध्यमान प्रमेय, वर्धमान तथा ह्रासमान फलन, किसी फलन की एक दिष्टता तथा अवकलज के चिन्ह में संबंध, एक फलन के उच्चिष्ठ एवं निम्नष्ठ

मान, उच्चिष्ठ एवं निम्नष्ठ के प्रतिबन्ध, एक उच्चिष्ठ तथा निम्नष्ठ मान ज्ञात करने के लिए द्विकोटि अवकलज का प्रयोग, उच्चिष्ठ तथा निम्नष्ठ के अनुप्रयोग।

पाठ 30: समाकलन

समाकलन, अवकलन की विपरीत क्रिया के रूप में, समाकलों के गुणधर्म, समाकलन की तकनीकें, खंडशः समाकलन, $\int e^{x}(f(\mathrm{x})+f'(x))\,dx$ के रूप के समाकलन, आंशिक भिन्नों के प्रयोग से समाकलन।

पाठ 31: निश्चित समाकलन

योग की सीमा के रूप में निश्चित समाकल, प्रतिस्थापन द्वारा निश्चित समाकलों का मान ज्ञात करना, निश्चित समाकलनों के आधारभूत गुणधर्म, समाकलन के अनुप्रयोग।

पाठ 32: अवकल समीकरण

परिभाषा, कोटि तथा घात, रैखिक तथा अरैखिक अवकल समीकरण, अवकल समीकरण बनाना, अवकल समीकरण के व्यापक तथा विशिष्ट हल, अवकल समीकरण को हल करने की विधियाँ।

मॉड्यूल-IX: सदिश एवं त्रिविमीय ज्यामिति

पाठ 33: त्रिविमय ज्यामिति का परिचय

निर्देशांक निकाय तथा अंतरिक्ष में एक बिन्दु के निर्देशांक दो बिन्दुओं के बीच दूरी, एक रेखा को विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक।

पाठ 34: सदिश

अदिश तथा सदिश, सदिश एक दिष्ट रेखाखंड के रूप में, सदिशों का वर्गीकरण, सदिशों का योग, एक बिन्दु का स्थिति सदिश, सदिश का ऋण, एक सदिश के घटक, एक सदिश का एक अदिश से गुणन, सदिशों की समतलीयता, एक सदिश का वियोजन, विभाजन सूत्र, एक सदिश के दिक भोज्या तथा दिक अनुपात, सदिशों का अदिश तथा सदिश गुणनफल, अदिश त्रिक गुणनफल।

पाठ 35: समतल

समतलन का सदिश समीकरण, अभिलम्ब रूप में समतल का समीकरण, सदिश रूप को कार्तीय रूप में परिवर्तित करना, एक बिन्दु से होकर जाने वाले तथा एक सदिश के लम्बवत् समतल का समीकरण, तीन असरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाले समतल का समीकरण, अन्तःखण्ड रूप में समतलन का समीकरण, दो समतलों के बीच कोण, एक समतल से एक बिन्दु की दूरी।

पाठ 36: सरल रेखा

सरल रेखा का सदिश समीकरण, सरल रेखा के समीकरण को सममित रूप में परिवर्तित करना, एक रेखा से एक बिन्दु की दूरी, दो रेखाओं के बीच कोण, एक रेखा और एक समतल के बीच कोण, दो रेखाओं के समतलीय होने की प्रतिबंध।

मॉड्यूल-X: रैखिक प्रोग्रामन एवं गणितीय विवेचन

पाठ 37: रैखिक प्रोग्रामन

भूमिका (परिचय), रैखिक प्रोग्रामन में प्रयुक्त विभिन्न पदों की परिभाषाएं, रैखिक प्रोग्रामन समस्या तथा विभिन्न पदों की परिभाषाएं, रैखिक प्रोगामन-ज्यामितीय विधि, रैखिक प्रोग्रामन समस्याओं का हल।

पाठ 38: गणितीय विवेचन

गणितीय रूप में स्वीकार कथन, संयोजी शब्द/वाक्यांश "यदि और केवल यदि" (आवश्यक तथा पर्याप्त) प्रतिबंध की समझ को समेकित करना, "प्रदान करता है", "और/अथवा", "से प्राप्त होता है", "और", "अथवा", "घटित होता है", तथा गणित एवं व्यवहारिक जीवन की अनेक प्रकार की समस्याओं में इनका प्रयोग, विरोध, विलोम एवं प्रतिधनात्मक शब्दों में अन्तर जैसे संयोजी शब्दों को सम्मिलित करने वाले कथनों की वैधता जांचना।

5. अध्ययन की योजना

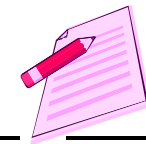
गणित विषय आपको निम्नलिखित तरीकों से सीखने के अवसर प्रदान करता है:

- दो भागों (भाग 1 तथा भाग 2) में मुद्रित एवं अध्ययन सामग्री।
- आडियो एवं वीडियो कार्यक्रमों के रूप में पूरक सामग्री।
- गणित में वीडियो सामग्री एनआईओएस की वेबसाइट (www.nios.ac.in) के साथ यू ट्यूब पर भी उपलब्ध है। इन सामग्रियों से संबंधित वेबसाइट तथा लिंक्स अध्ययन सामग्री के अन्तर्गत संबंधित पाठ में दिए गए हैं।
- शिक्षार्थी अध्ययन केन्द्र पर 30 व्यक्तिगत संपर्क कार्यक्रम सत्र। कृपया अपने व्यक्तिगत संपर्क की योजना की सूचना के बारे में पता करने के लिए अपने अध्ययन केन्द्र पर संपर्क करें।
- अध्ययन केन्द्र पर आपने-सामने के व्यक्तिगत संपर्क कार्यक्रम के अलावा आपको मुक्त विद्या वाणी के जरिए लाइव व्यक्तिगत संपर्क कार्यक्रम वेबकास्ट किए जाते हैं। जिन्हें आप एनआईओएस की वेबसाइट (www.nios.ac.in) पर जाकर देख सकते हैं।

6. मूल्यांकन की योजना

शिक्षार्थी का आकलन सतत एवं व्यापक मूल्यांकन (CCE) के जरिए शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र तथा लोक परीक्षाओं के द्वारा किया जाएगा। विस्तार रूप से मूल्यांकन की योजना नीचे तालिका में दी गई है:

मूल्यांकन का तरीका	पाठ्यक्रम/पाठ्यवस्तु	अवधि	भारिता
शिक्षक अंकित मूल्यांकन पत्र	स्व अध्ययन सामग्री भाग 1 के अन्तर्गत सभी विषय वस्तु	स्वनिर्धारित	20%
लोक/सत्रांत परीक्षा	स्व अध्ययन सामग्री भाग 2 के अन्तर्गत सभी विषय वस्तु	3 घंटे	80%



1

समुच्चय

आइए निम्नलिखित परिस्थितियों पर विचार करें।

श्रीमती और श्री मेहता एक दिन मार्किट गए। श्रीमान मेहता ने निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदीं।

एक खिलौना, एक किग्रा मिठाई और एक मैगजीन। जबकि श्रीमती मेहता ने निम्नलिखित वस्तुएँ खरीदीं।

"भिंडी, आलू और टमाटर" दोनों ही उदाहरणों में, प्रत्येक संग्रह में वस्तुएँ सुपरिभाषित है। आप सच बोलने वाले विद्यार्थियों के संग्रह के बारे में क्या कह सकते हैं ? क्या यह सुपरिभाषित है? शायद नहीं। वस्तुओं के सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं। एक समूह का समुच्चय होने के लिए यह आवश्यक है कि वह सुपरिभाषित हो। सुपरिभाषित शब्द का उपयोग जर्मन गणितज्ञ जॉर्ज कैन्टर (George Canter) (1845-1918) ने एक समुच्चय को परिभाषित करने के लिए किया। वह समुच्चय सिद्धांत (Set theory) के पिता के रूप में जाने जाते हैं। इन दिनों समुच्चय सिद्धांत गणित की बहुत सारी अवधारणाओं के आधार के रूप में जाना जाता है। इस पाठ में हम कुछ आधारभूत परिभाषाओं और समुच्चयों पर सक्रियाएँ और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- समुच्चय को परिभाषित तथा विभिन्न रूपों में निरूपित करना
- विभिन्न प्रकार के समुच्चयों, जैसे परिमित तथा अपरिमित समुच्चय, रिक्त समुच्चय, एकल समुच्चय, (Singleton set), समान समुच्चय, तुल्य समुच्चय, उपसमुच्चय को परिभाषित करना और उनके उदाहरण देना
- समष्टीय समुच्चय के उदाहरण देना तथा दो समुच्चयों का अंतर और समुच्चयों के पूरक को परिभाषित करना
- दो समुच्चयों के सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ को परिभाषित करना
- वेन आरेख के द्वारा दो समुच्चयों के सम्मिलन तथा सर्वनिष्ठ, समष्टीय समुच्चय, समुच्चय का पूरक तथा दो समुच्चयों के अंतर को प्रदर्शित करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी

1.1 कुछ मानक संकेतन

इस अध्याय के विभिन्न पदों को परिभाषित करने से पहले, आइए निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें–

(i) आपके विद्यालय में लंबे विद्यार्थियों का संग्रह	(i) आपके विद्यालय में उन विद्यार्थियों का संग्रह जिनकी ऊँचाई 180 सेमी॰ से अधिक है।
(ii) आपकी कालोनी (colony) में इमानदार व्यक्तियों का संग्रह	(ii) आपके इलाके (colony) के उन सभी लोगों का संग्रह जो कभी किसी चोरी के मामले में सम्मिलित नहीं पाए गये।
(iii) आपके विद्यालय की लाइब्रेरी में रोचक (interesting) पुस्तकों का संग्रह	(iii) आपके विद्यालय की लाइब्रेरी में गणित की पुस्तकों का संग्रह
(iv) आपके विद्यालय में मेधावी (intelligent) विद्यार्थियों का संग्रह	(iv) आपके विद्यालय में उन छात्रों का संग्रह जिन्होंने वार्षिक परीक्षा में 80% से अधिक अंक प्राप्त किए।

उर्ध्वाधर रेखा के बायीं ओर लिखे सभी संग्रहों में लंबाई, इमानदारी, रोचकता, मेघावीपन सुपरिभाषित नहीं है। वास्तव में ये भाव एक व्यक्ति से दूसरे व्यक्ति के लिए भिन्न-भिन्न हो सकते हैं। इसलिए इन संग्रहों को समुच्चय नहीं कह सकते हैं। जबकि क्षैतिज रेखा के दायीं ओर लिखे सभी संग्रह जैसे 180 सेमी से अधिक ऊँचाई वाले विद्यार्थी, किसी चोरी के मामले में सम्मिलित न पाए जाने वाले व्यक्ति, गणित की पुस्तकें तथा 80% से अधिक अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थी सुपरिभाषित संग्रह है। अत: इन संग्रहों को समुच्चय माना जाता है।

यदि वस्तुओं के किसी संग्रह को हम समुच्चय कहें तो इस संग्रह की प्रत्येक वस्तु इस समुच्चय का अवयव कहलाती है। समुच्चय को प्राय: अंग्रेजी वर्णमाला के बड़े अक्षरों से और इसके अवयवों को अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों से निरूपित करते हैं। उदाहरणार्थ A = {खिलौना, हाथी, मिठाई का पैकिट, मैगजीन}

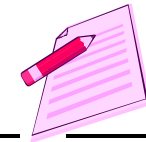
समुच्चय के प्रदर्शन के लिए कुछ मानक संकेतन :

N : प्राकृत संख्याओं का समुच्चय
W : पूर्ण संख्याओं का समुच्चय
Z : पूर्णांकों का समुच्चय
Z^+ : धन पूर्णांकों का समुच्चय
Z^- : ऋण पूर्णांकों का समुच्चय
Q : परिमेय संख्याओं का समुच्चय
I : अपरिमेय संख्याओं का समुच्चय
R : वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
C : सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय

दूसरे प्रयुक्त होने वाले प्रतीक हैं–

$\in$: 'सदस्य है' या 'में है', $\notin$: 'सदस्य नहीं है' या 'में नहीं है'
$\exists$: अस्तित्व है, $\nexists$: अस्तित्व नहीं है

उदाहरणार्थ, N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है और हम जानते हैं कि 2 एक प्राकृत संख्या है परन्तु –2 एक प्राकृत संख्या नहीं है। इसे प्रतीक के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं जैसे $2 \in N$ और $-2 \notin N$



टिप्पणी

1.2 समुच्चय का निरूपण

समुच्चय को निरूपित करने की दो विधियाँ हैं।

1.2.1 (i) रोस्टर विधि (सारणीबद्ध रूप)

इस विधि में, समुच्चय के सभी अवयवों को सूचीबद्ध किया जाता है, अवयवों को एक दूसरे से, अर्धविराम द्वारा पृथक किया जाता है और उन सभी को एक मंझले कोष्ठक { } के भीतर लिखा जाता है। यदि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तो इसे रोस्टर विधि में इस प्रकार लिख सकते हैं : $V = \{a, e, i, o, u\}$

(ii) यदि A, 7 से छोटी प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है, तो सारणीबद्ध रूप में $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ लिखा जायेगा।

टिप्पणी: समुच्चय को रोस्टर रूप में लिखते समय किसी अवयव को सामान्यत: दोबारा नहीं लिखते हैं। उदाहरण के लिए यदि A, mathematics शब्द में प्रयुक्त अक्षरों का समुच्चय है तो $A = \{m, a, t, h, e, i, c, s\}$

1.2.2 समुच्चय-निर्माण रूप

इस रूप में अवयवों को सूचीबद्ध नहीं किया जाता परन्तु सभी अवयवों को एक सर्वनिष्ठ गुणधर्म के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

मान लीजिए कि V अंग्रेजी वर्णमाला के सभी स्वरों का समुच्चय है तब V को समुच्चय निर्माण रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिखते हैं : $V = \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।}

(ii) मान लीजिए कि A, 7 से छोटी, प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है तो $A = \{x : x \in N$ और $x < 7\}$

टिप्पणी: प्रतीक ':' को 'ताकि' 'इस प्रकार कि' (such that) पढ़ा जाता है।

उदाहरण 1.1. निम्नलिखित को समुच्चय-निर्माण रूप में लिखिए :

(a) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ (b) $B = \{3, 6, 9, 12\}$

हल : (a) $A = \{x : x \in Z$ और $-3 \le x \le 3\}$, (b) $B = \{x : x = 3n$ और $n \in N, n \le 4\}$

उदाहरण 1.2. निम्नलिखित को रोस्टर रूप में लिखिए :

(a) $C = \{x : x \in N$ और $50 \le x \le 60\}$

(b) $D = \{x : x \in R$ और $x^2 - 5x + 6 = 0\}$

हल : (a) $C = \{50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60\}$

(b) $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-2) = 0$

$\Rightarrow x = 3, 2. \quad \therefore D = \{2, 3\}$

1.3 समुच्चयों का वर्गीकरण

1.3.1 परिमित और अपरिमित समुच्चय

मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं जहाँ

$A = \{x : x$ एक प्राकृत संख्या है।}, $B = \{x : x$ आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है।}

यहाँ यह स्पष्ट है कि समुच्चय A में अवयवों की संख्या परिमित नहीं है जबकि समुच्चय B में अवयवों की संख्या परिमित है। A अपरिमित समुच्चय तथा B परिमित समुच्चय कहलाता है।

एक समुच्चय परिमित कहलाता है यदि उसके अवयवों की संख्या को गिना जा सके और यह अपरिमित कहलाता है यदि इसके अवयवों को उनकी अन्तिम संख्या तक गिनना संभव न हो।

1.3.2 रिक्त समुच्चय

नीचे दिए गए समुच्चयों पर विचार कीजिए–

$A = \{x : x \in R$ और $x^2 + 1 = 0\}$

$B = \{x : x$ एक संख्या है जो 7 से बड़ी है और 5 से छोटी है।$\}$

समुच्चय A में वास्तविक संख्याएँ विद्यमान है परन्तु कोई ऐसी वास्तविक संख्या नहीं है जिसका वर्ग '–1' हो। इसलिए, इस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं है। इसी प्रकार, कोई संख्या ऐसी नहीं है जो 5 से कम हो और 7 से अधिक भी हो। इस प्रकार के समुच्चय जिनमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाते हैं। रिक्त समुच्चय, को प्रतीक ϕ अथवा { } से प्रदर्शित करते हैं।

एक समुच्चय, जिसमें एक भी अवयव नहीं होता है, रिक्त समुच्चय या शून्य समुच्चय कहलाता है तथा इसे ϕ अथवा {} द्वारा निरूपित किया जाता है।

1.3.3 एकल समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चय पर विचार कीजिए :

$A = \{x : x$ एक सम अभाज्य संख्या है।$\}$ क्योंकि केवल एक ही अभाज्य संख्या (2) सम होती है, इसलिए समुच्चय A में केवल एक ही अवयव है। इस प्रकार का समुच्चय एकल समुच्चय कहलाता है। यहाँ $A = \{2\}$, **एक समुच्चय, जिसमें केवल एक ही अवयव होता है, एकल समुच्चय कहलाता है।**

1.3.4 समान और तुल्य समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

(i) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 1, 3\}$ (ii) $D = \{1, 2, 3\}$, $E = \{a, b, c\}$.

उदाहरण (i) में, समुच्चय A तथा B में वही अवयव हैं। ऐसे समुच्चय समान समुच्चय कहलाते हैं और उन्हें $A = B$ के रूप में लिखा जाता है। उदाहरण (ii) में समुच्चय D और E में अवयवों की संख्या तो समान है परन्तु अवयव अलग-अलग हैं। ऐसे समुच्चय तुल्य समुच्चय कहलाते हैं और उन्हें $A \approx B$ के रूप में लिखा जाता है। दो समुच्चय A और B तुल्य समुच्चय कहलाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान हो परन्तु दो समुच्चय समान समुच्चय कहलाते हैं यदि उनमें अवयवों की संख्या समान होने के साथ-साथ उनके अवयव भी समान हों।

1.3.5 असंयुक्त समुच्चय

दो समुच्चय A तथा B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं, यदि उनमें कोई भी अवयव उभयनिष्ठ न हो। उदाहरणार्थ, $A = \{1, 3, 5\}$ तथा $B = \{2, 4, 6\}$ असंयुक्त समुच्चय हैं।

उदाहरण 1.3. दिया है: $A = \{2, 4\}$ और $B = \{x : x$, समीकरण $x^2 + 6x + 8 = 0$ का एक मूल है।$\}$ क्या A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं ?

हल : यदि हम $x^2+6x+8=0$ को हल करें तो हमें प्राप्त होता है। $x=-4,-2$

$\therefore$ $B=\{-4,-2\}$ जबकि $A=\{2,4\}$ स्पष्टत: A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं।

उदाहरण 1.4. यदि $A=\{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है।$\}$ और $B=\{y : y\in N$ और $y\le 5\}$

क्या (i) $A=B$ (ii) $A\approx B$

हल : $A=\{a, e, i, o, u\}$, $b=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

प्रत्येक समुच्चय में अलग-अलग पाँच अवयव हैं।

$\therefore$ $A\ne B$ परन्तु $A\approx B$

उदाहरण 1.5. निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय परिमित या अपरिमित है।

$A=\{x : x$ एक रेखा पर स्थित बिंदु है।$\}$, $B=\{y : y\in N$ और $y\le 50\}$

हल : क्योंकि एक रेखा पर बिन्दुओं की संख्या अपरिमित (गिनी न जा सकने वाली) होती है। अत: A एक अपरिमित समुच्चय है, जबकि 50 तक की प्राकृत संख्याओं को गिना जा सकता है। अत: B एक परिमित समुच्चय है।

उदाहरण 1.6. निम्नलिखित में से कौन-सा समुच्चय रिक्त है :

$A=\{x : x^2-1=0$ और x एक अपरिमेय संख्या है$\}$, $B=\{x : x\in Z$ और $-2\le x\le 2\}$

हल : समुच्चय A में वे अपरिमेय संख्याएँ सम्मिलित है जो $x^2-1=0$ को संतुष्ट करती है। यदि हम $x^2-1=0$ को हल करें तो हमें $x=\pm 1$ प्राप्त होता है। स्पष्टत: ± 1 दोनों ही अपरिमेय संख्यायें नहीं हैं। अत: A एक रिक्त समुच्चय है। परन्तु $B=\{-2,-1,0,1,2\}$ एक रिक्त समुच्चय नहीं है क्योंकि इसमें 5 अवयव सम्मिलित हैं।

उदाहरण 1.7. निम्नलिखित में कौन-सा समुच्चय एकल (singleton) है?

$$A=\left\{x : x\in Z \text{ और } x-2=0\right\} \qquad B=\left\{y : y\in R \text{ और } y^2-2=0\right\}.$$

हल : समुच्चय A में वे पूर्णांक सम्मिलित है जो $x-2=0$ के हल हैं अथवा $x=2$

$\therefore$ $A=\{2\}$ $\Rightarrow$ A एकल समुच्चय है।

समुच्चय B उन वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है जो $y^2-2=0$ के हल है अथवा $y=\pm\sqrt{2}$

$\therefore$ $B=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$ अत: B एकल समुच्चय नहीं है।

देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. निम्नलिखित में कौन से समूह समुच्चय हैं ?

(i) S अक्षर से प्रारंभ होने वाले सप्ताह के दिनों का समूह।

(ii) 50 तक की प्राकृत संख्याओं का समूह।

(iii) तुलसीदास द्वारा लिखित कविताओं का समूह।

(iv) आपके विद्यालय में मोटे विद्यार्थियों का समूह।

2. उपयुक्त प्रतीक को रिक्त स्थान में भरिए यदि $A=\{1,2,3\}$

(i) 1...........A (ii) 4........A.

3. निम्नलिखित समुच्चयों में से प्रत्येक को रोस्टर रूप में लिखिए–

(i) $A=\{x : x \in Z$ और $-5 \le x \le 10\}$

(ii) $B=\{x : x \in R$ तथा $x^2-1=0\}$

(iii) $C=\{x : x$ शब्द banana का एक अक्षर है$\}$

(iv) $D=\{x : x$ एक अभाज्य संख्या है तथा 60 की पूर्णतः भाजक है$\}$

4. निम्नलिखित समुच्चयों को समुच्चय निर्माण रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $A=\{2,4,6,8,10\}$ (ii) $B=\{3,6,9,\ldots\ldots \infty\}$

(iii) $C=\{2,3,5,7\}$ (iv) $D=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

क्या उपर्युक्त A तथा B असंयुक्त समुच्चय हैं ?

5. निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन से परिमित तथा कौन से अपरिमित है?

(i) किसी दी हुई रेखा के समान्तर रेखाओं का समुच्चय

(ii) पृथ्वी पर रहने वाले जानवरों का समुच्चय

(iii) 50 से कम अथवा उसके बराबर प्राकृत संख्याओं का समुच्चय

(iv) किसी वृत्त पर स्थित बिंदुओं का समुच्चय

6. निम्नलिखित में से कौन-कौन रिक्त या एकल समुच्चय है?

(i) $A=\{x : x$, समीकरण $x^2+2=0$ का एक हल है और $x \in R\}$

(ii) $B=\{x : x$, समीकरण $x-3=0$ का एक हल है और $x \in Z\}$

(iv) $C=\{x : x$, समीकरण $x^2-2=0$ का एक एक हल है और $x \in Z\}$

(v) $D=\{x : x$, आपके विद्यालय की दोनों कक्षाओं XI और XII में अध्ययनरत विद्यार्थी है$\}$

7. निम्नलिखित में जाँच कीजिए कि $A=B$ या $A \approx B$।

(i) $A=\{a\}$, $B=\{x : x$ एक सम अभाज्य संख्या है।$\}$

(ii) $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{x : x$ शब्द guava का एक अक्षर है।$\}$

(iii) $A=\{x : x$ समीकरण $x^2-5x+6=0$ का हल है।$\}$ $B=\{2,3\}$

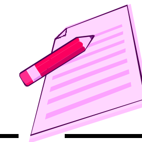
1.4 उपसमुच्चय

मान लीजिए कि समुच्चय A आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है और B आपके विद्यालय की कक्षा XII के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय है। इस उदाहरण में समुच्चय B का प्रत्येक अवयव समुच्चय A का भी एक अवयव है। इस प्रकार का समुच्चय B, समुच्चय A का उपसमुच्चय कहलाता है। इसे प्रतीक $B \subseteq A$ से प्रदर्शित करते हैं।

विचार कीजिए $D=\{1,2,3,4,\ldots\ldots..\}$, $E=\{\ldots..-3-2,-1,0,1,2,3,\ldots\ldots.\}$

स्पष्टतः समुच्चय D का प्रत्येक अवयव समुच्चय, E का भी एक अवयव है। $\therefore$ $D \subseteq E$

यदि A तथा B दो ऐसे समुच्चय हैं कि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी एक अवयव है, तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है।



टिप्पणी:

(i) प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है अर्थात $A \subseteq A$

(ii) रिक्त समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता है। उपसमुच्चय होने की स्थिति स्वयं ही पूरी हो जाती है। अतः रिक्त समुच्चय प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है।

(iii) यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$ तब $A = B$

(iv) यदि $A \subseteq B$ और $A \neq B$ तो A, B का उचित उपसमुच्चय कहलाता है और B, A का अधिसमुच्चय कहलाता है। अर्थात $A \subset B$ या $B \supset A$

उदाहरण 1.8. यदि $A = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है और $x < 5\}$ और $B = \{y : y$ एक सम अभाज्य संख्या है।$\}$ क्या B, A का उचित उपसमुच्चय है ?

हल : यहाँ दिया गया है, $A = \{2, 3\}$, $B = \{2\}$

स्पष्टतः: $B \subseteq A$ और $B \neq A$

हम लिखते हैं कि $B \subset A$ और कहते हैं कि B, A का उचित उपसमुच्चय है।

उदाहरण 1.9. यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{2, 3, 4, 5\}$ क्या $A \subseteq B$ या $B \subseteq A$?

हल : यहाँ $1 \in A$ परन्तु $1 \notin B$ $\Rightarrow$ $A \not\subseteq B$ और $5 \in B$ परन्तु $5 \notin A$ $\Rightarrow$ $B \not\subseteq A$

अतः न तो A, B का उपसमुच्चय और न ही B, A का उपसमुच्चय है।

उदाहरण 1.10. यदि $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{e, i, o, u, a\}$ क्या $A \subseteq B$ या $B \subseteq A$ या दोनों ?

हल : यहाँ दिए हुए समुच्चयों में, A का प्रत्येक अवयव, समुच्चय B का भी अवयव है।

$\therefore$ $A \subseteq B$ ...(i)

और B का प्रत्येक अवयव, समुच्चय A का भी अवयव है।

$\therefore$ $B \subseteq A$ ...(ii)

समीकरण (i) और (ii) से $A = B$

1.4.1 एक समुच्च्य के उपसमुच्चयों की संख्या

मान लीजिए $A = \{x\}$, तब A के उपसमुच्चय ϕ, A हैं

ध्यान रहे कि $n(A) = 1$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2 = 2^1$

मान लीजिए $A = \{2, 4\}$, तब A के उपसमुच्चय ϕ, $\{4\}$, $\{2\}$, $\{2, 4\}$ हैं।

ध्यान रहे कि $n(A) = 2$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 4 = 2^2$

मान लीजिए $A = \{1, 3, 5\}$ तब A के उपसमुच्चय $\phi, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}$.

ध्यान रहे कि $n(A) = 3$, A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 8 = 2^3$

यदि A एक समुच्चय है जिसमें $n(A) = p$ है, तब A के उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^p$ तथा A के उचित उपसमुच्चयों की संख्या $= 2^p - 1$ है।

वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय

संख्याओं के कुछ मानक समुच्चयों को हम इस प्रकार जानते हैं–

प्राकृत संख्याओं का समुच्चय $N = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

पूर्ण संख्याओं का समुच्चय $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\}$

पूर्णांकों का समुच्चय $Z = \{\ldots\ldots\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\ldots\ldots\}$

परिमेय संख्याओं का समुच्चय $Q = \left\{x : x = \dfrac{p}{q}, p, q \in Z \text{ तथा } q \neq 0\right\}$

अपरिमेय संख्याओं को I द्वारा निरूपित किया जाता है।

$I = \{x : x \in R$ तथा $x \notin Q\}$ अर्थात् वह सभी वास्तविक संख्याएँ जो परिमेय नहीं है।

यह समुच्च्य वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय हैं। इन उपसमुच्चयों में से कुछ स्पष्ट सम्बन्ध इस प्रकार है :

$N \subset W \subset Z \subset Q, Q \subset R, I \subset R, N \not\subset I$

1.4.2 वास्तविक संख्याओं के उपसमुच्चय के रूप में अन्तराल

अन्तराल I, R का उपसमुच्चय है यदि $x, y \in I$ तथा यदि z, x और y के मध्य कोई वास्तविक संख्या है, तब $z \in I$ है।

कोई वास्तविक संख्या जो एक अन्तराल के दो भिन्न–भिन्न अवयवों के बीच स्थित है, अन्तराल में होनी चाहिए

यदि $a, b \in R$ तथा $a < b$ तो हम निम्न प्रकार के अन्तराल प्राप्त कर सकते हैं।

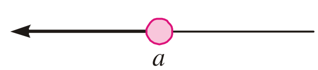
(i) समुच्चय $\{x \in R : a < x < b\}$ एक विवृत (खुला) अन्तराल कहलाता है और (a, b) द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(ii) समुच्चय $\{x \in R : a \leq x \leq b\}$ एक संवृत (बंद) अन्तराल कहलाता है और $[a, b]$ द्वारा निरूपित होता है इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

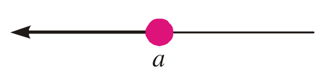
(iii) समुच्चय $\{x \in R : a < x \leq b\}$ एक अन्तराल है, जो बायीं ओर खुला तथा दायीं ओर बन्द है यह $(a, b]$ द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

(iv) समुच्चय $\{x \in R : a \leq x < b\}$ एक ऐसा अन्तराल है, जो बायीं ओर बन्द तथा दायीं ओर खुला है। यह $[a, b)$ द्वारा निरूपित होता है। इसे संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :

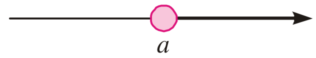
(v) समुच्चय $\{x \in R : x < a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a)$ द्वारा दर्शाया जाता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :



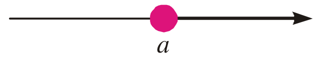
(vi) समुच्चय $\{x \in R : x \leq a\}$ एक ऐसा अन्तराल है जो $(-\infty, a]$ द्वारा दर्शाया जाता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :



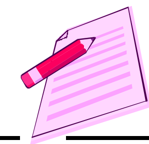
(vii) समुच्चय $\{x \in R : x > a\}$ एक अन्तराल है जो (a, ∞) द्वारा निरूपित होता हे। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :



(viii) समुच्चय $\{x \in R : x \geq a\}$ एक अन्तराल है जो $[a, \infty)$ द्वारा निरूपित होता है। यह संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाया जाता है :



प्रथम चार अन्तराल परिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा संख्या b – a (जो कि हमेशा धनात्मक होती है), चारों अन्तरालो (a, b), [a, b], (a, b], [a, b) में से प्रत्येकि की लम्बाई कहलाती है। अंतिम चार अंतराल अपरिमित अन्तराल कहलाते हैं तथा इन अंतरालों की लम्बाई दर्शायी नहीं जा सकती।



1.5 घात समुच्चय

उदाहरण: मान लीजिए कि $A = \{a, b\}$ तो A के उपसमुच्चय ϕ, {a}, {b}, {a, b} है।

यदि हम इन उपसमुच्चयों को एक नए समुच्चय, मान नीजिए कि B, के अवयव मान लें तब

$B = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

समुच्चय B, समुच्चय A का घात समुच्चय कहलाता है।

टिप्पणी: समुच्चय A के घात समुच्चय को P(A) से प्रदर्शित किया जाता है। समुच्चय A के घात समुच्चय में दिए हुए समुच्चय के सभी उपसमुच्चय होते हैं।

उदाहरण 1.11. निम्नलिखित समुच्चयों के घात समुच्चय लिखिए:

(i) $A = \{x : x \in R$ और $x^2 + 7 = 0\}$ (ii) $B = \{y : y \in N$ और $1 \leq y \leq 3\}$

हल: (i) स्पष्टत: $A = \phi$ (रिक्त समुच्चय)

$\therefore$ ϕ, दिए हुए समुच्चय का केवल उपसमुच्चय है। $\therefore$ $P(A) = \{\phi\}$

(ii) समुच्चय B को {1, 2, 3} के रूप में लिखा जा सकता है। B के उपसमुच्चय ϕ, {1}, {2}, {3}, {1, 2}, {1, 3}, {2, 3}, {1, 2, 3} हैं।

$\therefore$ $P(B) = \{\phi\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

उदाहरण 1.12. निम्नलिखित प्रत्येक समुच्चय को अन्तराल रूप में लिखिए :

(i) $\{x \in R : -1 < x \leq 2\}$ (ii) $\{x \in R : 1 \geq 2x - 3 \geq 0\}$

हल : (i) दिया हुआ समुच्चय = $\{x \in R : -1 < x \leq 2\}$

अत: दिये गये समुच्चय का अन्तराल = (–1, 2] है।

(ii) दिया हुआ समुच्चय = $\{x \in R : 1 \geq 2x - 3 \geq 0\}$

$$\Rightarrow \{x \in R : 4 \geq 2x \geq 3\} \Rightarrow \left\{x \in R : 2 \geq x \geq \frac{3}{2}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{x \in R : \frac{3}{2} \leq x \leq 2\right\}$$ अत: दिये हुये समुच्चय का अन्तराल = $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$

1.6 समष्टीय समुच्चय

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए:

A = {x : x आपके विद्यालय का एक विद्यार्थी है}

$B = \{y : y$ आपके विद्यालय का एक छात्र है$\}$

$C = \{z : z$ आपके विद्यालय की एक छात्रा है$\}$

$D = \{a : a$ आपके विद्यालय की कक्षा XII का एक विद्यार्थी है $\}$

स्पष्टत: समुच्चय B, C और D सभी A के उपसमुच्चय हैं।

A इस विशिष्ट उदाहरण का समष्टीय समुच्चय हो सकता है। समष्टीय समुच्चय को सामान्यत: प्रतीक 'U' से निरुपित करते हैं।

एक विशेष प्रश्न में समुच्चय 'U' एक समष्टीय समुच्चय कहलाता है यदि उस प्रश्न के सभी समुच्चय, 'U' के उपसमुच्चय हों।

टिप्पणी:

(i) समष्टीय समुच्चय का यह अर्थ कदापि नहीं है कि इसमें विश्व की सभी वस्तुएँ सम्मिलित है।

(ii) एक समुच्चय जो एक प्रश्न के लिए समष्टीय समुच्चय है, दूसरे प्रश्न के लिए हो सकता है कि वह समष्टीय समुच्चय न हो।

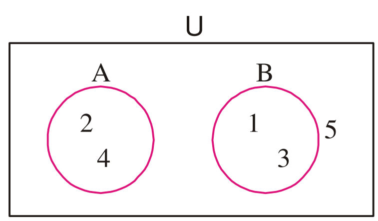
उदाहरण 1.13. निम्नलिखित में से कौन-सा समष्टीय समुच्चय है ?

$X = \{x : x$ एक वास्तविक संख्या है$\}$, $Y = \{y : y$ एक ऋणात्मक पूर्णांक है$\}$, $Z = \{z : z$ एक प्राकृत संख्या है$\}$

हल : स्पष्ट है कि दोनों समुच्चय Y और Z, X के उपसमुच्चय है। $\therefore$ X समष्टीय समुच्चय है।

1.7 वेन आरेख

आरेखों द्वारा समुच्चय के प्रदर्शन का विचार (अवधारणा) अंग्रेज गणितज्ञ जॉन वेन (John Venn) (1834–1883 A.D.) ने दिया। उसके द्वारा किसी समष्टीय समुच्चय को प्राय: एक आयत द्वारा और उसके उपसमुच्चयों को वृत्तों द्वारा प्रदर्शित करते हैं। उदाहरण के लिए यदि $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 4\}$ और $B = \{1, 3\}$, तब इन समुच्चयों को निम्नलिखित रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है:



चित्र 1.1

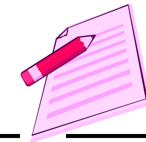
समुच्चयों का आरेखों द्वारा प्रदर्शन वेन आरेख कहलाता है।

1.8 समुच्चयों का अंतर

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{और} \quad B = \{2, 4, 6\}$$

उन अवयवों के एक नये समुच्चय, जो A में है किंतु B में नहीं है, को A अंतर B पढ़ते हैं और प्रतीकात्मक रूप में $A - B$ लिखते हैं। यहाँ $A - B = \{1, 3, 5\}$

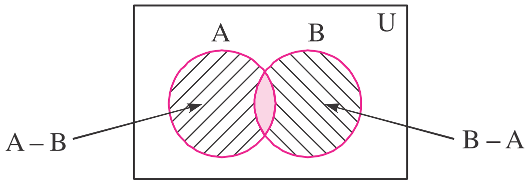


इसी प्रकार, उन अवयवों, जो B में है परन्तु A में नहीं है, का समुच्चय B अंतर A कहलाता है और इसे $B-A$ से प्रदर्शित करते हैं। यहाँ $B - A = \{6\}$

व्यापक रूप में, यदि A और B दो समुच्चय हैं तो

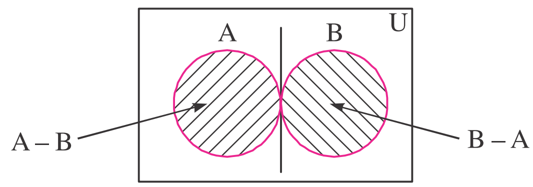
$$A-B = \{ x : x \in A \text{ और } x \notin B \} \text{ और } B-A = \{ x : x \in B \text{ और } x \notin A \}$$

दोनों समुच्चयों के अंतर को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।



When A and B are not **disjoint** sets

चित्र 1.2



When A and B are **disjoint** sets

चित्र 1.3

1.9 समुच्चय का पूरक

मान लीजिए कि X एक समष्टीय समुच्चय है और y, z इसके उपसमुच्चय है जहाँ

$X = \{x : x$ परिवार का कोई एक सदस्य है।}

$Y = \{y : y$ परिवार का एक पुरुष सदस्य है।}

$Z = \{z : z$ परिवार का एक महिला सदस्य है।}

$X - Y$ परिवार के महिला सदस्यों का एक समुच्चय है।

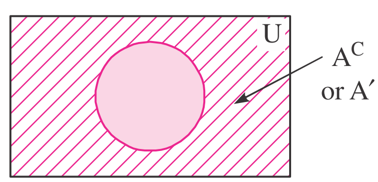
$X - Z$ परिवार के पुरुष सदस्यों का एक समुच्चय है।

$X - Y$ समुच्चय Y का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक Y' या Y^c से निरुपित किया जाता है।

$X - Z$, Z का पूरक समुच्चय कहलाता है और इसे प्रतीक Z' या Z^c से प्रदर्शित करते हैं।

यदि U एक समष्टीय समुच्चय है और A, U का एक उपसमुच्चय है तो A का पूरक समुच्चय 'U' के उन अवयवों का समुच्चय है, जो A के अवयव नहीं हैं। इसे प्रतीकात्मक रूप से A' या A^c से निरूपित करते हैं। $A' = U - A = \{x : x \in U \text{ और } x \notin A\}$

एक समुच्चय के पूरक को वेन आरेख द्वारा नीचे दिए गये तरीके से निरुपित किया जा सकता है।



चित्र 1.4

टिप्पणी:

(i) यदि दो दिए गये समुच्चयों में से कोई भी दूसरे का उपसमुच्चय न हो, तो भी उनके अन्तर को प्राप्त किया जा सकता है। परन्तु एक समुच्चय के पूरक को केवल तभी प्राप्त किया जा सकता है जबकि दिया गया समुच्चय, किसी समष्टीय समुच्चय का उपसमुच्चय हो।

(ii) $\phi^c = U$. (iii) $U^c = \phi$.

उदाहरण 1.14. दिया है कि $A = \{x : x$ एक सम प्राकृत संख्या है और $x \le 10\}$ और $B = \{y : y$ एक विषम प्राकृत संख्या है और $y \le 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A - B$ (ii) $B - C$ (iii) क्या $A - B = B - A$?

हल : यहाँ दिया गया है कि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, B = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

इसलिए

(i) $A - B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ (ii) $B - A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(iii) (i) और (ii) से स्पष्ट है कि $A - B \ne B - A$

उदाहरण 1.15. मान लीजिए कि U एक समष्टीय समुच्चय है और A एक उपसमुच्चय है जहाँ

$U = \{ x : x \in N$ और $x \le 10 \}$ तथा $A = \{y : y$ एक 10 से छोटी अभाज्य संख्या है।}

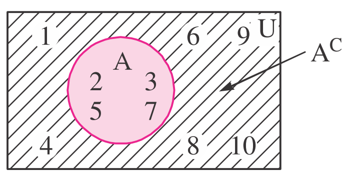
(i) A^c ज्ञात कीजिए (ii) A^c को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

हल : यहाँ दिया गया है कि

$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, A = \{ 2, 3, 5, 7\}$

(i) $A^c = U - A = \{1, 4, 6, 8, 9, 10\}$

(ii)



चित्र 1.5

1.9.1 पूरक समुच्चय के गुणधर्म

1. पूरक नियम

   (i) $A \cup A' = U$ (ii) $A \cap A' = \phi$

2. डि मोर्गन का नियम

   (i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

3. द्वि पूरक नियम $(A')' = A$

4. रिक्त समुच्चय तथा समष्टीय समुच्चय का नियम $\phi' = U$ तथा $U' = \phi$

(1) पूरक नियम का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, ... 10\}$ तथा $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

तब $A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

अब, $A \cup A' = \{1, 2, 3, 4, ..., 10\} = U$ तथा $A \cap A' = \phi$

अतः $A \cup A' = U$ तथा $A \cap A' = \phi$

(2) डि मोर्गन नियम का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ तथा $A = \{2, 4, 6, 8\}, B = \{2, 3, 5, 7\}$

अतः $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

तथा $(A \cup B)' = U - (A \cup B) = \{1, 9\}$ ...(1)

अब $A' = U - A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ तथा $B' = U - B = \{1, 4, 6, 8, 9\}$

$\therefore$ $A' \cap B' = \{1, 9\}$ ...(2)

(1) तथा (2) से $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$A \cap B = \{2\}$ $\therefore$ $(A \cap B)' = U - (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(3)

तथा $A' \cup B' = \{1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ...(4)

(3) तथा (4) से हमें प्राप्त होता है $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(3) $(A')' = A$ का सत्यापन

मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ तथा $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$

तब $A' = U - A = \{4, 6, 8, 10\}$

$\therefore$ $(A')' = U - A' = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\} = A$

इस प्रकार समष्टीय समुच्चय के उपसमुच्चय A के पूरक की परिभाषा से यह $(A')' = A$ का अनुपालन करता है।

देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. रिक्त स्थानों में उपयुक्त प्रतीक लिखिए : दिया है कि $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

(i) ϕ ....A (ii) $\{2, 3, 9\}$..........A (iii) 3............A (iv) 10..................A

2. दिया है $A = \{a, b\}, P(A)$ में कितने अवयव हैं ?

3. मान लीजिए कि $A = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ निम्नलिखित में से कौन कथन सा सत्य है तथा कौन सा कथन असत्य है ?

(i) $\{1,2\} \subset A$ (ii) $\phi \in A$.

4. निम्नलिखित में से कौन-सा कथन सत्य तथा कौन सा कथन असत्य है ?

(i) सभी बालकों का समुच्चय, आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय में निहित है।

(ii) आपके विद्यालय के सभी बाल छात्रों का समुच्चय, आपके विद्यालय के सभी विद्यार्थियों के समुच्चय में सम्मिलित है।

(iii) सभी आयतों का समुच्चय, सभी चतुर्भुजों के समुच्चय में निहित है।

(iv) उन सभी वृत्तों का समुच्चय जिनके केन्द्र मूल बिन्दु पर हैं, उन सभी दीर्घ वृत्तों के समुच्चयों में निहित है जिनके केन्द्र भी मूल बिन्दु पर हैं।

5. यदि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7\}$ ज्ञात कीजिए– (i) $A - B$ (ii) $B - A$

6. मान लीजिए N समष्टीय समुच्चय है और A, B, C, D इसके उपसमुच्चय है जहाँ–

$A = \{x : x$ सम प्राकृत संख्या है$\}$, $B = \{x : x \in N$ और x, 3 का एक गुणज है$\}$

$C = \{x : x \in N$ और $x \geq 5\}$, $D = \{x : x \in N$ और $x \leq 10\}$

A, B, C, D के पूरक ज्ञात कीजिए।

7. निम्नलिखित समुच्चयों को अन्तराल रूप में लिखिए :

   (*a*) $\{x \in \mathrm{R} : -8 < x < 3\}$ (*b*) $\{x \in \mathrm{R} : 3 \le 2x < 7\}$

8. मान लीजिए $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{2, 4, 6, 8\}$ तब निम्नांकित का सत्यापन कीजिए

   (i) $(A')' = A$ (ii) $(B')' = B$ (iii) $A \cap A' = \phi$ (iv) $(A \cup B)' = A' \cap B'$

1.10 समुच्चयों का सर्वनिष्ठ

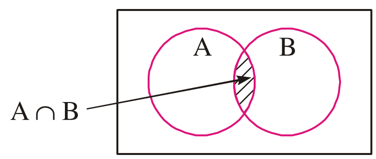
यहाँ दिए गए समुच्चयों पर विचार कीजिए– $A = \{1, 2, 3, 4\}$ और $B = \{2, 4, 6\}$

यह स्पष्ट है कि दोनों समुच्चयों A तथा B में कुछ अवयव उभयनिष्ठ हैं। समुच्चय A और B का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ हैं। प्रतीक '$\cap$' का प्रयोग सर्वनिष्ठ को निरुपित करने के लिए किया जाता है। यहाँ $A \cap B = \{2, 4\}$

यदि A और B दो समुच्चय है तब इनका सर्वनिष्ठ उन अवयवों का समुच्चय होता है जो A और B दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं इसे $A \cap B$ से निरूपित किया जाता है।

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ और } x \in B\}$$

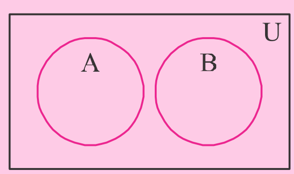
$A \cap B$ को वेन आरेख द्वारा निरुपित किया जा सकता है जैसे–



चित्र 1.6

टिप्पणी:

यदि $A \cap B = \phi$ हो, तो A तथा B असंयुक्त समुच्चय कहलाते हैं। असंयुक्त समुच्चयों को वेन आरेख द्वारा निरुपित किया जा सकता है। जैसे–



चित्र 1.7

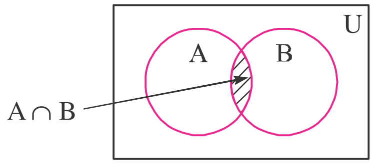
उदाहरण 1.16. दिया है

$A = \{x : x$, ताश के 52 पत्तों में एक बादशाह (king) का पत्ता है।$\}$ और $B = \{y : y$ ताश के 52 पत्तों में एक हुकुम (spade) का पत्ता है।$\}$ ज्ञात कीजिए (i) $A \cap B$ (ii) $A \cap B$ को वेन आरेख से प्रदर्शित कीजिए।

हल : (i) क्योंकि ताश के 52 पत्तों में केवल चार किंग (बादशाह) होते हैं इसलिए समुच्चय A में केवल चार अवयव हैं।

समुच्चय B में 13 अवयव हैं, क्योंकि हुकुम के 13 पत्ते होते हैं परन्तु 13 हुकुम के पत्तों में एक पत्ता बादशाह होता है। इसलिए A तथा B में एक अवयव उभयनिष्ठ है।

$\therefore$ $A \cap B = \{$हुकुम का बादशाह$\}$

(ii) 

चित्र 1.8

1.11 समुच्चयों का सम्मिलन

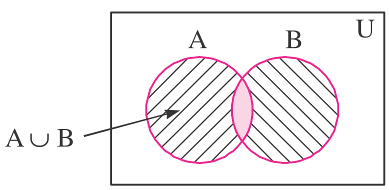
निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार कीजिए :

(i) A भारतीय पुरुष क्रिकेट टीम के खिलाड़ियों का समुच्चय है और B भारतीय महिला क्रिकेट टीम के खिलाड़ियों का समुच्चय है। स्पष्ट है कि A और B असंयुक्त समुच्चय है। दो समुच्चयों A और B का सम्मिलन समुच्चय, वह समुच्चय है जिसमें दोनों टीमों के सभी खिलाड़ी हों और इसे प्रतीकात्मक रूप में $A \cup B$ प्रदर्शित करते हैं।

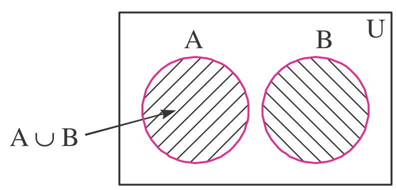
(ii) यदि D आपके विद्यालय की क्रिकेट टीम के सभी खिलाड़ियों का एक समुच्चय है और E हॉकी टीम के सभी खिलाड़ियों का समुच्चय है; साथ ही मान लीजिए कि तीन खिलाड़ी दोनों टीमों में सम्मिलित हैं तब D और E का सम्मिलन समुच्चय वह समुच्चय है जिसमें दोनों टीमों के सभी खिलाड़ी हों परन्तु तीन उभयनिष्ठ खिलाड़ियों को केवल एक बार गिना जाएगा। यदि A और B केवल दो समुच्चय हों तब A और B का सम्मिलन समुच्चय उन अवयवों का समुच्चय है जो A या B से सम्बन्धित हों।

समुच्चय निर्माण रूप में $A \cup B = \{x : x \in A$ या $x \in B\}$ अथवा $A \cup B = \{x : x \in A - B$ या $x \in B - A$ या $x \in A \cap B\}$

$A \cup B$ को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जैसे–



चित्र 1.9



चित्र 1.10

$$n(A \cup B) = n(A - B) + n(B - A) + n(A \cap B).$$

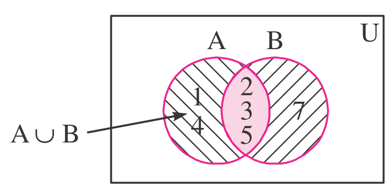
अथवा $$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

जहाँ $n(A \cup B)$ समुच्चय $A \cup B$ के अवयवों की संख्या को दर्शाता है।

उदाहरण 1.17. $A = \{x : x \in Z^+$ और $x \leq 5\}$

$B = \{y : y$, 10 से छोटी अभाज्य संख्या है$\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A \cup B$ (ii) $A \cup B$ को वेन आरेख की सहायता से प्रदर्शित कीजिए।



चित्र 1.11

हल : $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B = \{2, 3, 5, 7\}$.

$\therefore$ $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$.

देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. निम्नलिखित समुच्चय युग्मों में से कौन से युग्म असंयुक्त है और कौन से नहीं ?

(i) {x : x एक सम प्राकृत संख्या है।}, {y : y एक विषम प्राकृत संख्या है।}

(ii) { x : x एक अभाज्य संख्या है और 12 की भाजक है।} $\{y : y \in N$ और $3 \le y \le 5\}$

(iii) {x : x ताश के 52 पत्तों में बादशाह है।} {y : y ताश के 52 पत्तों में एक ईंट का पत्ता है।}

(iv) {1, 2, 3, 4, 5}, {a, e, i, o, u}

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के लिए A तथा B का सर्वनिष्ठ ज्ञात कीजिए :

(i) $A = \{ x : x \in Z \}, B = \{ x : x \in N \}$ (ii) A = { राम, रहीम, गोविन्द, गौतम }
B = { सीता, मीरा, फातिमा, मनप्रीत}

3. दिया है कि $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A \cup B$ (ii) $A \cap B$

4. यदि $A = \{x : x \in N\}$, B={ $y : y \in z$ और $-10 \le y \le 0$ } हो, तो $A \cup B$ ज्ञात कीजिए और अपने उत्तर को रोस्टर रूप में तथा समुच्चय निर्माण रूप में लिखिए।

5. यदि $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{8, 10, 12, 14\}$ तथा $C = \{14, 16, 18, 20\}$ हो, तो

ज्ञात कीजिए : (i) $A \cup (B \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cap C)$

6. मान लीजिए कि $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$, $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$

ज्ञात कीजिए (i) $(A \cup B)'$ (ii) $(A \cap B)'$ (iii) $(B')'$ (iv) $(B - A)'$

7. निम्नलिखित में प्रत्येक को वेन आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

(i) $A \cap B$ जब $B \subset A$ (ii) $A \cap B$ जब A और B असंयुक्त समुच्चय हो।

(iii) $A \cap B$ जब A और B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हों और न ही असंयुक्त समुच्चय हो।

8. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए वेन आरेख खींचिए–

(i) $A \cup B$ जब $A \subset B$ (ii) $A \cup B$ जबकि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $A \cup B$ जब A और B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हैं और न ही असंयुक्त समुच्चय।

9. निम्नलिखित में प्रत्येक के लिए वेन आरेख खींचिए–

(i) $A - B$ और $B - A$ जबकि $A \subset B$

(ii) $A - B$ और $B - A$ जबकि A और B असंयुक्त समुच्चय हैं।

(iii) $A - B$ और $B - A$ जबकि A तथा B न तो एक दूसरे के उपसमुच्चय हैं और न ही असंयुक्त समुच्चय।

आइये दोहराएँ

- समुच्चय सुपरिभाषित वस्तुओं का समूह है।
- एक समुच्चय को रोस्टर रूप में निरूपित करने के लिए सभी अवयवों को अलग-अलग लिखते हैं परन्तु समुच्चय निर्माण में सभी अवयवों में एक सर्वनिष्ठ गुण होता है।

- एक समुच्चय जिसके अवयवों की संख्या को गिना जा सके, परिमित समुच्चय कहलाता है और यदि अवयवों की संख्या को अन्त तक गिनना संभव न हो, तो वह अपरिमित कहलाता है।
- यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का भी एक अवयव हो तो A, B का उपसमुच्चय कहलाता है।
- दो समुच्चयों A तथा B के लिए, $A - B$ उन अवयवों का समुच्चय है जो A में है परन्तु B में नहीं।
- समुच्चय A का पूरक, उन अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टीय समुच्चय में होते हैं परन्तु A में नहीं होते हैं, अर्थात $A^c = U - A$
- दो समुच्चयों का सर्वनिष्ठ उन सभी अवयवों का समुच्चय होता है जो दोनों में उभयनिष्ठ होते हैं।
- दो समुच्चयों का सम्मिलन वह समुच्चय होता है, जिसमें दोनों ही समुच्चयों के अवयव हों।
- कोई समुच्चय A समुच्चय B का उपसमुच्चय कहलाता है यदि A का प्रत्येक अवयव B में विद्यमान हो।
- रिक्त समुच्चय, प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।
- प्रत्येक समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय है।
- यदि और केवल यदि $A \subset B$ तथा $A \neq B$ है, तो समुच्चय A समुच्चय B का उचित उपसमुच्चय है।
- दिये गये समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को समुच्चय A का धात समुच्चय कहते हैं।
- दो समुच्चय A तथा B समान होते हैं केवल यदि $A \subset B$ तथा $B \subset A$.
- यदि $n(A) = p$, तब A के उपसमुच्चयों की संख्या $= (2)^p$ है।
- (a, b), $[a, b]$, $(a, b]$ तथा $[a, b)$ परिमित अन्तराल हैं उनकी लम्बाई $b - a$ वास्तविक एवं परिमित है।
- समुच्चय A का पूरक, U के सापेक्ष A' द्वारा दर्शाया जाता है तथा $A' = \{x : x \in U$ तथा $x \notin A\}$ द्वारा परिभाषित किया जाता है।
- $A' = U - A$
- यदि $A \subset U$ तब $A' \subset U$
- U के सापेक्ष समुच्चय A के पूरक होने के गुण
    - $A \cup A' = U$ तथा $A \cap A' = \phi$
    - $(A \cup B)' = A' \cap B'$ तथा $(A \cap B)' = A' \cup B'$
    - $(A')' = A$
    - $\phi' = U$ तथा $U' = \phi$

सहायक वेबसाईट

- *http://www.mathresource.iitb.ac.in/project/indexproject.html*
- *http://mathworld.wolfram.com/SetTheory.html*
- *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य तथा कौन से असत्य है :

(i) $\{1,2,3\}=\{1,\{2\},3\}$. (ii) $\{1,2,3\}=\{3,1,2\}$.

(iii) $\{a,e,o\}=\{a,b,c\}$. (iv) $\{\phi\}=\{\ \}$

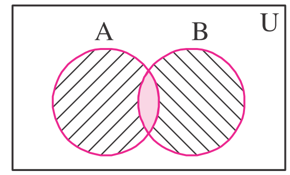
2. दर्शाए गए छायांकित भाग को रोस्टर रूप में लिखिए :

(i) $A=\{1,2,3,4,5\}$

$B=\{5,6,7,8,9\}$

(ii) $A=\{1,2,3,4,5,6\}$

$B=\{2,6,8,10,12\}$



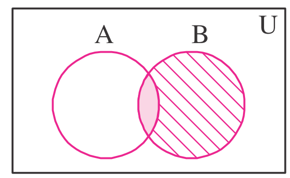
चित्र 1.12

3. वेन आरेख की सहायता से निम्नलिखित को प्रदर्शित कीजिए :

(i) $(A\cup B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय न हों।

(ii) $(A\cap B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय हों।

(iii) $(A-B)'$, यदि A तथा B असंयुक्त समुच्चय न हों।



चित्र 1.13

4. मान लीजिए कि $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A=\{2,4,6,8\}$, $B=\{1,3,5,7\}$। जाँच कीजिए :

(i) $(A\cup B)'=A'\cap B'$ (ii) $(A\cap B)'=A'\cup B'$

(iii) $(A-B)\cup(B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$.

5. मान लीजिए कि $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$,

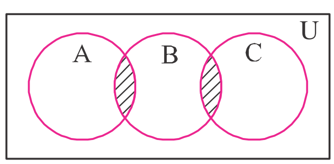
$A=\{1,3,5,7,9\}$. $B=\{2,4,6,8,10\}$, $C=\{1,2,3\}$.

ज्ञात कीजिए (i) $A'\cap(B-C)$. (ii) $A\cup(B\cup C)$

(iii) $A'\cap(B\cup C)'$ (iv) $(A\cap B)'\cup C'$

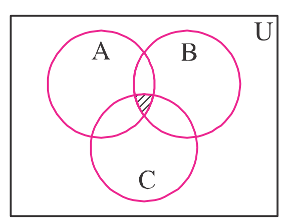
6. नीचे दिए गए वेन आरेखों के छायांकित भाग क्या दर्शाते हैं।

(i)



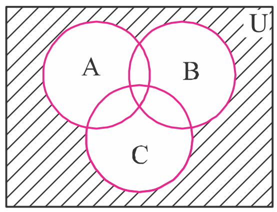
चित्र 1.14

(ii)



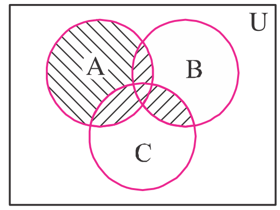
चित्र 1.15

(iii)



चित्र 1.16

(iv)



चित्र 1.17

7. निम्नलिखित के लिए वेन आरेख खींचिए :

(i) $A' \cap (B \cup C)$ (ii) $A' \cap (C - B)$

जहाँ A, B, C असंयुक्त समुच्चय नहीं है और समष्टीय समुच्चय U के उपसमुच्चय हैं।

8. डिमोर्गन नियम का सत्यापन कीजिए यदि $U = \{x : x \in N$ तथा $x \leq 10\}$

$A = \{x : x \in U$ तथा x एक अभाज्य संख्या है$\}$ तथा

$B = \{x : x \in U$ तथा x, 24 का एक गुणनखण्ड है $\}$

9. परीक्षण कीजिए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य

(*a*) $\{a, e\} \subset \{x : x$ अंग्रेजी वर्णमाला का एक स्वर है] (*b*) $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 3, 5\}$

(*c*) $\{a, b, c\} \subset \{a, b, c\}$ (*d*) $\phi \subset \{1, 3, 5\}$

10. नीचे लिखे समुच्चयों के सभी उपसमुच्चय लिखिए :

(*a*) $\{a\}$ (*b*) $\{1, 2, 3\}$ (*c*) ϕ

11. निम्नलिखित को अन्तराल के रूप में लिखिए :

(*a*) $\{x : x \in R, -4 < x \leq 6\}$ (*b*) $\{x : x \in R, -12 < x < -10\}$

(*c*) $\{x : x \in R, 0 \leq x < 7\}$ (*d*) $\{x : x \in R, 3 \leq x \leq 4\}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 1.1

1. (i), (ii), (iii) are sets.

2. (i)$\in$ (ii) $\notin$

3. (i) $A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0$ & $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\ldots, 10\}$

(ii) $B = \{-1, 1\}$, (iii) $C = \{a, b, n\}$ (iv) $D = \{2, 3, 5\}$.

4. (i) A = {x : x एक 10 के बराबर अथवा उससे छोटी सम प्राकृत संख्या है}

(ii) $B = \{x : x \in N$ और x 3 का गुणज है$\}$

(iii) C = {x : x 10 से छोटी अभाज्य संख्या है।

(iv) $D = \{x : x \in R$ तथा x, $x^2 - 2 = 0$ का हल है।

5. (i) अपरिमित (ii) परिमित (iii) परिमित (iv) अपरिमित

6. (i) रिक्त (ii) एकल (iii) रिक्त (iv) रिक्त

7. (i) $A \approx B$ (ii) $A \approx B$ (iii) $A = B$.

देखें आपने कितना सीखा 1.2

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\in$ (iv) $\notin$

2. 4

3. (i) असत्य (ii) सत्य

4. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

5. (i) $\{1, 2, 3, 4\}$ (ii) $\{6, 7\}$.

6. $A^c = \{x : x$ एक विषम संख्या है$\}$

$B^c = \{x : x \in N$ और x 3 का गुणज नहीं है$\}$

$C^c = \{1, 2, 3, 4\}$, $D^c = \{11, 12, 13, ...\}$

7. (a) $(-8, 3)$ (b) $\left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 1.3

1. (i) असंयुक्त (ii) असंयुक्त नहीं है (iii) असंयुक्त नहीं है (iv) असंयुक्त

2. (i) $\{x : x \in N\}$ (ii) ϕ

3. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (ii) $\{5\}$

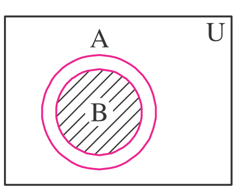
4. रोस्टर रूप $\{-10, -9, -8, ...0, 1, 2, 3, ...\}$

समुच्चय निर्माण रूप $\{x : x \in Z$ और $-10 \le x \le \infty\}$

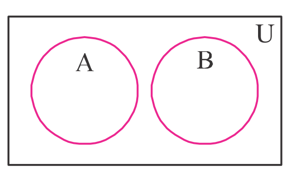
5. (i) $\{x : x$ एक 20 से छोटी अथवा उसके बराबर सम संख्या है। (ii) ϕ

6. (i) ϕ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

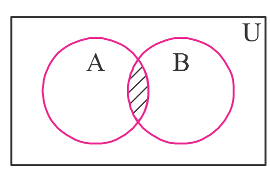
(iii) $\{1, 3, 5, 7, 9, 10\}$ (iv) $\{2, 4, 6, 8, 10\}$

7. (i)


चित्र 1.18

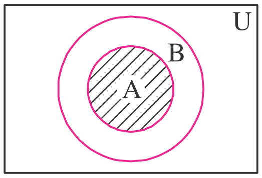
(ii)


चित्र 1.19

(iii)


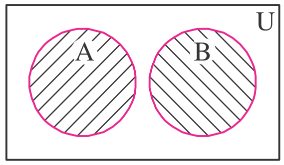
चित्र 1.20

8. (i)



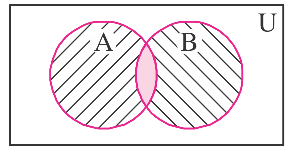
चित्र 1.21

(ii)



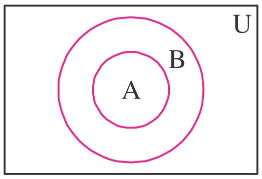
चित्र 1.22

(iii)

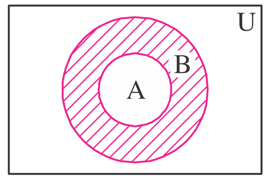


चित्र 1.23

9. (i)



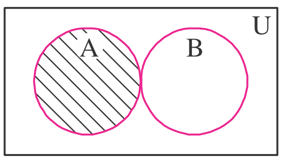
$A - B = \phi$



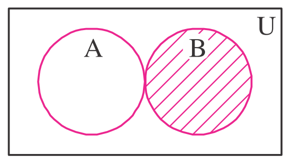
$B - A =$ छायांकित भाग

चित्र 1.24

(ii)



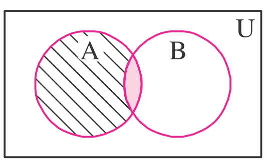
$A - B = A$



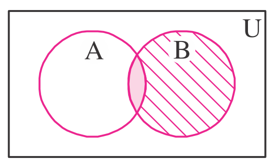
$B - A = B$

चित्र 1.25

(iii)



$A - B =$ छायांकित भाग



$B - A =$ छायांकित भाग

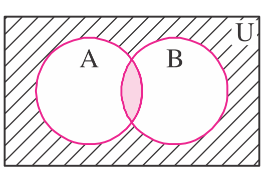
चित्र 1.26

आइए अभ्यास करें

1. (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (i) $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{8, 10, 12\}$

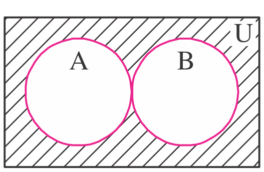
3. (i)



चित्र 1.27

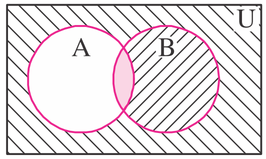
$(A \cup B)' =$ छायांकित भाग

(ii)



चित्र 1.28

$(A \cap B)' =$ छायांकित भाग

(iii) 

$(A - B)' =$ छायांकित भाग

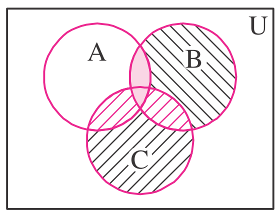
चित्र 1.29

5. (i) $\{4, 6, 8, 10\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. (iii) ϕ

(iv) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

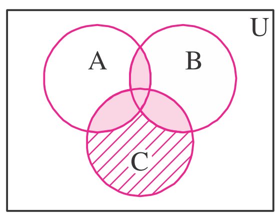
6. (i) $(A \cap B) \cap (B \cap C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C$

(iii) $[(A \cup B) \cup C]'$ (iv) $A \cup (B \cap C)$.

7. (i) 

$A' \cap (B \cup C) =$ छायांकित भाग

चित्र 1.30

(ii) 

$A' \cap (C - B) =$ छायांकित भाग

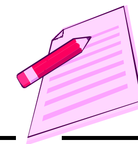
चित्र 1.31

9. (*a*) सत्य (*b*) असत्य (*c*) सत्य (*d*) सत्य

10. (*a*) ϕ, $\{a\}$ (*b*) ϕ, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$

(c) ϕ

11. (*a*) $(-4, 6]$ (*b*) $(-12, -10)$ (*c*) $[0, 7)$ (*d*) $[3, 4]$



2

संबंध एवं फलन–I

हमारे दैनिक जीवन में हमें विभिन्न प्रकार के संबंध देखने को मिलते हैं जैसे भाई और बहन, पिता और पुत्री, अध्यापक और विद्यार्थी इत्यादि। गणित में भी हमें बहुत से संबंध मिलते हैं जैसे संख्या m संख्या n से बड़ी है, रेखा l, रेखा m पर लम्बवत् है इत्यादि। संबंध की अवधारणा को गणितीय रूप में स्थापित किया जा चुका है। शब्द ''फलन (function)" को लीबनीज (Leibnitz) ने 1694 में परिचित कराया। फलन को एक विशेष प्रकार के संबंध के रूप में परिभाषित किया गया है। प्रस्तुत पाठ में हम समुच्चयों के कार्तिय गुणन, दो समुच्चयों के बीच संबंध, एक संबंध का फलन होने की स्थितियां, विभिन्न प्रकार के फलन और उनके गुणों की चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

- दो समुच्चयों के कार्तीय गुणन को परिभाषित करना।
- संबंध तथा फलन को परिभषित करना तथा उदाहरण देना।
- फलन का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात करना।
- फलनों के आरेख खींचना।
- सम तथा विषम फलनों के उदाहरण देकर उन्हें परिभाषित करना।
- यह बताना कि फलन विषम है, सम है या इनमें से कोई नहीं।
- फलनों के उदाहरण जैसे $|X|$, $[X]$ फलन, बहुपद फलन, लघु गणकीय फलन और तथा चर घातांकी (exponential) फलन, बताकर उन्हें परिभाषित करना।
- वास्तविक फलनों का योग, घटा, गुणा एवं भागफल ज्ञात करना।

पूर्व ज्ञान

- क्रमित युग्म की अवधारणा

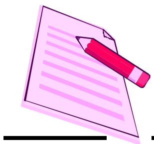
2.1 दो समुच्चयों का कार्तीय गुणन

दो समुच्चयों A तथा B पर विचार कीजिए जहाँ $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4, 5\}$.

A और B के सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय $\{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$ है।

इस समुच्चय को $A \times B$ द्वारा निरुपित किया जाता है तथा यह समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन कहलाता है। अर्थात $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$

समुच्चयों B तथा A के कार्तीय गुणन को $B \times A$ से निरुपित करते हैं। ऊपर दिए गए उदाहरण में



$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\}$ स्पष्टत: $A \times B \neq B \times A$

समुच्चय निर्माण रूप में

$A \times B = \{(a,b) : a \in A$ और $b \in B\}$, $B \times A = \{(b,a) : b \in B$ और $a \in A\}$

टिप्पणी:

यदि $A = \phi$ या $B = \phi$ या $A, B = \phi$ तब $A \times B = B \times A = \phi$

उदाहरण 2.1. मान लीजिए कि $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$, $C = \{a, d\}$

ज्ञात कीजिए (i) $A \times B$ (ii) $B \times A$ (iii) $A \times (B \cup C)$ (iv) $(A \cap C) \times B$

(v) $(A \cap B) \times C$ (vi) $A \times (B - C)$.

हल : (i) $A \times B = \{(a, d), (a, e), (b, d), (b, e), (c, d), (c, e)\}$.

(ii) $B \times A = \{(d, a), (d, b), (d, c), (e, a)\ (e, b), (e, c)\}$.

(iii) $A = \{a, b, c\}$, $B \cup C = \{a, d, e\}$.

$\therefore$ $A \times (B \cup C) = \{(a, a), (a, d), (a, e), (b, a), (b, d), (b, e), (c, a), (c, d), (c, e)\}$.

(iv) $A \cap C = \{a\}$, $B = \{d, e\}$ $\therefore$ $(A \cap C) \times B = \{(a, d), (a, e)\}$

(v) $A \cap B = \phi$, $c = \{a, d\}$, $\therefore$ $(A \cap B) \times c = \phi$

(vi) $A = \{a, b, c\}$, $B - C = \{e\}$ $\therefore$ $A \times (B - C) = \{(a, e), (b, e), (c, e)\}$.

2.1.1 दो परिमित समुच्चयों के कार्तीय गुणन में अवयवों की संख्या

मान लीजिए A तथा B दो समुच्चय हैं जो रिक्त नहीं हैं। हम जानते हैं कि $A \times B = \{(a, b); a \in A$ तथा $b \in B\}$ तब दो परिमित समुच्चयों A तथा B के कार्तीय गुणन में अवयवों की संख्या अर्थात् $n(A \times B) = n(A).\ n(B)$

उदाहरण 2.2. माना कि $A = \{1, 2, 3\}$ तथा $B = \{x, y\}$ है, दर्शाइए कि $n(A \times B) = n(A).\ n(B)$

हल : यहाँ

$$n(A) = 3,\ n(B) = 2$$

$$\therefore \quad A \times B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (1, y), (2, y), (3, y)\}$$

$$n(A \times B) = n(A) . n(B)$$

$$6 = 3 \times 2$$

$$6 = 6$$

उदाहरण 2.3. यदि $n(A) = 5$, $n(B) = 4$, $n(A \times B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $n(A \times B) = n(A) \times n(B)$, $n(A \times B) = 5 \times 4 = 20$

2.1.2 वास्तविक संख्याओं R का स्वयं से $R \times R \times R$ तक कार्तीय गुणन

क्रमित त्रिक $A \times A \times A = \{(a, b, c) : a, b, c \in A\}$ (a, b, c) क्रमित त्रिक कहलाता है। कार्तीय गुणन $R \times R$ समुच्चय $R \times R = \{(x, y) : x, y \in R\}$ को निरूपित करता है जो द्विविम समतल में सभी बिन्दुओं के निर्देशांकों को निरूपित करते हैं तथा कार्तीय गुणन $R \times R \times R$ समुच्चय $R \times R \times R = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$ जो त्रिविम अन्तरिक्ष में सभी बिन्दुओं के निर्देशांकों को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 2.4. यदि $A = \{1, 2\}$ है, तो समुच्चय $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

हल :

$$A \times A \times A = \{(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2)$$
$$(2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)\}$$

2.2 संबंध

निम्नलिखित समुच्चयों पर विचार कीजिए :

$A = \{$ मोहन, सोहन, डेविड, करीम$\}$ तथा $B = \{$ रीटा, मैरी, फातिमा$\}$

मान लीजिए मोहन और सोहन, रीटा के दो भाई है, डेविड, मैरी का भाई है और करीम, फातिमा का भाई है। यदि हम A और B के अवयवों के बीच एक संबंध R "भाई है" को परिभाषित करें तो स्पष्ट है कि मोहन R रीटा, सोहन R रीटा, डेविड R मैरी, करीम R फातिमा। दो नामों के बीच से R को हटाने पर इन्हें क्रमित युग्मों के रूप में इस प्रकार से लिखा जा सकता है जैसे–(मोहन, रीटा), (सोहन, रीटा), (डेविड, मैरी), (करीम, फातिमा)

ऊपर दी गई सूचना को हम समुच्चय R के क्रमित युग्मों के रूप में भी लिख सकते हैं, जैसे–

$R = \{$ (मोहन, रीटा), (सोहन, रीटा), (डेविड, मैरी), (करीम, फातिमा)$\}$

स्पष्टत: $R \subseteq A \times B$ अर्थात $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ तथा $aRb\}$

यदि A और B दो समुच्चय हैं तब A से B का संबंध R, $A \times B$ का एक उपसमुच्चय है।

यदि (i) $R = \phi$, R एक रिक्त संबंध कहलाता है।

(ii) $R = A \times B$, R एक समष्टीय संबंध कहलाता है।

(iii) यदि R, A से A का संबंध है , तो यह A पर संबंध को परिभाषित करता है।

(iv) $R = \{(a, a) \forall a \in A\}$, तत्समक फलन कहलाता है।

2.2.1 संबंध के प्रान्त तथा परिसर

दो समुच्चयों में संबंध R के क्रमित युग्मों के सभी प्रथम अवयवों के समुच्चय को संबंध R का प्रान्त कहते हैं और द्वितीय अवयवों के समुच्चय को संबंध R का परिसर कहते हैं।

ऊपर दिए गए उदाहरण में प्रान्त = {मोहन, सोहन, डेविड, करीम}, परिसर = {रीटा, मैरी, फातिमा}

उदाहरण 2.5. दिया है : $A = \{2, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{2, 3\}$

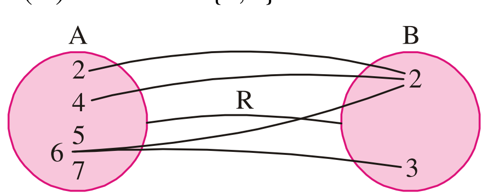
A और B के बीच संबंध को R से इस प्रकार दर्शाया गया है कि $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ और a, b का गुणज है$\}$

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर (iv) R का आरेख द्वारा प्रदर्शन

हल : (i) $R = \{(2, 2), (4, 2), (6, 2), (6, 3)\}$

(ii) प्रान्त $= \{2, 4, 6\}$ (iii) परिसर $= \{2, 3\}$

(iv)



चित्र 2.1

उदाहरण 2.6. यदि R, A का B से एक संबंध "से बड़ा है" से दर्शाया जाए,

जहाँ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ और $B = \{1, 2, 6\}$, तो

ज्ञात कीजिए (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

हल : (i) $R = \{(2, 1)\ (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 2)\}$

(ii) प्रान्त $= \{2, 3, 4, 5\}$ (iii) परिसर $= \{1, 2\}$

2.2.2 सम्बन्ध का सहप्रांत

यदि R, A से B में एक सम्बन्ध है तब B, सम्बन्ध R का सहप्रान्त कहलाता है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए $A = \{1, 3, 4, 5, 7\}$ और $B = \{2, 4, 6, 8\}$ है एवं R, A से B तक, 'से एक कम' का सम्बन्ध, तब $R = \{(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)\}$

इसलिए R का सहप्रांत $= \{2, 4, 6, 8\}$

उदाहरण 2.7. मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है तो A से A में $R = \{(x, y) : y = x + 1\}$ द्वारा एक सम्बन्ध परिभाषित कीजिए तथा R के प्रांत, परिसर एवं सहप्रांत लिखिए।

हल : $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6)\}$

R का प्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

R का परिसर $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$ तथा R का सहप्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

देखें आपने कितना सीखा 2.1

1. यदि $A = \{4, 5, 6, 7\}$, $B = \{8, 9\}$, $C = \{10\}$

सत्यापित कीजिए कि $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

2. यदि U एक समष्टीय समुच्चय और A तथा B इसके उपसमुच्चय हों जहाँ $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{x : x$ एक अभाज्य संख्या है।$\}$, तो $A' \times B'$ ज्ञात कीजिए।

3. यदि $A = \{4, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ तथा R समुच्चय A का B से संबंध दर्शाता है जहाँ $R = \{(a, b) : a \in A, b \in B$ और b, a का गुणज है$\}$

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

4. $R = \{(x,y) : 4x + y = 12,\ x, y \in N\}$ द्वारा परिभाषित N का N से, एक संबध है। ज्ञात कीजिए (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

5. यदि R, N पर परिभाषित एक संबंध है जहां $R = \{(x, x^2) : x$ 15 से छोटी अभाज्य संख्या है$\}$, तो ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

6. यदि R वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर संबंध है और $R = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 0\}$ से परिभाषित किया गया है, तो

ज्ञात कीजिए : (i) R को रोस्टर रूप में (ii) R का प्रान्त (iii) R का परिसर

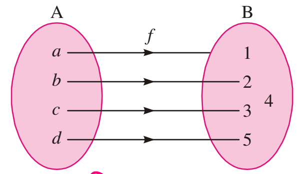
7. यदि $(x + 1, y - 2) = (3, 1)$ है, तो x तथा y के मान ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A = \{-1, 1\}$ है, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

9. यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ है, तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

10. यदि $n(A) = 6$ तथा $n(B) = 3$ है, तब $n(A \times B)$ ज्ञात कीजिए।

2.3 फलन की परिभाषा



चित्र 2.2

समुच्चयों A = {a, b, c, d} तथा B = {1, 2, 3, 4} पर परिभाषित

सम्बन्ध f : {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 5)} पर विचार कीजिए। इस सम्बन्ध में आप देखतें हैं कि A के प्रत्येक अवयव का B में एक अद्वितीय प्रतिबिम्ब है। यह सम्बन्ध f समुच्चय A का B से है जहां A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बन्धित होता है, A से B पर फलन कहलाता है। हम देखते हैं कि फलन में किन्हीं दो क्रमित युग्मों का पहला अवयव समान नहीं होता।

हम यह भी देखते हैं कि B में एक ऐसा अवयव 4 है, जिसका A में कोई भी पूर्व प्रतिबिम्ब नहीं है। इस प्रकार यहां:

(i) समुच्चय B को सहप्रान्त कहते हैं। (ii) समुच्चय $\{1, 2, 3, 5\}$ को परिसर कहते हैं।

उपर्युक्त से हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते है कि परिसर, सहप्रान्त का उपसमुच्चय होता है। प्रतीक रूप में यह फलन इस प्रकार भी लिखा जा सकता है। $f : A \to B$ या $A \xrightarrow{f} B$

2.3.1 वास्तविक चर के वास्तविक मान फलन

एक ऐसे फलन को जिसका परिसर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय या उसका कोई उपसमुच्चय हो, वास्तविक मान फलन कहते हैं। यदि वास्तविक चर वाले किसी वास्तविक मान फलन का प्रांत भी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय अथवा उसका कोई उपसमुच्चय हो तो इसे वास्तविक फलन कहते हैं।

मान लीजिए कि R सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है तथा X एवं Y, R के दो (रिक्त नहीं) उपसमुच्चय हैं, तब नियम 'f' जो कि प्रत्येक $x \in X$ से Y के एक अद्वितीय y का संबंध जोड़ता है, वास्तविक चर का वास्तविक मान फलन या एक साधारण वास्तविक फलन कहलाता है तथा इसे हम $f : X \to Y$ लिखते हैं।

एक वास्तविक फलन 'f' एक ऐसा नियम है जिसमें प्रत्येक सम्भव वास्तविक संख्या x, एक अद्वितीय वास्तविक संख्या $f(x)$ से सम्बन्धित है।

उदाहरण 2.8. निम्नलिखित में से कौन-कौन से A से B पर फलन हैं। उनके प्रान्त तथा परिसर लिखिए। यदि वह फलन न हो तो कारण बताइए।

(a) $\{(1,-2), (3,7), (4,-6), (8,1)\}$, $A = \{1, 3, 4, 8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 1, 2\}$

(b) $\{(1,0), (1-1), (2,3), (4,10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a,b), (b,c), (c,b), (d,c)\}$, $A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{b, c\}$

(d) $\{(2,4), (3,9), (4,16), (5,25), (6,36)\}$, $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{4, 9, 16, 25, 36\}$

(e) $\{(1,-1), (2,-2), (3,-3), (4,-4), (5,-5)\}$, $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) $\left\{\left(\sin\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2}\right), \left(\cos\frac{\pi}{6}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\tan\frac{\pi}{6}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \left(\cot\frac{\pi}{6}, \sqrt{3}\right)\right\},$

$$A = \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\} \quad B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}, 1\right\}$$

(g) $\{(a, b), (a, 2), (b, 3), (b, 4)\}$, $A = \{a, b\}, B = \{b, 2, 3, 4\}$

हल : (a) यह फलन है। प्रान्त $= \{1, 3, 4, 8\}$, परिसर $= \{-2, 7, -6, 1\}$

(b) यह फलन नहीं है क्योंकि प्रथम दो क्रमित युग्मों के पहले अवयव समान हैं।

(c) यह फलन नहीं है। प्रान्त $= \{a, b, c, d\} \neq A$, परिसर $= \{b, c\}$

(d) यह फलन है। प्रान्त $= \{2, 3, 4, 5, 6\}$, परिसर $= \{4, 9, 16, 25, 36\}$

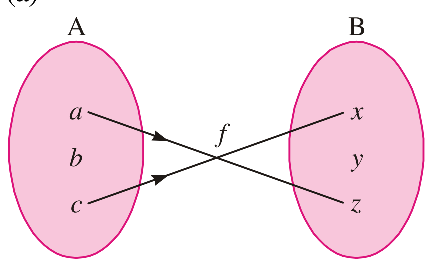
(e) यह फलन नहीं है। प्रान्त $= \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq A$, परिसर $= \{-1, -2, -3, -4, -5\}$

(f) यह फलन है। प्रान्त $= \left\{\sin\frac{\pi}{6}, \cos\frac{\pi}{6}, \tan\frac{\pi}{6}, \cot\frac{\pi}{6}\right\}$, परिसर $= \left\{\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3}\right\}$

(g) यह फलन नहीं है क्योंकि प्रथम दो क्रमित युग्मों के पहले अवयव तथा अन्तिम दो क्रमित युग्मों के भी पहले अवयव समान है।

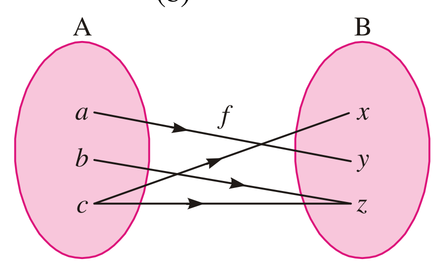
उदाहरण 2.9. बताइए कि निम्नलिखित सम्बन्ध फलन हैं अथवा नहीं।

(a)



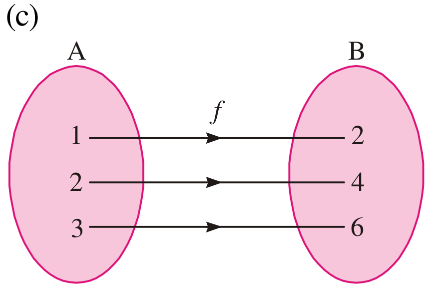
चित्र 2.3

(b)



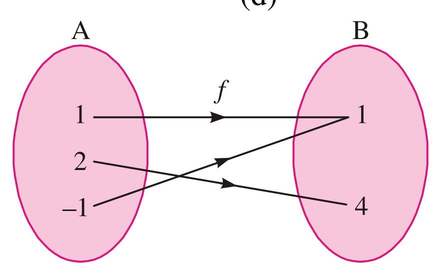
चित्र 2.4

(c)



चित्र 2.5

(d)



चित्र 2.6

हल–

(a) 'f' फलन नहीं है, क्योंकि A के अवयव 'b' का B में प्रतिबिम्ब नहीं है।

(b) 'f' फलन नहीं है क्योंकि A के अवयव c का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब नहीं है।

(c) 'f' एक फलन है क्योंकि A के प्रत्येक अवयव का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब है।

(d) 'f' एक फलन है क्योंकि A के प्रत्येक अवयव का B में अद्वितीय प्रतिबिम्ब है।

उदाहरण 2.10. निम्नलिखित सम्बन्ध जो कि $R \to R$ है में से कौन-कौन से फलन हैं।

(a) $y = 3x + 2$ (b) $y < x + 3$ (c) $y = 2x^2 + 1$

हल– (a) $y = 3x + 2$ यहाँ प्रत्येक अवयव $x \in R$ के संगत एक अद्वितीय अवयव $y \in R$ है।

$\therefore$ यह फलन है।

(b) $y < x + 3$ x के किसी भी मान के लिए हमें y के एक से अधिक मान प्राप्त होते हैं।

$\therefore$ यह एक फलन नहीं है।

(c) $y = 2x^2 + 1$ x के किसी भी वास्तविक मान के लिए हमें y का एक अद्वितीय मान प्राप्त होता है।

$\therefore$ यह एक फलन है।

उदाहरण 2.11. मान लीजिए कि N प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है। $f : N \to N$, $f(x) = 2x + 1$ द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन है। इस परिभाषा का प्रयोग करके $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = 2x + 1$, $f(1) = 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = 3$, $f(2) = 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = 5$,
$f(3) = 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = 7$, $f(4) = 2 \times 4 + 1 = 8 + 1 = 9$

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. निम्नलिखित में कौन से सम्बन्ध A से B पर फलन है?

(a) $\{(1,-2), (3,7), (4,-6), (8,11)\}$, $A = \{1,3,4,8\}$, $B = \{-2, 7, -6, 11\}$

(b) $\{(1,0), (1,-1), (2,3), (4,10)\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 0, -1, 3, 10\}$

(c) $\{(a,2), (b,3), (c,2), (d,3)\}$, $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{2, 3\}$

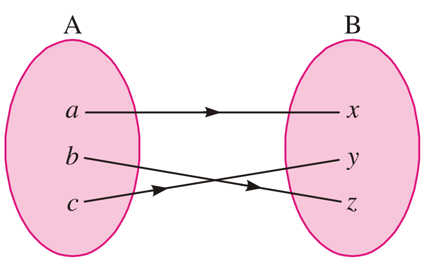
(d) $\{(1,1), (1,2), (2,3), (-3,4)\}$, $A = \{1, 2, -3\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$

(e) $\left\{\left(2, \frac{1}{2}\right), \left(3, \frac{1}{3}\right), \ldots, \left(10, \frac{1}{10}\right)\right\}$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{11}\right\}$

(f) $\{(1,1), (-1,1), (2,4), (-2,4)\}$, $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$, $B = \{1, 4\}$

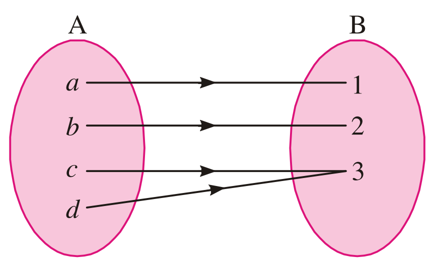
2. निम्नलिखित में कौन-कौन से सम्बन्ध फलन को दर्शाते हैं ?

(a)



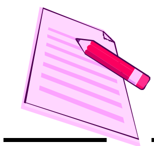
चित्र 2.7

(b)

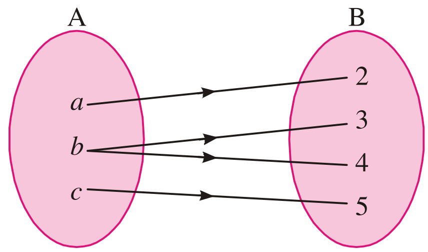


चित्र 2.8

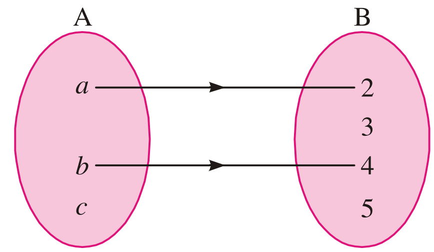
(c) (d)



टिप्पणी



चित्र 2.9



चित्र 2.10

3. निम्नलिखित संबंध जो कि $R \to R$ पर परिभाषित है, में कौन-कौन से फलन हैं ?

(a) $y = 2x + 1$ (b) $y > x + 3$ (c) $y < 3x + 1$ (d) $y = x^2 + 1$

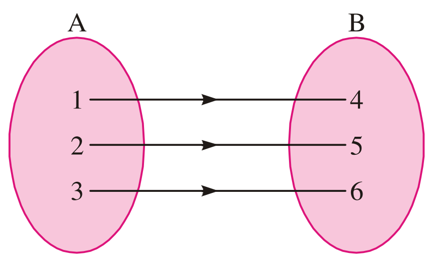
4. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

(a) $\{(\sqrt{2}, 2), (\sqrt{5}, -1), (\sqrt{3}, 5)\}$ (b) $\left\{\left(-3, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right), \left(-1, \frac{1}{2}\right)\right\}$

(c) $\{(1,1), (0,0), (2,2), (-1,-1)\}$, (d) {(दीपक, 16), (संदीप, 28), (राजन, 24) }

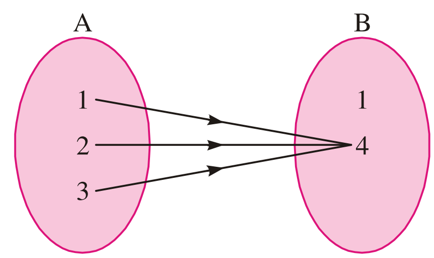
5. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

(a)



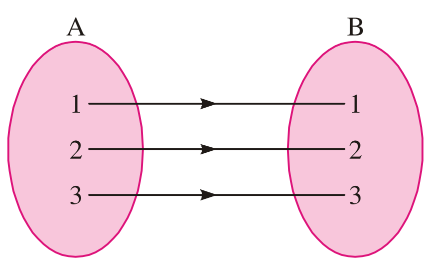
चित्र 2.11

(b)



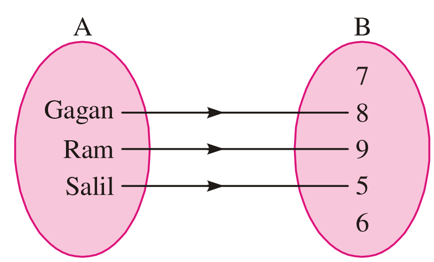
चित्र 2.12

(c)



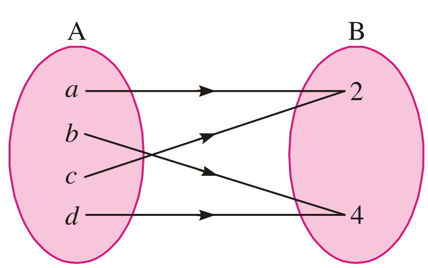
चित्र 2.13

(d)

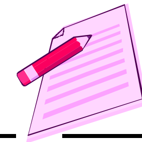


चित्र 2.14

(e)



चित्र 2.15



2.3.1 प्रान्त तथा परिसर के कुछ और उदाहरण

आइए, कुछ ऐसे फलनों पर विचार करें जो केवल वास्तविक संख्याओं के समुच्चय के किसी उप समुच्चय पर ही परिभाषित हैं।

उदाहरण 2.12. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए–

(a) $y = \frac{1}{x}$ (b) $y = \frac{1}{x-2}$ (c) $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

हल : (a) फलन $y = \frac{1}{x}$ का वर्णन निम्न क्रमित युग्मों के समुच्चय द्वारा किया जा सकता है।

$$\left\{ \ldots\ldots, \left(-2, -\frac{1}{2}\right), (-1, -1), (1, 1)\left(2, \frac{1}{2}\right), \ldots. \right\}$$

यहाँ हम देख सकते हैं कि शून्य के अतिरिक्त x के सभी वास्तविक मान सम्भव हैं क्योंकि संगत प्रतिबिम्ब अर्थात $\frac{1}{0}$ परिभाषित नहीं है।

$\therefore$ प्रान्त $= R - \{0\}$ [0 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय]

टिप्पणी:

यहाँ परिसर $= R - \{0\}$

(b) x के सभी वास्तविक मान 2 के अतिरिक्त सम्भव है क्योंकि संगत प्रतिबिम्ब अर्थात $\frac{1}{(2-2)}$ का अस्तित्व नहीं है। $\therefore$ प्रान्त $= R - \{2\}$

(c) $x = -2$ तथा $x = 3$ के लिए y का मान संभव नहीं है। $\therefore$ प्रान्त $= R - \{-2, 3\}$

उदाहरण 2.13. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए–

(a) $y = +\sqrt{x-2}$ (b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

हल : (a) फलन $y = +\sqrt{x-2}$ पर विचार कीजिए।

y के वास्तविक मान होने के लिए आवश्यक है कि $(x-2) \geq 0$ अर्थात $x \geq 2$

$\therefore$ फलन के प्रान्त के लिए वे सभी वास्तविक संख्याएँ होंगी जो 2 अथवा 2 से बडी हों।

(b) $y = +\sqrt{(2-x)(4+x)}$

y के वास्तविक मान होने के लिए $(2-x)(4+x) \geq 0$ आवश्यक है। यह हमें दो स्थितियों में प्राप्त होगा।

स्थिति I : $(2-x) \geq 0$ तथा $(4+x) \geq 0$

$\Rightarrow$ $x \leq 2$ तथा $x \geq -4$

$\therefore$ प्रान्त x के ऐसे वास्तविक मान होंगे कि $-4 \leq x \leq 2$ स्थिति II : $2 - x \leq 0$ तथा $4 + x \leq 0$

$\Rightarrow$ $2 \leq x$ तथा $x \leq -4$

परन्तु x का ऐसा वास्तविक मान सम्भव नहीं है जो 2 के बराबर या 2 ये बड़ा हो तथा – 4 से कम अथवा इसके बराबर हो।

$\therefore$ दोनों स्थितियों से प्रान्त $= -4 \le x \le 2 \; \forall x \in R$

उदाहरण 2.14. फलन $f(x) = y = 2x + 1,$ के लिए परिसर ज्ञात कीजिए जब

$$\text{प्रान्त } = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

हल : x के दिए हुए मानों के लिए हम प्राप्त करते हैं :

$f(-3) = 2(-3) + 1 = -5,\; f(-2) = 2(-2) + 1 = -3,\; f(-1) = 2(-1) + 1 = -1,$

$f(0) = 2(0) + 1 = 1,\; f(1) = 2(1) + 1 = 3,\; f(2) = 2(2) + 1 = 5,\; f(3) = 2(3) + 1 = 7$

दिए हुए फलन को क्रमित युग्मों के समुच्चय के रूप में भी लिखा जा सकता है

अर्थात $\{(-3, -5), (-2, -3), (-1, -1), (0, 1)(1, 3), (2, 5)(3, 7)\}$

$\therefore$ परिसर $= \{-5, -3, -1, 1, 3, 5, 7\}$

उदाहरण 2.15. यदि $f(x) = x + 3,\; 0 \le x \le 4$ हो, तो इस का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $\quad 0 \le x \le 4$

अथवा $\quad 0 + 3 \le x + 3 \le 4 + 3$

अथवा $\quad 3 \le f(x) \le 7$

$\therefore$ परिसर $= \{f(x) : 3 \le f(x) \le 7\}$

उदाहरण 2.16. यदि $f(x) = x^2,\; -3 \le x \le 3$ हो, तो इस का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, $-3 \le x \le 3$ अथवा $0 \le x^2 \le 9$ या $0 \le f(x) \le 9$ [क्योंकि x^2 ऋणेतर होता है]

$\therefore$ परिसर $= \{f(x) : 0 \le f(x) \le 9\}$

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त ज्ञात कीजिए– जबकि $x \in R,$

(a) (i) $y = 2x$ (ii) $y = 9x + 3$ (iii) $y = x^2 + 5$

(b) (i) $y = \dfrac{1}{3x - 1}$ (ii) $y = \dfrac{1}{(4x + 1)(x - 5)}$ (iii) $y = \dfrac{1}{(x - 3)(x - 5)}$

(iv) $y = \dfrac{1}{(3 - x)(x - 5)}$

(c) (i) $y = \sqrt{6 - x}$ (ii) $y = \sqrt{7 + x}$ (iii) $y = \sqrt{3x + 5}$

(d) (i) $y = \sqrt{(3-x)(x-5)}$ (ii) $y = \sqrt{(x-3)(x+5)}$

(iii) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(3+x)(7+x)}}$ (iv) $y = \dfrac{1}{\sqrt{(x-3)(7+x)}}$

2. नीचे दी गयी प्रत्येक स्थिति के लिए दिए हुए प्रान्त के लिए परिसर ज्ञात कीजिए–

(a) (i) $f(x) = 3x + 10,\quad x \in \{1, 5, 7, -1, -2\}$

(ii) $f(x) = 2x^2 + 1,\quad x \in \{-3, 2, 4, 0\}$

(iii) $f(x) = x^2 - x + 2,\quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(b) (i) $f(x) = x - 2,\ 0 \le x \le 4$ (ii) $f(x) = 3x + 4,\ -1 \le x \le 2$

(c) (i) $f(x) = x^2,\ -5 \le x \le 5$ (ii) $f(x) = 2x,\ -3 \le x \le 3$

(iii) $f(x) = x^2 + 1,\ -2 \le x \le 2$ (iv) $f(x) = \sqrt{x},\ 0 \le x \le 25$

(d) (i) $f(x) = x + 5,\ x \in R$ (ii) $f(x) = 2x - 3,\ x \in R$

(iii) $f(x) = x^3,\ x \in R$ (iv) $f(x) = \dfrac{1}{x},\ \{x : x < 0\}$

(v) $f(x) = \dfrac{1}{x-2},\ \{x : x \le 1\}$ (vi) $f(x) = \dfrac{1}{3x-2},\ \{x : x \le 0\}$

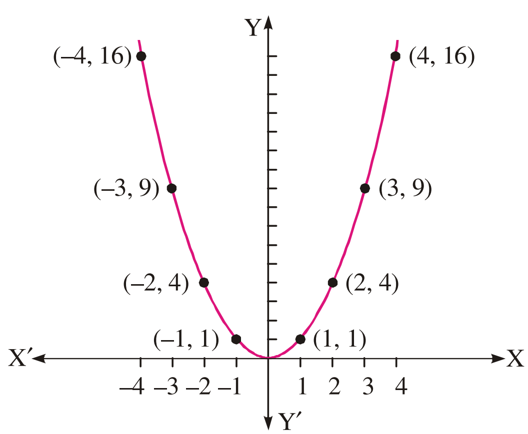
(vii) $f(x) = \dfrac{2}{x},\ \{x : x > 0\}$ (viii) $f(x) = \dfrac{x}{x+5},\ \{x : x \ne -5\}$

2.4 फलन का ग्राफ के रूप में निरूपण

चूँकि फलन क्रमित युग्मों द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।
अत: फलन का ग्राफीय प्रदर्शन सदैव सम्भव है। उदाहरणार्थ, आइए $y = x^2$ पर विचार करें–

$$y = x^2$$

x	0	1	–1	2	–2	3	–3	4	–4
y	0	1	1	4	4	9	9	16	16



चित्र 2.16

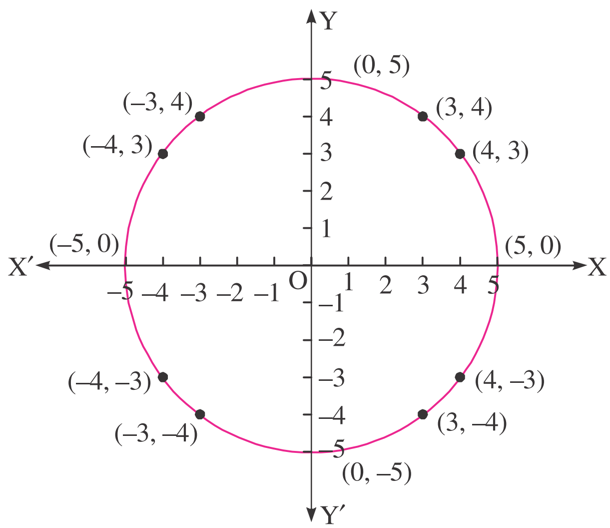
क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

हाँ, यह एक फलन प्रदर्शित करता है क्योंकि x के प्रत्येक मान के लिए y का एक अद्वितीय मान है।

आइए अब समीकरण $x^2 + y^2 = 25$ पर विचार करें।

$$x^2 + y^2 = 25$$

x	0	0	3	3	4	4	5	–5	–3	–3	–4	–4
y	5	–5	4	–4	3	–3	0	0	4	–4	3	–3



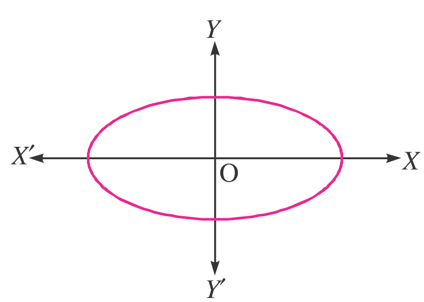
चित्र 2.17

यह ग्राफ एक वृत्त प्रदर्शित करता है? क्या यह एक फलन प्रदर्शित करता है?

नहीं, यह फलन प्रदर्शित नहीं करता है क्योंकि x के एक (समान) मान के लिए y का अद्वितीय मान नहीं है।

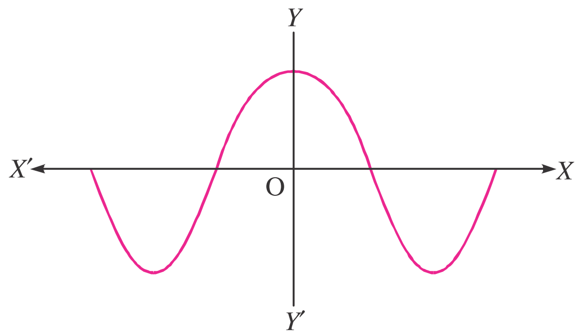
देखें आपने कितना सीखा 2.4

1. (i) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 2.18

(ii) क्या यह ग्राफ एक फलन प्रदर्शित करता है।



चित्र 2.19

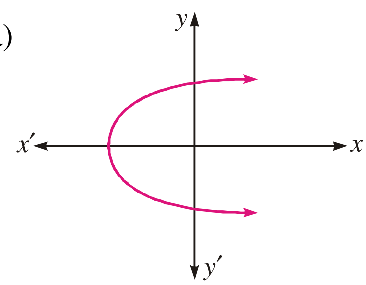
2. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का ग्राफ खींचिए :

(a) $y = 3x^2$ (b) $y = -x^2$ (c) $y = x^2 - 2$

(d) $y = 5 - x^2$ (e) $y = 2x^2 + 1$ (f) $y = 1 - 2x^2$

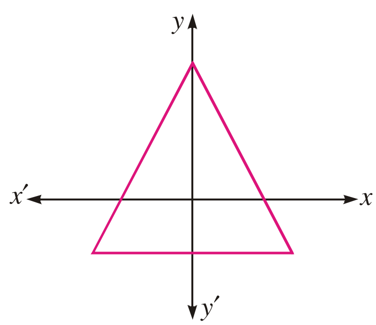
3. नीचे दिए गए ग्राफों में से कौन-कौन फलन को प्रदर्शित करते हैं :

(a)



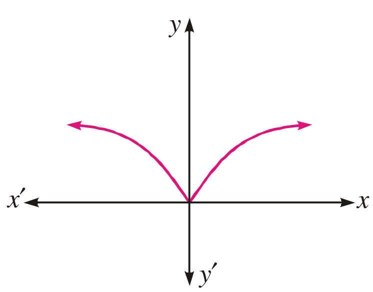
चित्र 2.20

(b)



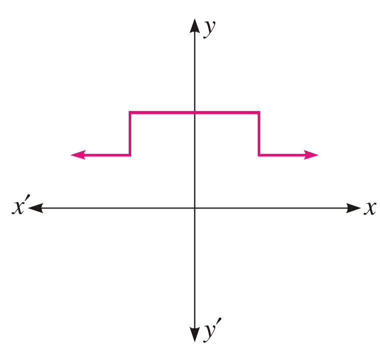
चित्र 2.21

(c)



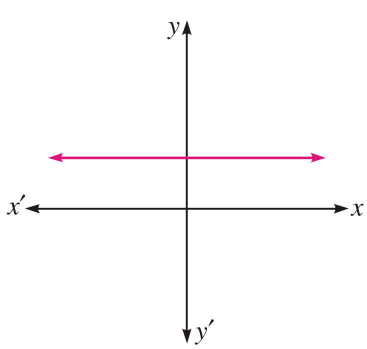
चित्र 2.22

(d)



चित्र 2.23

(e)



चित्र 2.24

संकेतः यदि y अक्ष के समान्तर कोई रेखा ग्राफ को एक से अधिक बिंदुओं पर काटे, तो ग्राफ फलन प्रदर्शित नहीं करता।

2.5 कुछ विशेष फलन

2.5.1 एकदिष्ट (Monotonic) फलन

मान लीजिए कि $F : A \to B$ एक फलन है तब f, अन्तराल (a, b) में एकदिष्ट कहलाएगा यदि वह इस अन्तराल में वर्धमान (increasing) या ह्रासमान (Decreasing) हो। अन्तराल (a, b) में, फलन के वर्धमान के लिए $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \quad \forall \quad x_1\ x_2 \in (a, b)$

और अन्तराल (a, b) में, फलन के ह्रासमान के लिए

$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2) \quad \forall \quad x_1\ x_2 \in (a, b)$

एक फलन पूरे प्रान्त में एकदिष्ट नहीं हो सकता परन्तु विभिन्न अन्तरालों में हो सकता है।

फलन $F : R \to R$, जो $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित है, पर विचार कीजिए।

$$\forall \quad x_1, x_2 \in [0, \infty] \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

$\Rightarrow$ F अन्तराल $[0, \infty]$ में एकदिष्ट है।

[$\because$ इस अन्तराल में फलन वर्धमान है।]

परन्तु $\quad \forall\ x_1, x_2 \in (-\infty, 0)\ \ x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) > F(x_2)$

$\Rightarrow$ f अन्तराल $[-\infty, 0]$ में एकदिष्ट है। ($\because$ इस अन्तराल में फलन ह्रासमान है।)

अगर हम पूरे प्रान्त की बात करें तो यह फलन R पर एकदिष्ट नहीं है। परन्तु यह अन्तराल $(-\infty, 0)$ और $(0, \infty)$ पर एकदिष्ट है।

पुनः फलन $F : R \to R$ पर विचार कीजिए जो $f(x) = x^3$ द्वारा परिभाषित है। स्पष्टतः $\forall\ x_1\ x_2 \in$ प्रान्त

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2)$$

$\therefore$ दिया हुआ फलन R पर अर्थात पूरे प्रान्त पर एकदिष्ट है।

2.5.2 सम फलन

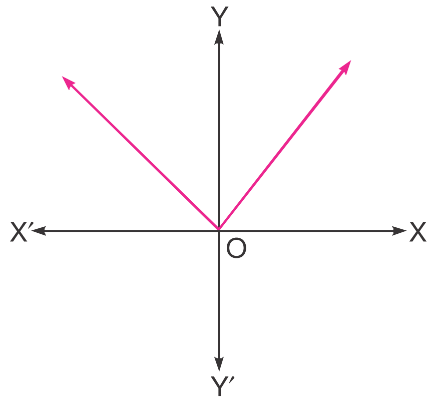
एक फलन को सम फलन कहा जाता है यदि प्रान्त के प्रत्येक x के लिए $F(-x) = F(x)$

उदाहरणार्थ, निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन एक सम फलन है

(i) यदि $F(x) = x^2$, तब $F(-x) = (-x)^2 = x^2 = F(x)$

(ii) यदि $F(x) = \cos x$, तब $F(-x) = \cos(-x) = \cos x = F(x)$

(iii) यदि $F(x) = |x|$, तब $F(-x) = |-x| = |x| = F(x)$



चित्र 2.25

इस समफलन (मापांक फलन) का ग्राफीय प्रदर्शन ऊपर चित्र में दर्शाया गया है।

प्रेक्षण : ग्राफ y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

2.5.3 विषम फलन

एक फलन को विषम फलन कहा जाता है यदि प्रत्येक x के लिए $f(-x) = -f(x)$

उदाहरणार्थ,

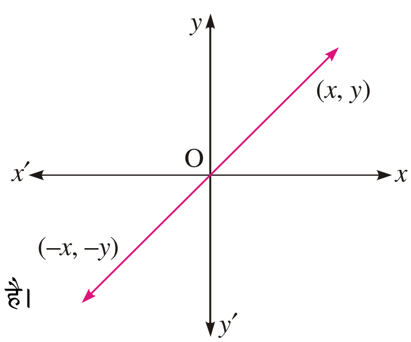
(i) यदि $f(x) = x^3$

तो $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

(ii) यदि $f(x) = \sin x$

तो $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

विषम फलन $y = x$ का ग्राफ चित्र 15.46 में दिया गया है।



चित्र 2.26

प्रेक्षण : ग्राफ मूल बिन्दु के सापेक्ष सममित है।

2.5.4 सोपान फलन या महत्तम पूर्णांक फलन

$f(x) = [x]$ जो कि ऐसा सबसे बड़ा पूर्णांक है, जो x से छोटा अथवा इसके बराबर हो। इस प्रकार से परिभाषित फलन को महत्तम पूर्णांक फलन (Greatest Integer function) या सोपान फलन कहते हैं। इसके ग्राफ में सोपान होते हैं।

आइए फलन $y = [x], x \in R$ का ग्राफ खींचें

$[x] = 1, \quad 1 \le x < 2$

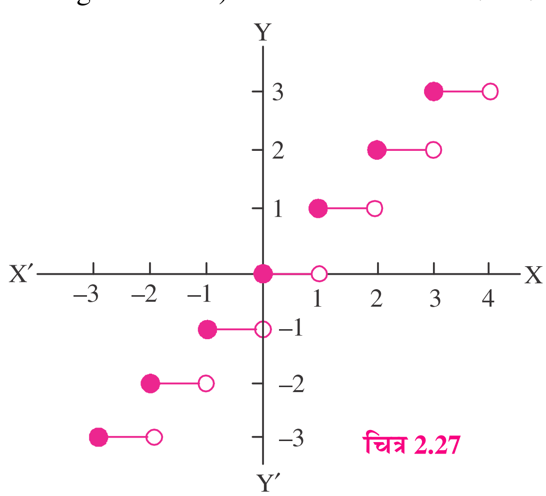
$[x] = 2, \quad 2 \le x < 3$

$[x] = 3, \quad 3 \le x < 4$

$[x] = 0, \quad 0 \le x < 1$

$[x] = -1, \quad -1 \le x < 0$

$[x] = -2, \quad -2 \le x < -1$



चित्र 2.27

- सोपान फलन का प्रान्त वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है।
- सोपान फलन का परिसर पूर्णांकों का समुच्चय होता है।

2.5.5 बहुपद फलन

बहुपद रूप में परिभाषित फलन बहुपद फलन कहलाता है। उदाहरणार्थ

(i) $f(x) = 3x^2 - 4x - 2$ (ii) $f(x) = x^3 - 5x^2 - x + 5$ (iii) $f(x) = x^3$

सभी बहुपद फलन हैं।

टिप्पणी:

$f(x) = K$ के रूप वाले फलन को अचर फलन कहते हैं जहाँ K एक अचर है।

2.5.6 परिमेय फलन

$f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ के रूप वाले फलन को परिमेय फलन कहते हैं जहाँ $g(x)$ तथा $h(x)$ बहुपद हैं

और $h(x) \neq 0$ उदाहरणार्थ, $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 1}, x \neq -1$ एक परिमेय फलन है।

2.5.7 प्रतिलोम फलन

$y = \dfrac{1}{x}$ के रूप वाले फलन को प्रतिलोम फलन कहते हैं जहाँ $x \neq 0$

2.5.8 चर घातांकी फलन

स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड आयलर Leonhard Euler ने संख्या 'e' को अनन्त श्रेणी के रूप में अवगत कराया। वास्तव में $e = 1 + \dfrac{1}{\underline{|1}} + \dfrac{1}{\underline{|2}} + \dfrac{1}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{1}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$ ...(1)

यह विदित है कि इसकी अनन्त श्रेणी का योग एक परिमित सीमा की ओर जाता है (अर्थात यह श्रेणी अभिसारी है।) और इसलिए यह एक धनात्मक वास्तविक संख्या है जिसे 'e' से निरूपित किया जाता है। यह संख्या e एक अबीजीय अपरिमेय संख्या है और इसका मान 2 तथा 3 के बीच में होता है। अब नीचे दी गयी अनन्त श्रेणी पर विचार कीजिए: $1 + \dfrac{x}{\underline{|1}} + \dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \dfrac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$

यह दर्शाया जा सकता है कि इस अनन्त श्रेणी का योग एक परिमित सीमा की ओर जाता है जिसे हम e^x से प्रदर्शित करते हैं। अतः $e^x = 1 + \dfrac{x}{\underline{|1}} + \dfrac{x^2}{\underline{|2}} + \dfrac{x^3}{\underline{|3}} + \ldots\ldots + \dfrac{x^n}{\underline{|n}} + \ldots\ldots$ ......(2)

यह चर घातांकी प्रमेय कहलाती है और अनन्त श्रेणी, चर घातांकी श्रेणी कहलाती है। हम आसानी से देख सकते हैं कि (2) में $x = 1$ रखने पर हमें (1) प्राप्त होता है।

फलन $f(x) = e^x$ जहाँ x एक वास्तविक संख्या है, चर घातांकी फलन कहलाता है।

चर घातांकी फलन $y = e^x$ का ग्राफ निम्नलिखित तथ्यों पर विचार करने के पश्चात प्राप्त किया जाता है।

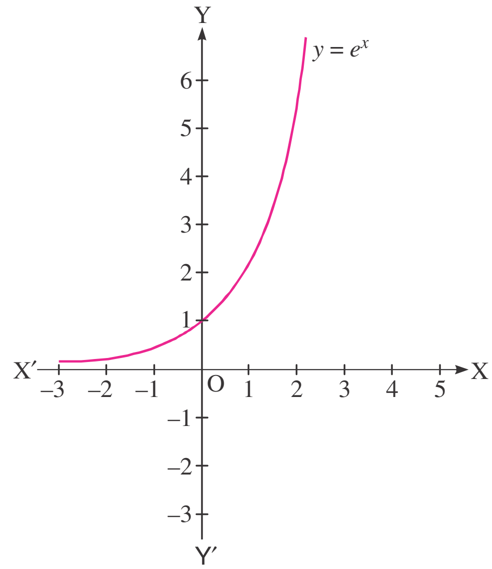
(i) जैसे–जैसे x बढ़ता है, y का मान बड़ी तेजी से बढ़ता है और जब x घटता है तो y का मान 0 के सन्निकट पहुँचता है।

(ii) यद्यपि x के किसी भी मान के लिए, $e^x \neq 0$ कोई x-अन्तखण्ड नहीं होता है।

(iii) क्योंकि $e^0 = 1$ और $e \neq 0$ y-अन्तखण्ड 1 है।

(iv) तालिका में दिए हुए विशिष्ट बिन्दु e^x के ग्राफ को खींचने में मार्ग–दर्शन करते हैं।

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.04	0.13	0.36	1.00	2.71	7.38	20.08

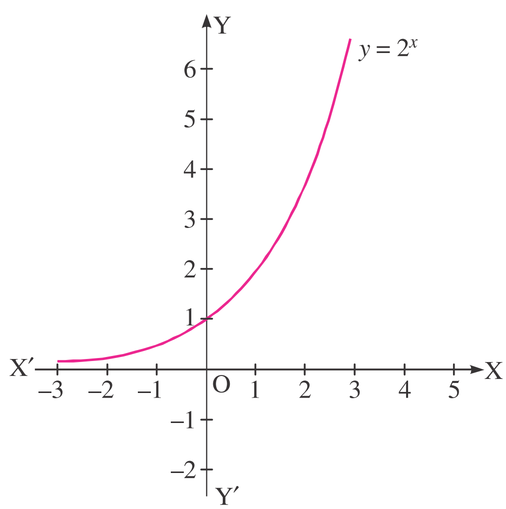


चित्र 2.28

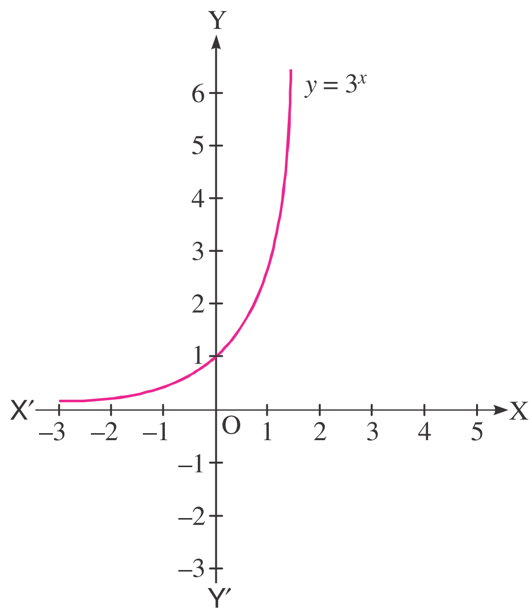
यदि हम e से अलग हटकर आधार, मान लीजिए ‘a’ लें, हमें चर घातांकी फलन

$f(x) = a^2$, प्राप्त होगा यदि $a < 0$, तथा $a \neq 1$ हो

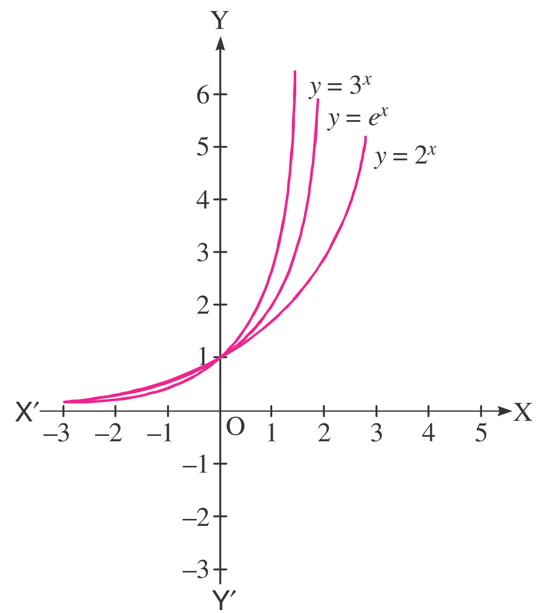
उदाहरणार्थ, हम $a = 2$ या $a = 3$ ले सकते हैं और फलनों $y = 2^x$ [देखिए चित्र 15.49] तथा $y = 3^x$ [देखिए चित्र 15.50] के ग्राफ को प्राप्त करते हैं। चित्र 15.51 में $e^x, 2^x$ तथा 3^x के आलेख (ग्राफ) एक साथ दिखाए गए हैं।



चित्र 2.29



चित्र 2.30



चित्र 2.31

2.5.9 लघु गणकीय फलन

अब फलन $y = e^x$ .....(3)

पर पुनः विचार कीजिए।

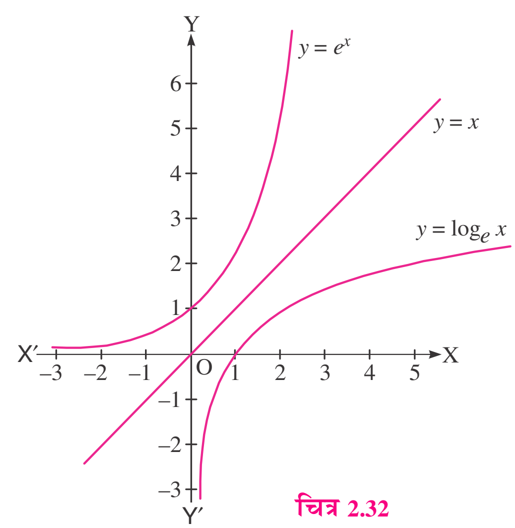
हम इसे समान रूप में ऐसे भी लिख सकते हैं

$$x = \log_e y$$

इस प्रकार $y = \log_e x$ $y = e^x$ का प्रतिलोम फलन है। .....(4)

यदि यह 'e' है तो लघु का आधार नहीं लिखते है और इस प्रकार $\log_e x$ को सामान्यतः $\log x$ के रूप में लिखा जाता है। क्योंकि $y = e^x$ और $y = \log x$ प्रतिलोम फलन हैं। और उनके ग्राफ रेखा $y = x$ के सापेक्ष सममित हैं।

$y = \log x$ का ग्राफ रेखा $y = x$ से प्रतिबिम्बित करके $y = e^x$ से प्राप्त हो सकता है।



चित्र 2.32

टिप्पणी:

विद्यार्थी घातांक के नियमों को पुनः स्मरण कर सकते हैं जो उन्होंने पिछली कक्षाओं में पढ़े थे।

यदि $a > 0$, और m तथा n परिमेय संख्याएँ हों तो

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \; a^m \div a^n = a^{m-n}, \; (a^m)^n = a^{mn}, \; a^0 = 1$$

संगत लघु गणक के नियम हैं :

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n\,,\quad \log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a (m^n) = n \log_a m\,,\quad \log_b m = \frac{\log_a m}{\log_a b}$$

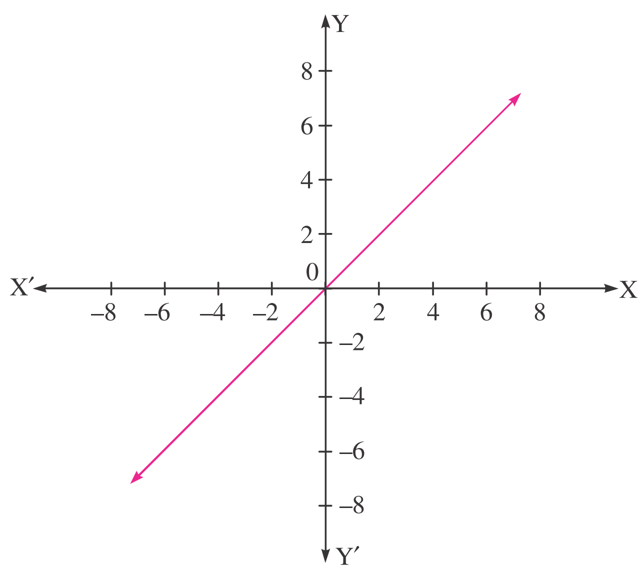
या $\log_b m = \log_a m \log_b a$ यहां $a, b > 0,\ a \neq 1,\ b \neq 1.$

2.5.10 तत्समक फलन

मान लीजिए R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। प्रत्येक $x \in R$ के लिए $y = f(x) = x$ द्वारा परिभाषित वास्तविक मान फलन $f : R \to R$ है। इस प्रकार के फलन को तत्समक फलन कहते हैं।

यहाँ f के परिसर तथा प्रांत R है।

इसका आलेख एक सरल रेखा होती है। यह रेखा मूलबिन्दु से होकर जाती है।



$f(x) = x$

चित्र 2.33

2.5.11 अचर फलन

प्रत्येक $x \in R$ के लिए $y = f(x) = c$ जहाँ c एक अचर है द्वारा परिभाषित एक वास्तविक मान फलन $f : R \to R$ है।

यहाँ f का प्रांत R एवं परिसर $\{c\}$ है

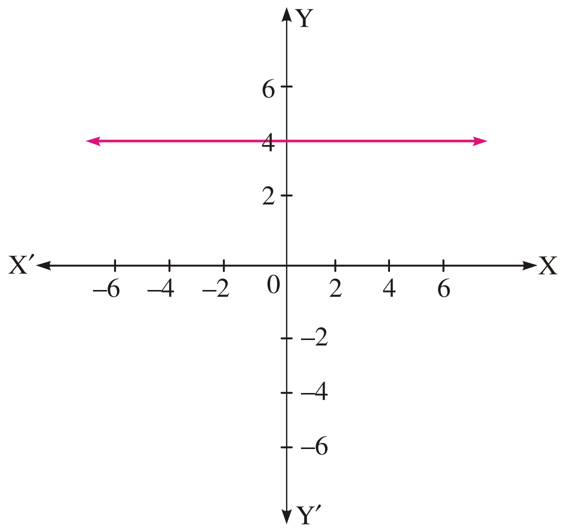
f का आलेख x-अक्ष के समान्तर एक रेखा है।

उदाहरण के लिए $f(x) = 4$ प्रत्येक $x \in R$ है, तब इसका आलेख इस प्रकार दर्शाया जाता है।

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी



$f(x) = 4$

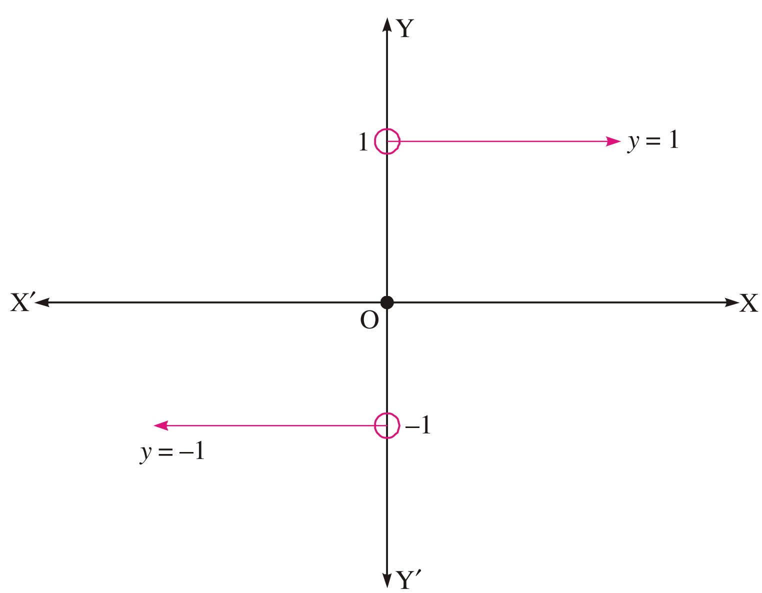
चित्र 2.34

2.5.12 चिह्न (Signum) फलन

प्रत्येक $x \in R$ के लिए

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ if } x > 0 \\ 0, \text{ if } x = 0 \\ -1, \text{if } x < 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन $f : R \to R$ चिह्न (Signum) फलन कहलाता है। चिह्न फलन का प्रांत R है। एवं परिसर समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ है। चिह्न फलन का आलेख नीचे दिया गया है :



चित्र 2.35

देखें आपने कितना सीखा 2.5

1. सही कथनों पर निशान ✓ लगाइए :

(i) फलन $f(x) = 2x^4 + 7x^2 + 9x$ एक सम फलन है।

(ii) विषम फलन $y-$अक्ष के सापेक्ष सममित होता है।

(iii) $f(x) = x^{1/2} - x^3 + x^5$ एक बहुपद फलन है।

(iv) सभी $x \in R$ के लिए $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ एक परिमेय फलन है।

(v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$ एक परिमेय फलन है।

(vi) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ का प्रान्त 0 के अतिरिक्त सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

(vii) सोपान फलन न तो सम है न विषम

2. निम्नलिखित में से कौन से फलन सम तथा कौन से विषम फलन हैं।

(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2}{5+x^2}$ (c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+5}$

(d) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$ (e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ (f) $f(x) = \dfrac{5}{x-5}$

(g) $f(x) = \dfrac{x-3}{3+x}$ (h) $f(x) = x - x^3$

3. फलन $y = [x] - 2$ का ग्राफ खींचिए।

4. निम्नलिखित फलनों का बहुपद फलन, परिमेय फलन, प्रतिलोम फलन अथवा अचर फलन में वर्गीकरण कीजिए :

(a) $y = 3x^8 - 5x^7 + 8x^5$ (b) $y = \dfrac{x^2+2x}{x^3-2x+3}$, $x^3 - 2x + 3 \neq 0$

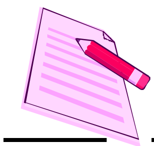
(c) $y = \dfrac{3}{x^2}$, $x \neq 0$ (d) $y = 3 + \dfrac{2x+1}{x}$, $x \neq 0$

(e) $y = 1 - \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ (f) $y = \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$, $x \neq 2$ (g) $y = \dfrac{1}{9}$.

2.6 फलनों का योग, अन्तर, गुणा एवं भाग

(i) दो वास्तविक फलनों का योग:

मान लीजिए कि $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ कोई दो वास्तविक फलन हैं जहाँ $X \subset R$ है, तब हम सभी $x \in R$ के लिए $(f+g) : X \to R$ इस प्रकार परिभाषित करते हैं :



$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \text{ सभी } x \in X$$

माना $\quad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

तब $\quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) = x^2 + 2x + 1$

(ii) एक वास्तविक फलन में से दूसरे को घटाना

मान लीजिए कि $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ कोई दो वास्तविक फलन हैं जहाँ $X \subset R$ है, तब हम $(f - g) : X \to R$ को इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$(f - g)x = f(x) - g(x), \text{ सभी } x \in X \text{ के लिए}$$

माना $\quad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = x^2 - (2x + 1) = x^2 - 2x - 1$$

(iii) दो वास्तविक फलनों का गुणन

दो वास्तविक फलनों $f : X \to R$ तथा $g : X \to R$ का गुणनफल एक फलन $f \,.\, g : X \to R$ है जो निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है

$$(f g)(x) = f(x) \,.\, g(x) \text{ सभी } x \in X \text{ के लिए}$$

माना $\quad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1,\ x \in X$

तब $\quad (f \,.\, g)(x) = f(x) \,.\, g(x) = x^2 \,.\, (2x + 1) = 2x^3 + x^2$

(iv) दो वास्तविक फलनों का भागफल

मान लीजिए कि f तथा g, $X \to R$ द्वारा परिभाषित दो वास्तविक फलन हैं, जहाँ $X \subset R$ है. f से g का भागफल, जिसे $\dfrac{f}{g}$ से निरूपित करते हैं, एक फलन है जिसे निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ जहाँ } g(x) \neq 0,\ x \in X$$

माना $\quad f(x) = x^2,\ g(x) = 2x + 1$

तब $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2}{2x+1}, x \neq \dfrac{-1}{2}$

उदाहरण 2.17. मान लीजिए $f(x) = \sqrt{x}$ तथा $g(x) = x$, ऋणेत्तर वास्तविक संख्याओं के लिए परिभाषित दो फलन हैं, तो $(f + g)(x)$, $(f - g)(x)$, $(f g)(x)$ तथा $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$ ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ हमें दिया हुआ है कि $f(x) = \sqrt{x}, g(x) = x$

तब $\quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x} + x$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x} - x$$

$$(f g)(x) = f(x) \,.\, g(x) = \sqrt{x} \,.\, x = x^{3/2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x} = x^{\frac{-1}{2}}, x \neq 0$$

देखें आपने कितना सीखा 2.6

1. एक फलन $f(x) = 3x + 4$ द्वारा परिभाषित किया गया है। निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए :
   (i) $f(0)$ (ii) $f(7)$ (iii) $f(-3)$
2. माना $f, g : R \to R$ क्रमशः $f(x) = x + 1$, $g(x) = 2x - 3$ से परिभाषित किए गए हैं। $(f + g)$, $(f - g)$ $(f g)$ तथा $\left(\frac{f}{g}\right)$ ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- दो समुच्चयों A तथा B का कार्तीय गुणन उन सभी क्रमित युग्मों का समुच्चय होता है जो A तथा B के अवयव होते हैं। इसे $A \times B$ से प्रदर्शित करते हैं, अर्थात
  $$A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ और } b \in B\}.$$
- संबंध R, $A \times B$ का उपसमुच्चय होता है जहाँ A और B समुच्चय है अर्थात
  $$R \subseteq A \times B = \{(a, b) : a \in A \text{ और } b \in B \text{ और } aRb\}$$
- फलन एक विशेष प्रकार का सम्बन्ध होता है।
- फलन $f : A \to B$, A से B पर संगतता का एक नियम होता है ताकि A का प्रत्येक अवयव B के एक अद्वितीय अवयव से सम्बद्ध हो।
- फलन, क्रमित युग्मों के समुच्चय से भी बताया जा सकता है।
- मान लीजिए कि f, A का B पर एक फलन है, तो

  प्रान्त : फलन 'f' के क्रमित युग्मों के प्रथम अवयवों का समुच्चय होता है।

  परिसर : फलन f के क्रमित युग्मों के द्वितीय अवयवों का समुच्चय होता है।
- फलन को एक समीकरण के रूप में भी लिखा जा सकता है। जैसे $y = f(x)$

  जहाँ x स्वतंत्र चर है और 'y' आश्रित चर है।

  प्रान्त : स्वतंत्र चर का समुच्चय

  परिसर : आश्रित चर का समुच्चय
- प्रत्येक समीकरण फलन निरूपित नहीं करता।
- **उर्ध्वाधर रेखा जाँच**–ग्राफ फलन है या नहीं, की जाँच करने के लिए हम y-अक्ष के समान्तर एक रेखा खींचते हैं। यदि यह रेखा ग्राफ को एक से अधिक बिन्दुओं पर काटती है तो ग्राफ फलन प्रदर्शित नहीं करता।
- एक फलन एक अन्तराल में एकदिष्ट कहलाता है यदि वह उस अन्तराल में या तो वर्धमान हो या ह्रासमान हो।

- एक फलन सम फलन कहलाता है यदि $f(x) = f(-x)$ और विषम फलन यदि $f(-x) = -f(x)$, जहाँ $x, -x \in f$ का प्रान्त।
- $f, g : X \to R$ तथा $X \subset R$, तब
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$
  $(f \,.\, g)x = f(x) \,.\, g(x)$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$
- एक वास्तविक फलन, वास्तविक संख्याओं का समुच्चय होता है या इनमें से इसके उपसमुच्चय इसके प्रांत तथा परिसर दोनों हैं।

सहायक वेबसाईट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/02functions/06composite/index.shtml*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/functions*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/relations*

आइए अभ्यास करें

1. दिया है $A = \{a, b, c\}$, तथा $B = \{2, 3\}$; A से B पर के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

2. दिया है $A = \{7, 8, 9\}$, तथा $B = \{9, 10, 11\}$, सत्यापित कीजिए कि

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ (ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

3. निम्नलिखित में से कौन से समीकरण फलन प्रदर्शित करते हैं। प्रत्येक स्थिति में $x \in R$ है।

(a) $y = \dfrac{2x + 3}{4 - 5x}, x \neq \dfrac{4}{5}$ (b) $y = \dfrac{3}{x}, x \neq 0$ (c) $y = \dfrac{3}{x^2 - 16}, x \neq 4, -4$

(d) $y = \sqrt{x - 1},\ x \geq 1$ (e) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ (f) $x^2 + y^2 = 25$

4. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त तथा परिसर लिखिए :

$f_1 : \{(0, 1), (2, 3), (4, 5)(6, 7), ...(100, 101)\}$

$f_2 : \{(-2, 4), (-4, 16), (-6, 36)........\}$

$f_3 : \left\{(1, 1), \left(\dfrac{1}{2}, -1\right), \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)\left(\dfrac{1}{4}, -1\right), ...\right\}$

$f_4 : \{........(3, 0), (-1, 2), (4, -1)\}$

$f_5 : \{........(-3, 3), (-2, 2), (-1, 1)(0, 0)(1, 1), (2, 2), ...\}$

5. निम्नलिखित फलनों के प्रान्त लिखिए :

(a) $f(x) = x^3$ (b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = \sqrt{3x+1}$ (d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x+1)(x+6)}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-1)(2x-5)}}$

6. निम्नलिखित फलनों के परिसर लिखिए :

(a) $y = 3x + 2,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2},\ x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x}},\ x \in R^+$ (सभी ऋणेतर वास्तविक मान)

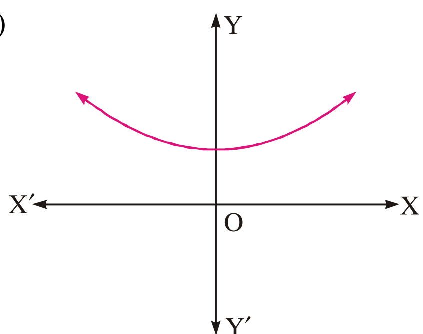
7. नीचे दिए गए फलनों के ग्राफ खींचिए :

(a) $y = x^2 + 3,\ x \in R$ (b) $y = \dfrac{1}{x-2},\ x \in R - \{2\}$

(c) $y = \dfrac{x-1}{x+1},\ x \in \{0, 2, 3, 5, 7, 9\}$ (d) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ x \in R^+$.

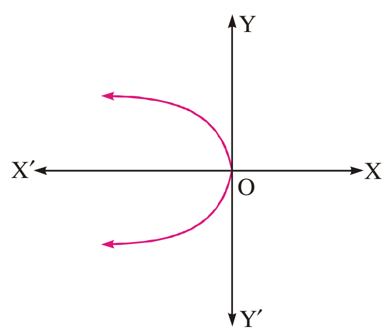
8. निम्नलिखित में कौन-कौन से ग्राफ फलन प्रदर्शित करते हैं :

(a)



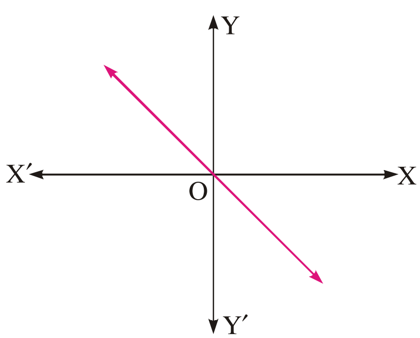
चित्र 2.36

(b)



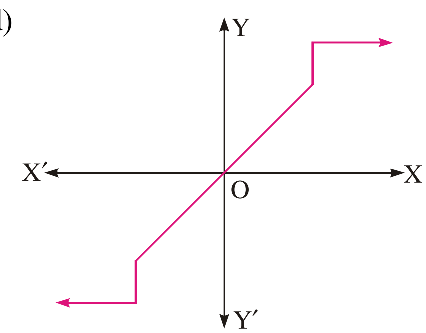
चित्र 2.37

(c)



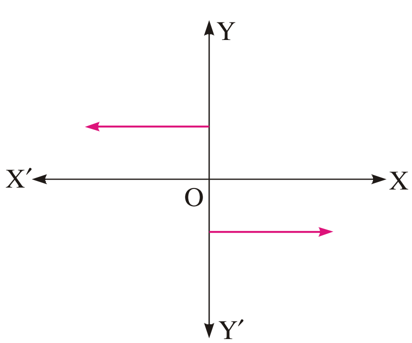
चित्र 2.38

(d)



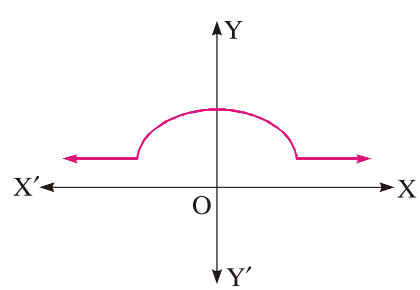
चित्र 2.39

(e)



चित्र 2.40

(f)



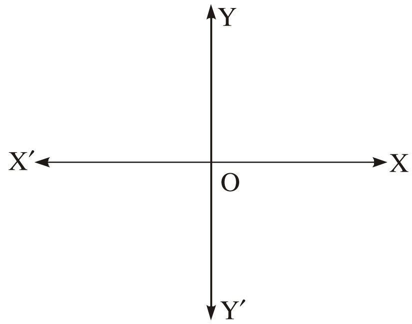
चित्र 2.41

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

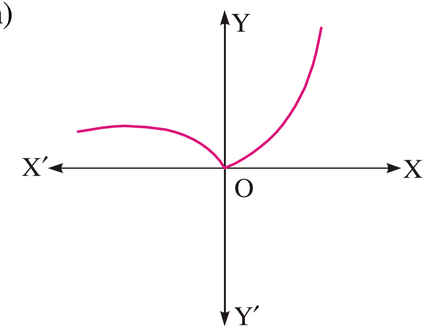
टिप्पणी

(g)



चित्र 2.42

(h)



चित्र 2.43

9. निम्नलिखित फलनों में कौन से परिमेय फलन हैं ?

(a) $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+2}, x \in R - \{-2\}$ (b) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}, x \in R^+$

(c) $f(x) = \dfrac{x+2}{x^2+4x+4}, x \in R - \{-2\}$ (d) $y = x, x \in R$

10. निम्नलिखित फलनों में कौन से बहुपद फलन है ?

(a) $f(x) = x^2 + \sqrt{3}\, x + 2$ (b) $f(x) = (x+2)^2$

(c) $f(x) = 3 - x + 2x^3 - x^4$ (d) $f(x) = \sqrt{x} + x - 5, \quad x \geq 0$

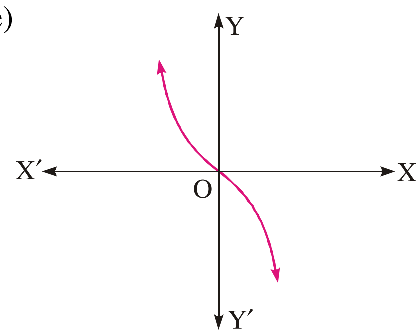
(e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}, x \notin (-2, 2)$

11. निम्नलिखित फलनों में कौन से सम फलन है और कौन से विषम फलन हैं?

(a) $f(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad x \in [-3, 3]$ (b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

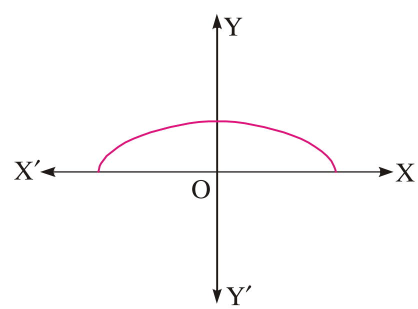
(c) $f(x) = |x|$ (d) $f(x) = x - x^5$

(e)



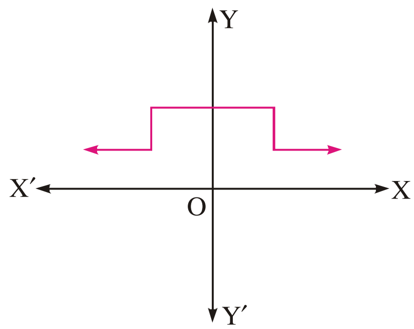
चित्र 2.44

(f)



चित्र 2.45

(g)



चित्र 2.46

12. माना एक फलन f, $f(x) = 5x^2 + 2$, $x \in$ R से परिभाषित है

(i) f के अंतर्गत 3 की प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए।

(ii) $f(3) \times f(2)$ ज्ञात कीजिए।

(iii) x ज्ञात कीजिए जबकि $f(x) = 22$

13. माना $f(x) = x + 2$ तथा $g(x) = 2x - 3$ दो वास्तविक फलन हैं। निम्नलिखित फलनों को ज्ञात कीजिए :

(i) $f + g$ (ii) $f - g$

(iii) $f \,.\, g$ (iv) $\dfrac{f}{g}$

14. यदि $f(x) = (2x + 5)$, $g(x) = x^2 - 1$ दो वास्तविक मान फलन हैं। निम्नलिखित फलनों को ज्ञात कीजिए :

(i) $f + g$ (ii) $f - g$ (iii) $f g$

(iv) $\dfrac{f}{g}$ (v) $\dfrac{g}{f}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 2.1

2. $\{(2,1),(4,1),(2,4),(4,4)\}$.

3. (i) $R = \{(4,2),(4,4),(6,2),(6,3),(8,2),(8,4),(10,2),(10,5)\}$.

(ii) R का प्रांत, $R = \{4,6,8,10\}$.

(iii) R का परिसर, $R = \{2,3,4,5\}$.

4. (i) $R = \{(1,8),(2,4)\}$.

(ii) R का प्रांत, $R = \{1,2\}$,

(iii) R का परिसर, $R = \{1,2\}\{8,4\}$

मॉड्यूल - I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

टिप्पणी

5. (i) $R = \{(2,4),(3,9),(5,25),(7,49),(11,121),(13,169)\}$

R का प्रांत, $R = \{2,3,5,7,11,13\}$,

R का परिसर, $R = \{4,9,25,49,121,169\}$.

6. (i) R का प्रांत $= \phi$

(ii) R का प्रांत $= \phi$

(iii) R का परिसर $= \phi$

7. $x = 2, y = 3.$

8. $\{(-1,-1,-1),(-1,-1,1),(-1,1,-1),(-1,1,1),(1,-1,-1),(1,-1,1),(1,1,-1),(1,1,1)\}$

9. $A = \{a, b\}, B = \{x, y\}$ 10. 18

देखें आपने कितना सीखा 2.2

1. (a), (c), (f)
2. (a), (b)
3. (a), (d)
4. (a) प्रांत $= \{\sqrt{2}, \sqrt{5}, \sqrt{3}\}$, परिसर $= \{2, -1, 5\}$

(b) प्रांत $= \{-3, -2, -1\}$, परिसर $= \left\{\frac{1}{2}\right\}$

(c) प्रांत $= \{1, 0, 2, -1\}$, परिसर $= \{1, 0, 2, -1\}$,

(d) प्रांत = {दीपक, संदीप, राजन} परिसर = {16, 28, 24}.

5. (a) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {4, 5, 6}, (b) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {4}

(c) प्रांत = {1, 2, 3}, परिसर = {1, 2, 3}, (d) प्रांत = {गगन, राम, सलिल} परिसर = {8, 9, 5}.

(e) प्रांत = {a, b, c}, परिसर = {2, 4}

देखें आपने कितना सीखा 2.3

1. (a) (i) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(ii) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(iii) प्रांत = वास्तविक संख्याओं का समुच्चय

(b) (i) प्रांत $= R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$ (ii) प्रांत $= R - \left\{-\frac{1}{4}, 5\right\}$

(iii) प्रांत $= R - \{3, 5\}$ (iv) प्रांत $= R - \{3, 5\}$

(c) (i) प्रांत $= \{x \in R : x \le 6\}$, (ii) प्रांत $= \{x \in R : x \ge -7\}$

(iii) प्रांत $= \left\{x : x \in R, x \ge -\frac{5}{3}\right\}$

(d) (i) प्रांत $= \{x : x \in R$ और $3 \le x \le 5\}$, (ii) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \ge 3, x \le -5\}$

(iii) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \ge -3, x \le -7\}$, (iv) प्रांत $= \{x : x \in R \;\; x \ge 3, x \le -7\}$

2. (a) (i) परिसर $= \{13, 25, 31, 7, 4\}$, (ii) परिसर $= \{19, 9, 33, 1\}$, (iii) परिसर $= \{2, 4, 8, 14, 22\}$

(b) (i) परिसर $= \{f(x) : -2 \le f(x) \le 2\}$ (ii) परिसर $= \{f(x) : 1 \le f(x) \le 10\}$

(c) (i) परिसर $= \{f(x) : 1 \le f(x) \le 25\}$ (ii) परिसर $= \{f(x) : -6 \le f(x) \le 6\}$

(iii) परिसर $= \{f(x) : 1 \le f(x) \le 5\}$ (iv) परिसर $= \{f(x) : 0 \le f(x) \le 5\}$

(d) (i) परिसर $= R$ (ii) परिसर $= R$

(iii) परिसर $= R$ (iv) परिसर $= \{f(x) : f(x) < 0\}$

(v) परिसर $= \{f(x) : -1 \le f(x) < 0\}$

(vi) परिसर $= \{f(x) : 0.5 \le f(x) < 0\}$

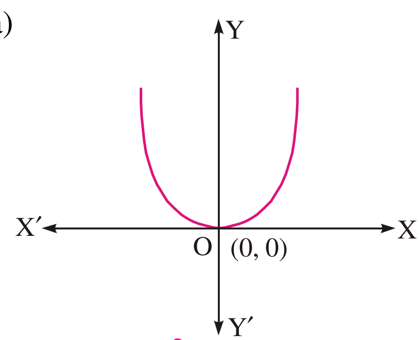
(vii) परिसर $= \{f(x) : f(x) > 0\}$

(viii) परिसर : $x = -5$ के अतिरिक्त $f(x)$ के सभी मान।

देखें आपने कितना सीखा 2.4

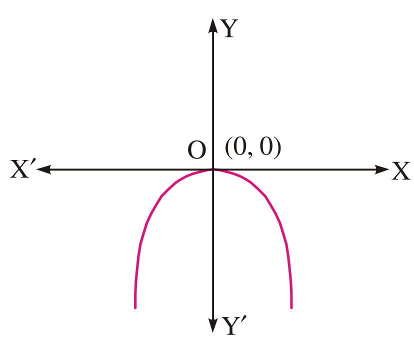
1. (i) नहीं (ii) हाँ

2. (a)



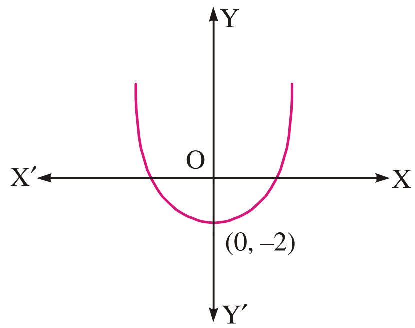
चित्र 2.47

(b)



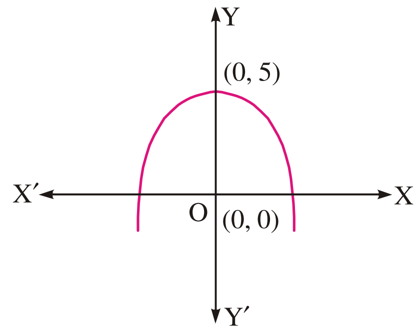
चित्र 2.48

(c)



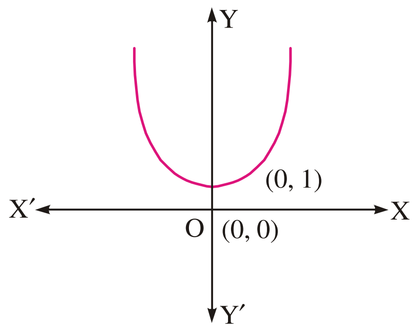
चित्र 2.49

(d)



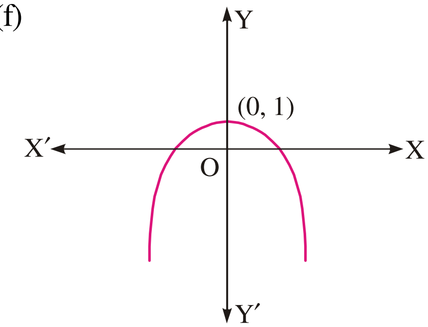
चित्र 2.50

(e)



चित्र 2.51

(f)



चित्र 2.52

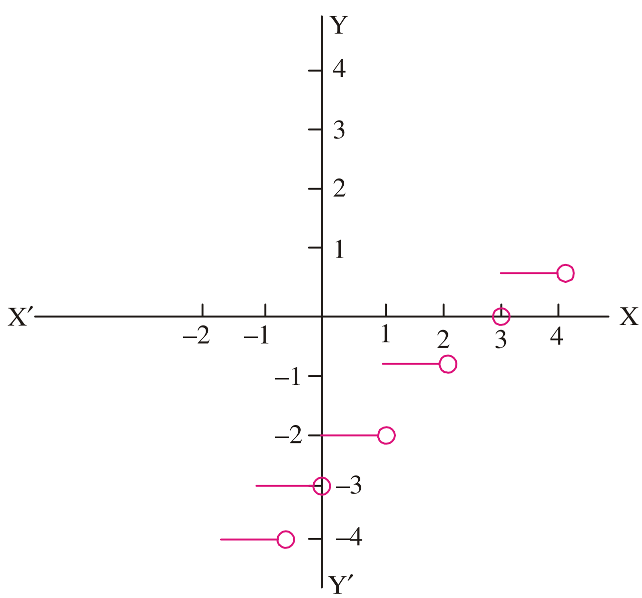
3. (c), (d) और (e).

देखें आपने कितना सीखा 2.5

1. v, vi, vii सत्य कथन हैं। (i), (ii), (iii), (iv) असत्य कथन हैं।

2. (b), (c) सम फलन हैं तथा (d), (e), (h) विषम फलन हैं।

3.



चित्र 2.53

4. (a) बहुपद फलन (b) परिमेय फलन (c) परिमेय फलन (d) परिमेय फलन
(e) परिमेय फलन (f) परिमेय फलन (g) अचर फलन

देखें आपने कितना सीखा 2.6

1. (i) 4 (ii) 25 (iii) –5
2. $(f+g)x = 3x-2 = 3x-2,\ (f-g)x = 4-x,$

$(f \cdot g)x = 2x^2 - x - 3,\ \left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3}, x \neq \frac{3}{2}$

आइए अभ्यास करें

1. 2^6 अर्थात् 64
3. (a), (b), (c), (d), (e) फलन हैं।
4. f_1 : –प्रांत $= \{0, 2, 4, 6, ...100\}$, परिसर $= \{1, 3, 5, 7, ...101\}$.

f_2 : –प्रांत $= \{-2, -4, -6, ...\}$, परिसर $= \{4, 16, 36, ...\}$.

f_3 : –प्रांत $= \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...\right\}$, परिसर $= \{1, -1\}$.

f_4 : –प्रांत $= \{3, -1, 4\}$, परिसर $= \{0, 2, -1\}$.

f_5 : –प्रांत $= \{...... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, परिसर $= \{0, 1, 2, 3, ...\}$

5. (a) प्रांत $= R$ (b) प्रांत $= R - \{-1, 1\}$,

(c) प्रांत $= x \geq -\frac{1}{3}\ \forall\ x \in R$ (d) प्रांत $= x \geq -1, x \leq -6$

(e) प्रांत $= x \geq \frac{5}{2}, x \leq 1.$

6. (a) प्रांत $= R$ (b) परिसर $= x = 2$ पर y के सभी मान

(c) प्रांत $= \left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}\right\}$ (d) प्रांत $= x > 0$ के लिए y के सभी मान

8. (a), (c), (e), (f), (h).
9. (a), (c) 10. (a), (b), (c)
11. सम फलन : (a), (b), (c), (f), (g), विषम फलन : (d), (e)
12. (i) $f(3) = 47$, (ii) $f(3) \times f(2) = 1034$, (iii) $x = 2, -2$

13. (i) $f + g = 3x - 1$, (ii) $f - g = -x + 5$,

(iii) $fg = 2x^2 + x - 6$ (iv) $f/g = \dfrac{x+2}{2x-3}, x \neq \dfrac{3}{2}$

14. (i) $f + g = x^2 + 2x + 4$ (ii) $f - g = -x^2 + 2x + 6$

(iii) $f \,.\, g = 2x^3 + 5x^2 - 2x - 5$ (iv) $f/g = \dfrac{2x+5}{x^2-1}, x \neq \pm 1$

(v) $g/f = \dfrac{x^2-1}{2x+5}, x \neq \dfrac{-5}{2}$

3

त्रिकोणमितीय फलन- I

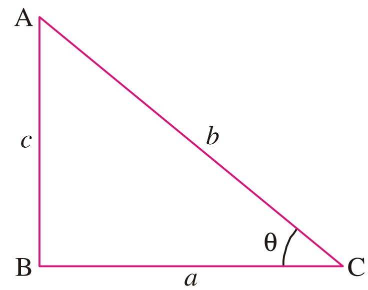
आप पिछली कक्षाओं में, त्रिकोणमितीय अनुपातों के बारे में पढ़ चुके हैं। याद कीजिए कि हमने एक समकोण त्रिभुज की भुजाओं के अनुपातों को निम्न प्रकार से परिभाषित किया था :

$$\sin\theta = \frac{c}{b}, \cos\theta = \frac{a}{b}, \tan\theta = \frac{c}{a} \text{ और } \operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{c}, \sec\theta = \frac{b}{a}, \cot\theta = \frac{a}{c}$$

हमने इन त्रिकोणमितीय अनुपातों के बीच में सम्बन्धों को भी स्थापित किया था, जैसे:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta, \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$

अभी तक प्राप्त जानकारी को हम फलनों के रूप में भी बताने का प्रयास करेंगे।



चित्र 3.1

इस पाठ में हम त्रिकोणमितीय विज्ञान को फलनात्मक उपगमन (Functional Approach) का उपयोग करते हुए विकसित करेंगे। हम इकाई वृत्त का उपयोग करते हुए, त्रिकोणमितीय फलनों की अवधारणा को विकसित करेंगे। हम कोण की रेडियन माप का वर्णन करेंगे और त्रिकोणमितीय फलनों को परिभाषित करेंगे। जैसे: $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x, y = a\sin x, y = b\cos x$ इत्यादि, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं। हम $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$, $y = \cot x, y = \sec x, y = \operatorname{cosec} x$, $y = a\sin x, y = a\cos x$ इत्यादि जैसे फलनों का आलेख भी खीचेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- धनात्मक तथा ऋणात्मक कोणों को परिभाषित करना
- डिग्री और रेडियन को एक कोण की माप के रूप में परिभाषित करना
- एक कोण की माप को डिग्री से रेडियन में तथा रेडियन से डिग्री में बदलना
- सूत्र $\ell = r\theta$ को बताना, जबकि r तथा θ के सामान्य अर्थ हैं
- सम्बन्ध $\ell = r\theta$ का उपयोग करते हुए, प्रश्नों को हल करना
- एक वास्तविक संख्या के त्रिकोणमितीय फलन को परिभाषित करना
- त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों को खींचना और
- त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों से निष्कर्ष निकालना

पूर्व ज्ञान

- एक कोण की परिभाषा
- सरल कोण, समकोण और संपूर्ण कोण की अवधारणाएँ
- वृत्त और उससे सम्बन्धित अवधारणायें
- विशेष गुणनफलः $(a \pm b)^2 = a^2 + b^2 \pm 2ab$, $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3 \pm 3ab\,(a \pm b)$
- पाइथागोरस प्रमेय और पाइथागोरीय संख्याओं का ज्ञान

3.1 एक कोण की वृत्तीय माप

एक कोण दो किरणों का सम्मिलन है जिनका प्रारम्भिक बिन्दु उभयनिष्ठ होता है। कोण किरण के प्रारम्भिक बिन्दु के गिर्द घूमने से भी बनता है। ऋणात्मक या धनात्मक कोणों का बनना किरण के दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाव पर निर्भर करता है।

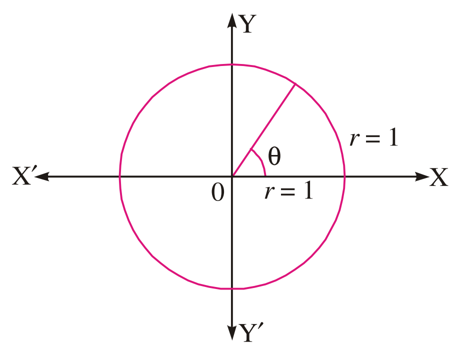
3.1.1 इकाई वृत्त

ऐसा देखा जा सकता है कि जब एक रेखाखण्ड प्रारम्भिक बिन्दु के गिर्द एक चक्र पूरा करता है, तो उसका अन्त बिन्दु एक वृत्त बनाता है। यदि इस रेखाखंड की लम्बाई एक इकाई हो, तो वृत्त के अर्धव्यास की लम्बाई भी एक इकाई होगी और वृत्त एक इकाई वृत्त कहलाएगा।

3.1.2 रेडियन

अंश या डिग्री माप के अतिरिक्त रेडियन, कोण माप का दूसरा मात्रक है। रेडियन वृत्त के केन्द्र पर बने कोण को मापने की इकाई है, जब यह कोण वृत्त के केन्द्र पर अर्धव्यास (r) के तुल्य चाप से बना हो।

जब एक इकाई चाप द्वारा इकाई वृत्त के केन्द्र पर एक कोण बनाया जाता है, तो उसकी माप एक रेडियन होती है।



चित्र 3.2

टिप्पणी: रेडियन एक अचर माप का कोण होता है अर्थात् एक वृत्त का चाप, जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो, के द्वारा केन्द्र पर बनाए गए कोण की माप हमेशा समान होती है, चाहे वृत्त की त्रिज्या जो भी हो।

3.1.3 अंश (डिग्री) और रेडियन कोणों में सम्बंध

यदि इकाई चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण की माप 1 रेडियन है, तो वृत्त की परिधि 2π द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बने कोण की माप 2π रेडियन है। $(\because r = 1)$

$\therefore$ 2π रेडियन $= 360°$ $\Rightarrow \pi$ रेडियन $= 180°$

$$\frac{\pi}{2} \text{ रेडियन } = 90° \Rightarrow \frac{\pi}{4} \text{ रेडियन } = 45°$$

और $1 \text{ रेडियन} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ}$ या $1° = \frac{2\pi}{360}$ रेडियन $= \frac{\pi}{180}$ रेडियन

उदाहरण 3.1. बदलिए :

(i) 90° को रेडियन में (ii) 15° को रेडियन में

(iii) $\frac{\pi}{6}$ रेडियन को अंश में (iv) $\frac{\pi}{10}$ रेडियन को अंश में

हल : (i) $1° = \frac{2\pi}{360}$ रेडियन $\Rightarrow 90° = \frac{2\pi}{360} \times 90$ रेडियन या $90° = \frac{\pi}{2}$ रेडियन

(ii) $15° = \frac{2\pi}{360} \times 15$ रेडियन या $15° = \frac{\pi}{12}$ रेडियन

(iii) $1 \text{ रेडियन} = \left(\frac{360}{2\pi}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन} = \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{6}\right)^{\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन} = 30°$

(iv) $\frac{\pi}{10} \text{ रेडियन} = \left(\frac{360}{2\pi} \times \frac{\pi}{10}\right)^{\circ}$ या $\frac{\pi}{10}$ रेडियन $= 18°$

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. निम्नलिखित कोणों (अंश में) को रेडियन में बदलिये :

   (i) 60° (ii) 15° (iii) 75° (iv) 105° (v) 270°

2. निम्नलिखित कोणों को अंश (डिग्री) में बदलिये :

   (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $\frac{\pi}{12}$ (iii) $\frac{\pi}{20}$ (iv) $\frac{\pi}{60}$ (v) $\frac{2\pi}{3}$

3. एक त्रिभुज के कोण $45°, 65°$ और $70°$ है। इन कोणों को रेडियन में व्यक्त कीजिए।

4. एक चतुर्भुज के तीन कोण $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}$ और $\frac{2\pi}{3}$ हैं। चतुर्भुज के चौथे कोण को रेडियन में ज्ञात कीजिए।

5. $\frac{\pi}{6}$ का पूरक कोण रेडियन में ज्ञात कीजिए।

3.1.4 चाप की लम्बाई और वृत्त की त्रिज्या के बीच सम्बंध

एक त्रिज्या कोण (एक रेडियन का कोण) केन्द्र पर उस चाप द्वारा बनाया जाता है, जिसकी लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो। दो रेडियन का कोण केन्द्र पर उस चाप द्वारा बनाया जाता है जिसकी लम्बाई त्रिज्या से दुगुनी हो, यदि चाप की माप त्रिज्या की 2½ गुनी हो, तो कोण की माप 2½ रेडियन होगी। उपरोक्त सभी कुछ को हम इस सारणी से पढ़ सकते हैं:

चाप की लम्बाई (l)	वृत्त (त्रिज्या $= r$) के केन्द्र पर बना कोण θ (रेडियन में)
r	1
2r	2
(2½)r	2½
4r	4

इसलिए, $\theta = \frac{\ell}{r}$ या $\ell = r\theta$ जबकि r = त्रिज्या,

$\theta =$ केन्द्र पर बना कोण (रेडियन में) और $\ell =$ चाप की लम्बाई

अतः, हम कह सकते है कि **केन्द्र पर बना कोण, चाप की लम्बाई और वृत्त की त्रिज्या के अनुपात के बराबर होता है।**

टिप्पणी: उपरोक्त संबन्ध पर पहुँचने के लिए हमने कोण के रेडियन माप का उपयोग किया है न कि अंश माप का। इस प्रकार, संबंध $\theta = \frac{\ell}{r}$ केवल तभी मान्य है, जब कोण को रेडियन में मापा गया हो।

उदाहरण 3.2. 10 सेमी लम्बाई वाले चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाये गये कोण की माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि वृत्त की त्रिज्या 35 सेमी है।

हल : $\ell = 10$ सेमी॰ और $r = 35$ सेमी

$$\theta = \frac{\ell}{r} \text{ रेडियन या } \theta = \frac{10}{35} \text{ रेडियन या } \theta = \frac{2}{7} \text{ रेडियन}$$

उदाहरण 3.3. एक वृत्तीय पटरी पर एक रेल सड़क वक्र बनाना है। इस वृत्तीय पटरी का अर्धव्यास क्या होगा, यदि रेल सड़क वक्र 500 मी की दूरी में 45° का कोण घूमता है ?

हल : कोण θ डिग्री में दिया हुआ है। सूत्र $\ell = r\theta$ का उपयोग करने के लिए, पहले कोण θ को रेडियन में बदलना होगा।

$$\theta = 45^\circ = 45 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन } = \frac{\pi}{4} \text{ रेडियन} \qquad ....(1)$$

अब $\ell = 500$ मी ....(2)

$$\ell = r\,\theta \Rightarrow r = \frac{\ell}{\theta} \qquad \therefore\ r = \frac{500}{\frac{\pi}{4}} \text{ [(1) और (2) के प्रयोग से]}$$

$$= 500 \times \frac{4}{\pi} \text{ मी } = 2000 \times 0.32 \text{ मी } \left(\frac{1}{\pi} = 0.32\right) = 640 \text{ मी}$$

उदाहरण 3.4. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी पर 60 किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यदि वृत्तीय पटरी की त्रिज्या $\frac{5}{6}$ किमी है, तो वह 15 सेकंड में कितने रेडियन का कोण घूम जायेगी।

हल : रेलगाड़ी की चाल 60 किमी प्रति घंटा है। 15 सेकंड में यह गाड़ी $\frac{60\times15}{60\times60}=\frac{1}{4}$ किमी चलेगी।

$\therefore \quad \ell=\frac{1}{4}$ किमी और $r=\frac{5}{6}$ किमी $\qquad \therefore\ \theta=\frac{\ell}{r}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}}$ रेडियन $=\frac{3}{10}$ रेडियन

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. निम्नलिखित कोणों को रेडियन में बदलिये :

   (a) 30° (b) 60° (c) 150°

2. निम्नलिखित कोणों को अंशों (डिग्री) में बदलिये :

   (a) $\frac{\pi}{5}$ (b) $\frac{\pi}{6}$ (c) $\frac{\pi}{9}$

3. यदि वृत्त की त्रिज्या 15 सेमी हो, तो 2.5 सेमी लम्बाई की माप के चाप द्वारा केन्द्र पर बनाये गए कोण की माप अंशों और रेडियनों में ज्ञात कीजिए।

4. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी पर 20 किमी प्रति घंटा की चाल से चल रही है। यदि वृत्तीय पटरी की त्रिज्या $\frac{1}{12}$ किमी हो, तो गाड़ी 3 सेकंड में कितने रेडियन का कोण घूम जाएगी ?

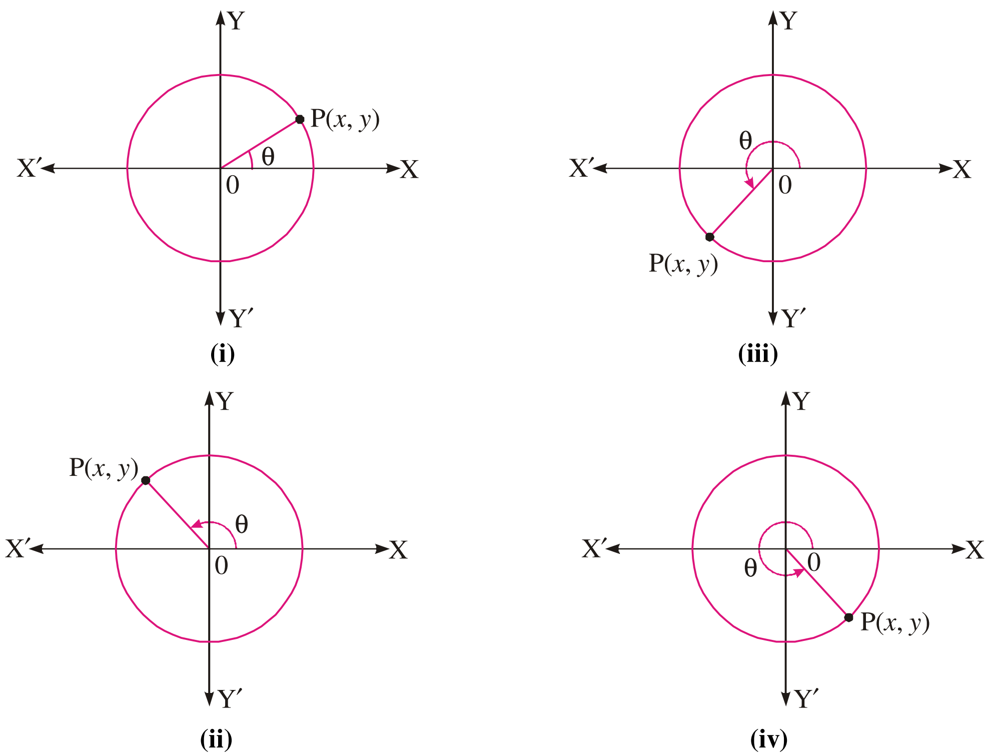
5. एक वृत्तीय पटरी पर एक रेल सड़क वक्र बनाना है। इस वृत्तीय पटरी की त्रिज्या क्या होगी, यदि रेल सड़क वक्र 100 मीटर की दूरी में 60° का कोण घूमता है ?

6. निम्न सारणी को l, r और 'θ' के लिए पूरा कीजिए जहाँ ये सामान्य अर्थ में लिए गए हैं।

	l	r	θ
(a)	1.25 मी	....	135°
(b)	30 सेमी	....	$\frac{\pi}{4}$
(c)	0.5 सेमी	2.5 मी	....
(d)	....	6 मी	120°
(e)	....	150 सेमी	$\frac{\pi}{15}$
(f)	150 सेमी	40 मी	....
(g)	....	12 मी	$\frac{\pi}{6}$
(h)	1.5 मी	0.75 मी	....
(i)	25 मी	....	75°

3.2 त्रिकोणमितीय फलन

इकाई वृत्त की रचना करते समय हमें पता चलता है कि '0' और 2π के बीच की प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए संख्याओं x और y के एक क्रमित युग्म का अस्तित्व होता है। यह क्रमित युग्म (x, y) बिन्दु 'P' के निर्देशांकों को निरूपित करता है।



चित्र 3.3

यदि हम इकाई वृत्त पर $\theta = 0^{\circ}$ पर विचार करें तो हमें एक बिन्दु प्राप्त होगा जिसके निर्देशांक $(1, 0)$ होंगे।

यदि $\theta = \frac{\pi}{2}$ हो, तो इकाई वृत्त पर संगत बिन्दु के निर्देशांक $(0, 1)$ होंगे।

ऊपर दी गई आकृतियों से हमें पता चलता है कि बिन्दु की स्थिति चाहे कुछ भी हो, प्रत्येक वास्तविक संख्या θ के लिए एक अद्वितीय क्रमित युग्म (x, y) होता है। x और y का मान ऋणात्मक या धनात्मक होता है, तथा यह इस बात पर निर्भर करता है कि बिन्दु किस चतुर्थांश में है।

एक इकाई वृत्त में किसी बिन्दु $P(x, y)$ के लिए त्रिकोणमितीय फलन निम्न प्रकार से परिभाषित किए जा सकते हैं :

$$\sin\theta = y, \ \cos\theta = x, \ \tan\theta = \frac{y}{x} \ (\text{जबकि } x \neq 0)$$

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \ (\text{जबकि } y \neq 0), \ \sec\theta = \frac{1}{x} \ (\text{जबकि } x \neq 0), \ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{y} \ (\text{जबकि } y \neq 0)$$

माना कि बिन्दु 'P' अपनी मूल स्थिति से वामावर्त दिशा में गति करता है। तब चारों चतुर्थांशों में बिन्दु 'P' की विभिन्न स्थितियों के लिए, विभिन्न कोण 'θ' बनेंगे। ऊपर की गई चर्चा को हम निम्न प्रकार से भी बता सकते हैं। 'θ' के मान पर निर्भर करते हुए,

I चतुर्थांश में, x और y धनात्मक होंगे।

II चतुर्थांश में, x ऋणात्मक तथा y धनात्मक होगा।

III चतुर्थांश में, x और y ऋणात्मक होंगे।

IV चतुर्थांश में, x धनात्मक तथा y ऋणात्मक होगा।

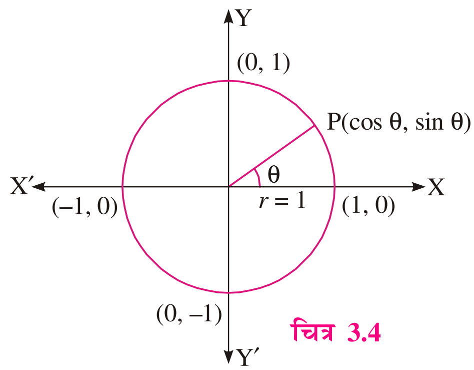
या इस प्रकार लिख सकते हैं :

	I चतुर्थांश	II चतुर्थांश	III चतुर्थांश	IV चतुर्थांश
	सभी धनात्मक	sine धनात्मक	tan धनात्मक	cos धनात्मक
		cosec धनात्मक	cot धनात्मक	sec धनात्मक

किस चतुर्थांश में क्या धनात्मक होगा, इसे याद रखने के लिए निम्न को देखिए :

	सभी	sin	tan	cos
चतुर्थांश	I	II	III	IV

यदि एक इकाई वृत्त में एक बिन्दु 'P' के निर्देशांक (x, y) हैं और इस बिन्दु की स्थिति से वास्तविक संख्या 'θ' बनती हो, तब $\sin\theta = y$ और $\cos\theta = x$ होगा। इसका अर्थ है कि बिन्दु के निर्देशांक $(\cos\theta, \sin\theta)$ भी लिखे जा सकते हैं।



चित्र 3.4

आकृति 3.4 में, आप देखेंगे कि जब बिंदु 'P' इकाई वृत्त पर गति करता है, तो x का मान '–1' और '+1' के बीच में स्थित होता है साथ ही 'y' की स्थिति में भी ऐसी ही होती है।

इस प्रकार, इकाई वृत्त पर, प्रत्येक 'P' के लिए $-1 \le x \le 1$ और $-1 \le y \le 1$ इससे हम निष्कर्ष निकालते हैं कि 'θ' के प्रत्येक मान के लिए, $-1 \le \cos\theta \le 1$ और $-1 \le \sin\theta \le 1$

अर्थात् $\cos\theta$ और $\sin\theta$ के मान कभी भी '1' से अधिक नहीं हो सकते हैं, तथा –1 से कम नहीं हो सकते।

उदाहरण 3.5. निम्नलिखित फलनों के चिह्न ज्ञात कीजिये :

$$\text{(i)}\ \sin\frac{7\pi}{18} \quad \text{(ii)}\ \cos\frac{4\pi}{9} \quad \text{(iii)}\ \tan\frac{5\pi}{9}$$

हल : (i) क्योंकि $\frac{7\pi}{18}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\sin\frac{7\pi}{18}$ का चिह्न धनात्मक होगा।

(ii) क्योंकि $\frac{4\pi}{9}$ प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\cos\frac{4\pi}{9}$ का चिह्न धनात्मक होगा।

(iii) क्योंकि $\frac{5\pi}{9}$ द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\tan\frac{5\pi}{9}$ का चिह्न ऋणात्मक होगा।

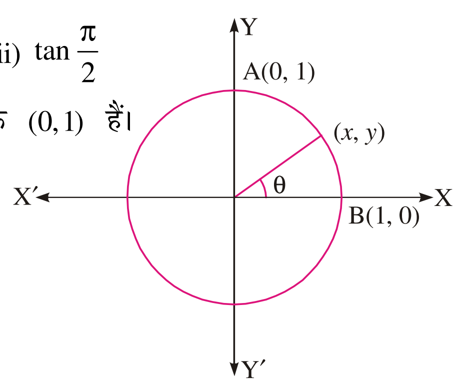
उदाहरण 3.6. मान ज्ञात कीजिए : (i) $\sin\frac{\pi}{2}$ (ii) $\cos 0$ (iii) $\tan\frac{\pi}{2}$

हल : चित्र 3.5 में, हम देखते हैं कि बिन्दु 'A' के निर्देशांक $(0, 1)$ हैं।

$\therefore \quad \sin\frac{\pi}{2} = 1$, क्योंकि $\sin\theta = y$ है।

(ii) बिन्दु 'B' के निर्देशांक $(1, 0)$ हैं।

$\therefore \ \cos 0 = 1$, क्योंकि $\cos\theta = x$ है।



चित्र 3.5

(iii) $\tan\frac{\pi}{2} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{0}$, जो परिभाषित नहीं है।

अतः, $\tan\frac{\pi}{2}$ परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 3.7. $\cos\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान लिखिए।

हल : हम जानते हैं कि $-1 \le \cos\theta \le 1$ होता है

$\therefore$ $\cos\theta$ का अधिकतम मान '1' है और न्यूनतम मान '–1' है।

देखें आपने कितना सीखा 3.3

1. निम्नलिखित के चिह्न ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (ii) $\tan\frac{5\pi}{6}$ (iii) $\sec\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\sec\frac{35\pi}{18}$

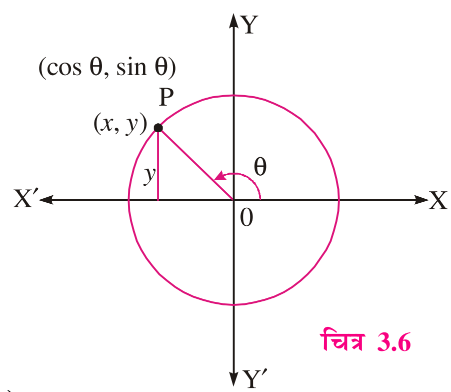
(v) $\tan\frac{25\pi}{18}$ (vi) $\cot\frac{3\pi}{4}$ (vii) $\operatorname{cosec}\frac{8\pi}{3}$ (viii) $\cot\frac{7\pi}{8}$

2. निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिये :

(i) $\cos\frac{\pi}{2}$ (ii) $\sin 0$ (iii) $\cos\frac{2\pi}{3}$ (iv) $\tan\frac{3\pi}{4}$

(v) $\sec 0$ (vi) $\tan\frac{\pi}{2}$ (vii) $\tan\frac{3\pi}{2}$ (viii) $\cos 2\pi$

3.2.1 त्रिकोणमितीय फलनों में सम्बन्ध



चित्र 3.6

परिभाषा के अनुसार, $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$

क्योंकि $\tan\theta = \frac{y}{x}$, $(x \ne 0)$ है, इसलिए

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \theta \ne \frac{n\pi}{2},\ n \in z$$

और $$\cot\theta = \frac{x}{y},\ (y \ne 0)$$

अर्थात् $$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\tan\theta} \quad (\theta \ne n\pi)$$

इसी प्रकार, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\left(\theta \ne \frac{n\pi}{2}\right)$ और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $(\theta \ne n\pi)$

पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग कर के, हमें प्राप्त होता है : $x^2 + y^2 = 1$

अर्थात् $(\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2 = 1$ या $\mathbf{\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1}$

टिप्पणी: $(\cos\theta)^2$ को $\cos^2\theta$ और $(\sin\theta)^2$ को $\sin^2\theta$ लिखा जाता है।

पुनः $x^2+y^2=1$ या $1+\left(\frac{y}{x}\right)^2=\left(\frac{1}{x}\right)^2$, $x\neq 0$ के लिए या, $1+(\tan\theta)^2=(\sec\theta)^2$

अर्थात् $\mathbf{\sec^2\theta=1+\tan^2\theta}$

इसी प्रकार, $\mathbf{\operatorname{cosec}^2\theta=1+\cot^2\theta}$

उदाहरण 3.8. सिद्ध कीजिये कि $\sin^4\theta+\cos^4\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$

हल : बायाँ पक्ष $=\sin^4\theta+\cos^4\theta$ $=\sin^4\theta+\cos^4\theta+2\sin^2\theta\cos^2\theta-2\sin^2\theta\ \cos^2\theta$

$=\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta=1-2\sin^2\theta\cos^2\theta$ $\left(\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\right)$

$=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 3.9. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sec\theta-\tan\theta$

हल : बायाँ पक्ष $=\sqrt{\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}}=\sqrt{\frac{(1-\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{1-\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\sec\theta-\tan\theta=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 3.10. यदि $\sin\theta=\frac{21}{29}$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\sec\theta+\tan\theta=-2\frac{1}{2}$ है, जबकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है।

हल : $\sin\theta=\frac{21}{29}$ हम जानते हैं कि $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

$\Rightarrow\quad \cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\frac{441}{841}=\frac{400}{841}=\left(\frac{20}{29}\right)^2$

$\Rightarrow\quad \cos\theta=\frac{-20}{29}$ ($\cos\theta$ ऋणात्मक होगा, क्योंकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है)

$\therefore\quad \tan\theta=-\frac{21}{20}$ ($\tan$ ऋणात्मक होगा, क्योंकि 'θ' द्वितीय चतुर्थांथ में स्थित है)

$\therefore\quad \sec\theta+\tan\theta=\frac{-29}{20}+\frac{-21}{20}=\frac{-29-21}{20}=-\frac{5}{2}=-2\frac{1}{2}=$ दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 3.4

1. सिद्ध कीजिये कि $\sin^4\theta-\cos^4\theta=\sin^2\theta-\cos^2\theta$

2. यदि $\tan\theta=\frac{1}{2}$ हो, तो शेष 5 त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिये। यदि 'θ' प्रथम चतुर्थांश में स्थित हैं।

3. यदि $\operatorname{cosec}\theta = \frac{b}{a}$ हो, तो शेष 5 त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिये, जबकि θ पहले चतुर्थांश में स्थित है।

4. सिद्ध कीजिये कि $\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

5. यदि $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = 1.5$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि $\cos\theta = \frac{5}{13}$

6. यदि $\tan\theta + \sec\theta = m$ हो, तो $\cos\theta$ का मान ज्ञात कीजिये।

7. सिद्ध कीजिये कि $(\tan A + 2)(2\tan A + 1) = 5\tan A + 2\sec^2 A$

8. सिद्ध कीजिये कि $\sin^6\theta + \cos^6\theta = 1 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta$

9. सिद्ध कीजिये कि $\frac{\cos\theta}{1-\tan\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cot\theta} = \cos\theta + \sin\theta$

10. सिद्ध कीजिये कि $\frac{\tan\theta}{1+\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \cot\theta + \operatorname{cosec}\theta \cdot \sec\theta$

11. यदि $\sec x = \frac{13}{5}$ तथा x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है, तो शेष पाँच त्रिकोणमितीय फलनों के मान ज्ञात कीजिए।

3.3 कुछ विशिष्ट वास्तविक संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलन

$0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ और $\frac{\pi}{2}$ के त्रिकोणमितीय फलनों के मान नीचे तालिका में दिए गए हैं :

वास्तविक संख्याएँ → θ / फलन ↓	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	परिभाषित नहीं है

इस तालिका को याद रखने के लिए, sin फलन को निम्न प्रतिरूप में याद रख सकते हैं :

$$\sqrt{\frac{0}{4}}, \sqrt{\frac{1}{4}}, \sqrt{\frac{2}{4}}, \sqrt{\frac{3}{4}}, \sqrt{\frac{4}{4}}$$

इनको सरल करने पर, तालिका में दिए गए मान प्राप्त होंगे। cosines कोसाइनों के मान इसके उलटे क्रम में होते हैं।

उदाहरण 3.11. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}$ (b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

हल : (a) $\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(b) $4\tan^2\frac{\pi}{4}-\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}-\cos^2\frac{\pi}{3}=4(1)^2-(2)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=4-4-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}$

उदाहरण 3.12. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ और $B=\frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये कि

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

हल : बायाँ पक्ष $=\cos(A+B)=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}=0$

दायाँ पक्ष $=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0$

$\therefore$ बायाँ पक्ष = 0 = दायाँ पक्ष

अत: $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

1. मान ज्ञात कीजिये :

(i) $\sin^2\frac{\pi}{6}+\tan^2\frac{\pi}{4}+\tan^2\frac{\pi}{3}$ (ii) $\sin^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{6}+\sec^2\frac{\pi}{4}-\cos^2\frac{\pi}{3}$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{2\pi}{3}\sin\frac{\pi}{3}$ (iv) $4\cot^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}+\sec^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{4}$

(v) $\left(\sin\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{4}$

2. दर्शाइए कि : $\left(1+\tan\frac{\pi}{6}\tan\frac{\pi}{3}\right)+\left(\tan\frac{\pi}{6}-\tan\frac{\pi}{3}\right)=\sec^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3}$

3. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ और $B=\frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये :

(i) $\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$ (ii) $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

4. यदि $\theta=\frac{\pi}{4}$ हो, तो निम्नलिखित को सत्यापित कीजिये : (i) $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$

(ii) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=1-2\sin^2\theta$

5. यदि $A=\frac{\pi}{6}$ हो, तो सत्यापित कीजिये :

(i) $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ (ii) $\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ (iii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

3.4 त्रिकोणमितीय फलनों के आलेख

किसी दिए गए फलन को शीघ्रता से समझने में चित्र या आलेखीय निरूपण सीखने वाले व देखने वाले के मस्तिष्क पर एक अमिट छाप बना देते हैं। फलन के आलेख के महत्वपूर्ण होने का कारण है कि इससे फलन के बहुत से गुण सुविधाजनक रूप में प्रस्तुत किये जा सकते हैं। आलेख को देखकर हम फलन के बहुत से गुणों की जाँच कर सकते है, जैसे–

(i) आवर्तिता (ii) अन्तराल जिसमें फलन वर्धमान (increasing) या ह्रासमान (decreasing) है।

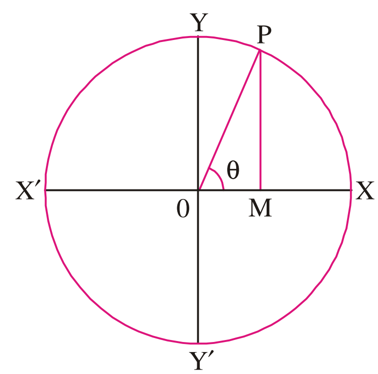
(iii) अक्षों के परित सममिति (iv) आलेख के दिए गए अन्तराल में अधिकतम व न्यूनतम बिन्दु

यह आलेख के वक्रों के द्वारा परिबद्ध भागों के क्षेत्रफलों को आसानी से ज्ञात करने में भी सहायता करता है।

3.4.1 $\sin\theta$ का आलेख, जबकि 'θ' का मान सतत 0 से 2π तक परिवर्तित (विचरित) होता है।

माना $X'OX$ और $Y'OY$ निर्देशांक अक्ष हैं।

केन्द्र 'O' और त्रिज्या (अर्द्धव्यास) OP = इकाई लेकर एक वृत्त खींचिए।



चित्र 3.7

माना OP, OX से आरम्भ करके वामावर्त दिशा में गतिमान है तथा x-अक्ष के साथ 'θ' कोण बनाती है, अर्थात् $\angle XOP = \theta$ । $PM \perp X'OX$ खींचिए। तब $\sin\theta = MP$ होगा, क्योंकि $OP = 1$।

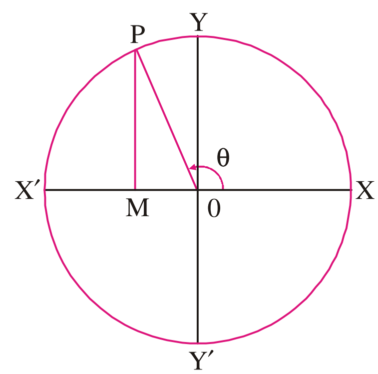
$\therefore$ $\sin\theta$ और MP के विचरण एक समान हैं।

I चतुर्थांश

जब 'θ', 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक सतत् बढ़ता है, तब MP धनात्मक है और यह 0 से 1 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\sin\theta$ धनात्मक है।

II चतुर्थांश $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$

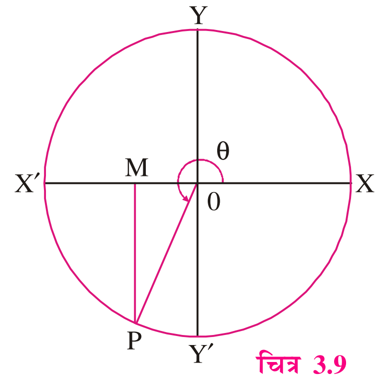


चित्र 3.8

इस अन्तराल में, θ दूसरे चतुर्थांश में होता है। इसलिए बिन्दु 'P' भी केवल दूसरे चतुर्थांश में आता है। यहाँ भी $PM = y$ धनात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे 'θ', $\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है इसका मान '1' से '0' तक कम होता जाता है । अत: इस अन्तराल में $\sin\theta$ धनात्मक होता है।

III चतुर्थांश $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

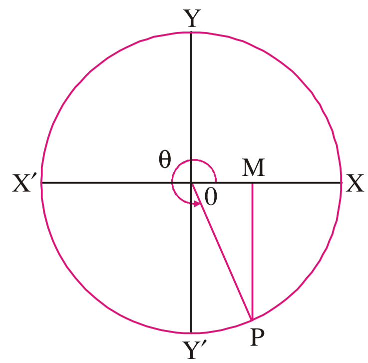
इस अन्तराल में, 'θ' तीसरे चतुर्थांश में होता है। अतः बिन्दु 'P' केवल तीसरे चतुर्थांश में ही रहता है। इसलिए $PM = y$ ऋणात्मक है और जैसे-जैसे 'θ' का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है इसका मान '0' से –1 तक घटता जाता है। इस अन्तराल में $\sin\theta$ का मान '0' से – 1 तक घटता जाता है। अतः, इस अन्तराल में $\sin\theta$ ऋणात्मक होता है।



चित्र 3.9

IV चतुर्थांश $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

इस अन्तराल में, θ चौथे चतुर्थांश में होता है। इसलिए, बिन्दु P केवल इस चौथे चतुर्थांश में ही रहता है। यहाँ भी $PM = y$ ऋणात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे 'θ' का मान $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है –1 से 0 तक बढ़ता है । अतः, इस अन्तराल में $\sin\theta$ ऋणात्मक होता है।

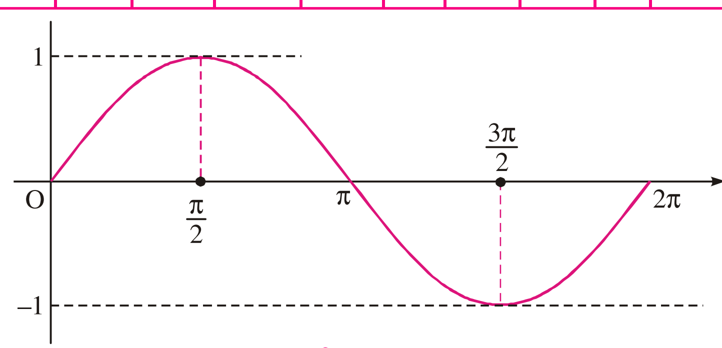


चित्र 3.10

3.4.2 sin θ का आलेख जब θ का मान '0' से 2π तक विचरण करता है।

माना $X'OX$ तथा $Y'OY$ इस संदर्भ में दो निर्देशांक अक्ष हैं। θ के मानों को x-अक्ष के अनुदिश तथा $\sin\theta$ के मानों को y-अक्ष के अनुदिश मापा जायेगा। ($\sqrt{2}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$ और $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के लगभग मान क्रमशः 1.41, .707 और .87 हैं।)

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	.5	.87	1	.87	.5	0	–.5	–.87	–1	–.87	–.5	0



चित्र 3.11

कुछ प्रेक्षण:

(i) $\sin\theta$ का अधिकतम मान 1 है।

(ii) $\sin\theta$ का न्यूनतम मान – 1 है।

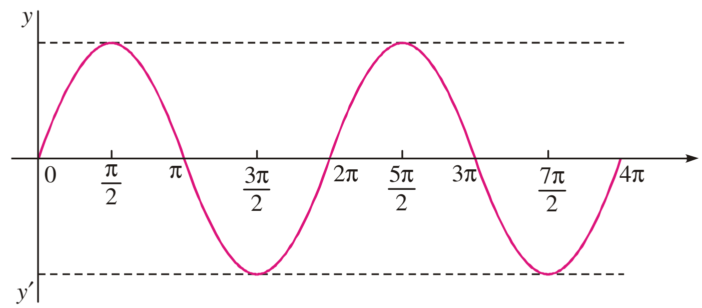
(iii) यह सभी स्थान पर सतत (continuous) है।

(iv) यह 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक तथा $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक वर्धमान है तथा $\frac{\pi}{2}$ से $\frac{3\pi}{2}$ तक ह्रासमान है।

चित्र 3.11 के आलेख की सहायता से हम सदैव $y = \sin\theta$ का एक अन्य आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में खींच सकते हैं (देखिये चित्र 3.12)।

आप क्या देखते हैं?

$y = \sin\theta$ का आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में वही है, जो $\sin\theta$ का आलेख 0 से 2π के अन्तराल में है। अत: इस आलेख को गुण $\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$ का उपयोग करके खींचा जा सकता है। जब 'θ' के मान में '2π' की वृद्धि की जाती है, तब $\sin\theta$ के मानों की पुनरावृति होती है। यही $\sin\theta$ की आवर्तित (Periodicity) कहलाता है।



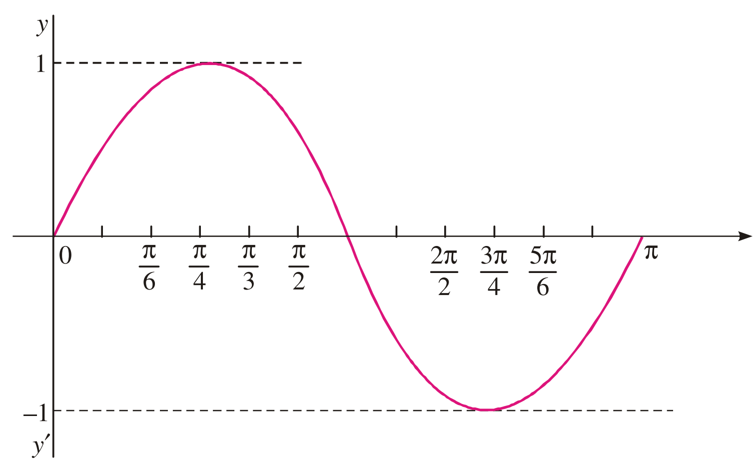
चित्र 3.12

हम इस आवर्तिता (Periodicity) के बारे में पूरी चर्चा इस पाठ में बाद में करेंगे।

उदाहरण 3.13. $y = \sin 2\theta$ का आलेख खींचिए।

हल :

θ :	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ :	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\sin 2\theta$:	0	.87	1	.87	0	–.87	–1	–.87	0



चित्र 3.13

यह आलेख उसी प्रकार का है, जैसा $y = \sin\theta\ 0 \le \theta \le 2\pi,$ का था।

कुछ प्रेक्षण:

1. $\sin\theta$ के अन्य आलेखों, जैसे $a\sin\theta$, $3\sin 2\theta$, को भी इसी विधि द्वारा खींचा जा सकता है।

2. $\sin\theta$ के आलेख, अन्य अन्तरालों जैसे $[4\pi, 6\pi]$, $[-2\pi, 0]$, $[-4\pi, -2\pi]$ में भी आसानी से खींचे जा सकते हैं। यह सम्बद्ध कोणों के गुणों जैसे $\sin(\theta + 2\pi) = \sin\theta$, $\sin(\theta - 2\pi) = \sin\theta$, आदि का उपयोग करके किया जा सकता है। अर्थात् 'θ' के मानों में जब 2π की वृद्धि या कमी की जाती है, तो $\sin\theta$ की पुनरावृति होती है।

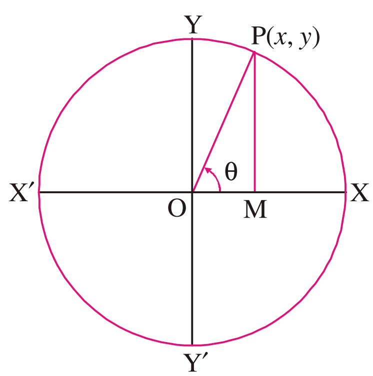
देखें आपने कितना सीखा 3.6

1. अंतराल $[0, 2\pi]$ में $\sin\theta$ के अधिकतम और न्यूनतम मान क्या है ?
2. अंतराल $[0, 2\pi]$ में $\sin\theta$ के आलेख में सममिति को स्पष्ट कीजिए।
3. $y = 2\sin\theta$ का अन्तराल $[0, \pi]$ में आलेख खींचिए।
4. अंतराल $[\pi, 2\pi]$ में θ के किस मान के लिए $\sin\theta$ का मान

   (a) $-\frac{1}{2}$ होगा ? (b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ होगा ?
5. अन्तराल $[-\pi, \pi]$ में $y = \sin x$ का आलेख खींचिए।

3.4.3 $\cos\theta$ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

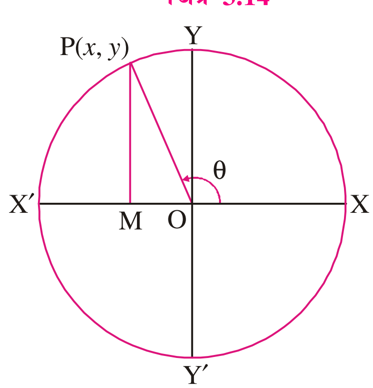
$\sin\theta$ की तरह हम $\cos\theta$ के मानों में परिवर्तन पर भी चर्चा करेंगे, जब θ के मान अन्तरालों $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ और $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ में हैं।



चित्र 3.14

I चतुर्थांश : अन्तराल $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ में, बिन्दु P प्रथम चतुर्थांश में आता है। इसलिए $OM = x$ धनात्मक है, परन्तु जैसे-जैसे θ का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है, x का मान 1 से 0 तक घटता है। इस प्रकार, इस अन्तराल में $\cos\theta$, 1 से 0 तक घटता है (चित्र 3.14)।

$\therefore$ $\cos\theta$ इस चतुर्थांश में धनात्मक है।



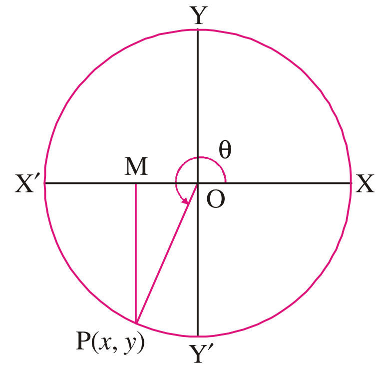
चित्र 3.15

II चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ में, बिन्दु P दूसरे चतुर्थांश में आता है। इसलिए बिन्दु M, x-अक्ष के ऋणात्मक भाग में स्थित है। अत: इस स्थिति में, $OM = x$ ऋणात्मक है और 0 से -1 तक कम होता है, जैसे-जैसे θ, $\frac{\pi}{2}$ से π तक बढ़ता है। अत: इस अन्तराल में $\cos\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है।

$\therefore$ $\cos\theta$ ऋणात्मक है।

III चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ में, बिन्दु P तीसरे चतुर्थांश में आता है, इसलिए $OM = x$ ऋणात्मक रहता है, क्योंकि यह x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा की ओर है। इसलिए $OM = x$ ऋणात्मक है, परन्तु -1 से 0 तक बढ़ता है, जैसे-जैसे θ का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक बढ़ता है। इसलिए इस अन्तराल में $\cos\theta$, -1 से 0 तक बढ़ता है।

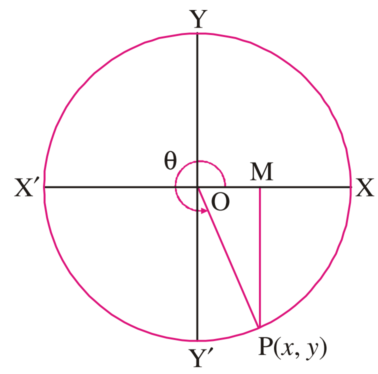
$\therefore$ $\cos\theta$ ऋणात्मक है।



चित्र 3.16

IV चतुर्थांश : अन्तराल $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ में, बिन्दु P चौथे चतुर्थांश में आता है और M, x-अक्ष की धनात्मक दिशा की ओर चलता है। इसलिए $OM = x$ धनात्मक है। जैसे-जैसे θ का मान $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक बढ़ता है, यह 0 से 1 तक बढ़ता है। इस प्रकार, इस अन्तराल में $\cos\theta$, 0 से 1 तक बढ़ता है।

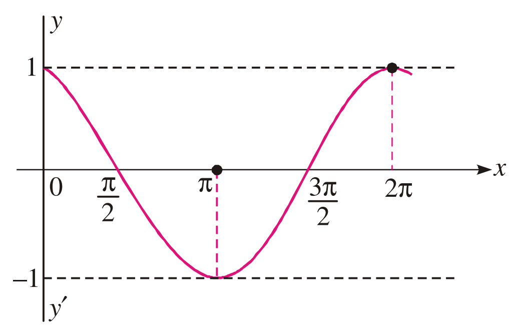
$\therefore$ $\cos\theta$ धनात्मक है।



चित्र 3.17

आइए हम θ के कुछ उपर्युक्त मानों के लिए कोसाइनों के मानों की सारणी बनाएँ।

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cos\theta$	1	.87	.5	0	–0.5	–.87	–1	–.87	–.5	0	0.5	.87	1



चित्र 3.18

जबकि X'OX और Y'OY दोनो अक्ष हैं। θ के मान x-अक्ष के अनुदिश मापे जाते हैं तथा $\cos\theta$ के मान y-अक्ष के अनुदिश मापे जाते हैं।

कुछ प्रेक्षणः

(i) $\cos\theta$ का अधिकतम मान = 1

(ii) $\cos\theta$ का न्यूनतम मान = – 1

(iii) यह प्रत्येक स्थान पर सतत् है।

(iv) $\cos(\theta + 2\pi) = \cos\theta$. तथा $\cos(\theta - 2\pi) = \cos\theta$

इसलिए $\cos\theta$ के मान की पुनरावृत्ति होती है, जब θ में 2π की वृद्धि होती है या कमी की जाती है। यह $\cos\theta$ की आवर्तिता कहलाती है, जिसके बारे में हम इस पाठ में बाद में चर्चा करेंगे।

(v) अन्तराल $[2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], [-2\pi, 0]$ में $\cos\theta$ का आलेख उसी प्रकार का होगा, जैसे अन्तराल $[0, 2\pi]$ में होता है।

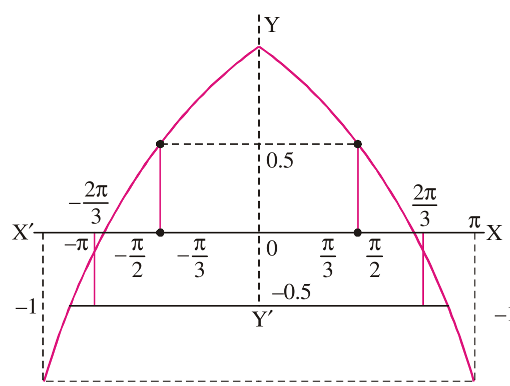
उदाहरण 3.14. $\cos\theta$ का आलेख खींचिए, जब θ, $-\pi$ से π तक विचरण करता है। आलेख से θ के मान पढ़िये जब $\cos\theta = \pm 0.5$ हों।

हलः

θ :	$-\pi$	$\frac{-5\pi}{6}$	$\frac{-2\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\cos\theta$:	–1.0	–0.87	–0.5	0	.50	.87	1.0	0.87	0.5	0	–0.5	–0.87	–1

$\cos\theta = 0.5$, जब $\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}$

$\cos\theta = -0.5$, जब $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}$

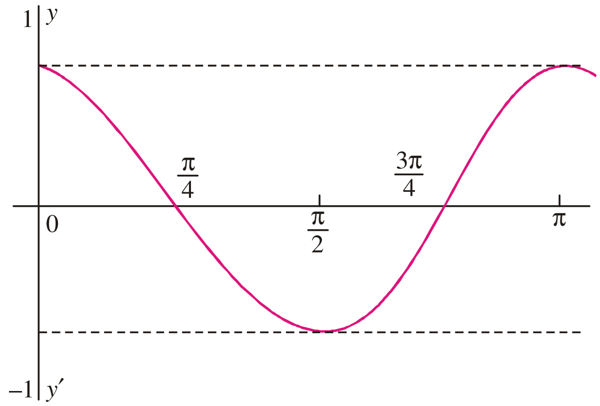


चित्र 3.19

उदाहरण 3.15. अन्तराल 0 से π तक में $\cos 2\theta$ का आलेख खींचिएँ।

हल :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
2θ	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
$\cos 2\theta$	1	0.5	0	–0.5	–1	–0.5	0	0.5	1



चित्र 3.20

देखें आपने कितना सीखा 3.7

1. (a) $y = \cos\theta$ का आलेख खींचिए, जब θ, $-\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{4}$ तक विचरण करता है।

   (b) $y = 3\cos\theta$ का आलेख खीचिए, जब θ, 0 से 2π तक विचरण करता है।

   (c) $y = \cos 3\theta$ का $-\pi$ से π तक आलेख खींचिए तथा इस आलेख से θ के उन मानों को पढ़िए जब $\cos\theta = 0.87$ और $\cos\theta = -0.87$ है।

   (d) क्या $y = \cos\theta$ का आलेख अंतराल $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ में x अक्ष के ऊपर या नीचे स्थित है?

   (e) $y = \cos\theta$ का आलेख अन्तराल $[2\pi, 4\pi]$ में खींचिए।

3.4.4 tan θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

I चतुर्थांश में : $\tan\theta$ को $\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

$\tan\theta$ का व्यवहार $\sin\theta$ और $\frac{1}{\cos\theta}$ पर निर्भर करता है।

I चतुर्थांश में, $\sin\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है और $\cos\theta$ का मान 1 से 0 तक कम होता है।

परन्तु $\frac{1}{\cos\theta}$ का मान 1 से अपरिमित रूप तक बढ़ता है (इसे 1 से ∞ तक बढ़ता है, लिखा जा सकता है) $\therefore \tan\theta > 0$ $\therefore$ $\tan\theta$ का मान 0 से ∞ तक बढ़ता है [$\tan\theta$ की सारणी व आलेख देखिए]

II चतुर्थांश में : $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।

$\cos\theta$ का मान 0 से – 1 तक घटता है।, $\tan\theta$ ऋणात्मक है और इसका मान $-\infty$ से 0 तक बढ़ता है।

III चतुर्थांश में: $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान 0 से –1 तक घटता है।

$\cos\theta$ का मान – 1 से 0 तक बढ़ता है।

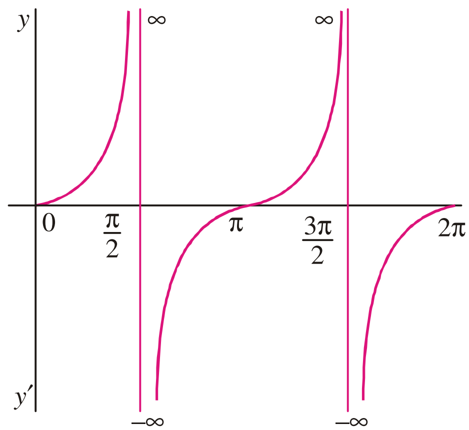
$\therefore$ $\tan\theta$ धनात्मक है और 0 से ∞ तक बढ़ता है।

IV चतुर्थांश में: $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$, $\sin\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है।

$\cos\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है। $\therefore$ $\tan\theta$ ऋणात्मक है और $-\infty$ से 0 तक बढ़ता है।

$\tan\theta$ का आलेख

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0°$	$\frac{\pi}{2}+0°$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0°$	$\frac{3\pi}{2}+0°$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\tan\theta$	0	.58	1.73	$+\infty$	-1.73	-.58	0	.58	1.73	$+\infty$	$-\infty$	-1.73	-.58	0	0



चित्र 3.21

प्रेक्षण:

(i) $\tan(\pi+\theta) = \tan\theta$ इसलिए $\tan\theta$ के पूर्ण आलेख में उपरोक्त आलेख दायीं तथा बायीं दोनो ओर अपरिमित रूप से आवर्तित होता है।

(ii) क्योंकि $\tan(-\theta) = -\tan\theta$ है इसलिए यदि $(\theta, \tan\theta)$ आलेख पर कोई एक बिन्दु है, तो $(-\theta, -\tan\theta)$ भी आलेख पर एक बिन्दु होगा।

(iii) उपरोक्त परिणामों से यह कहा जा सकता है कि $y = \tan\theta$ का आलेख सम्मुख चतुर्थांशों में सममित होता है।

(iv) $\tan\theta$ का कोई भी संख्यात्मक मान, धनात्मक या ऋणात्मक, हो सकता है।

(v) $\tan\theta$ का आलेख असतत है। यह बिन्दुओं $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर विच्छेदित है।

(vi) जब θ इन मानों के बराबर होता है, तब $\tan\theta$ का मान आकस्मिक रूप से $+\infty$ से $-\infty$ बदल जाता है।

3.4.5 cot θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

$\cot\theta$ का व्यवहार $\cos\theta$ और $\dfrac{1}{\sin\theta}$ के व्यवहार पर निर्भर करता है, क्योंकि $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$ है। हम प्रत्येक चतुर्थांश में इसकी चर्चा करेंगे।

I चतुर्थांश : $\cot\theta = \cos\theta \times \dfrac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।, $\sin\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\cot\theta$ का मान भी $+\infty$ से 0 तक घटता है, परन्तु $\cot\theta > 0$ होता है।

II चतुर्थांश : $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है, $\sin\theta$ का मान 1 से 0 तक घटता है।

$\Rightarrow$ $\cot\theta < 0$ या $\cot\theta$ का मान 0 से $-\infty$ तक घटता है।

III चतुर्थांश : $\cos\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है, $\sin\theta$ का मान 0 से -1 तक घटता है।

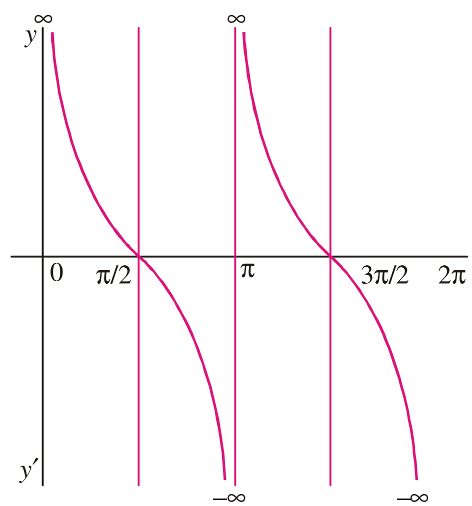
$\therefore$ $\cot\theta$ का मान $+\infty$ से 0 तक घटता है।

IV चतुर्थांश: $\cot\theta = \cos\theta \times \frac{1}{\sin\theta}$, $\cos\theta$ का मान 0 से 1 तक बढ़ता है, $\sin\theta$ का मान -1 से 0 तक बढ़ता है।

$\therefore$ $\cot\theta < 0$ अर्थात् $\cot\theta$ का मान 0 से $-\infty$ तक घटता है।

$\cot\theta$ **का आलेख :**

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cot θ	∞	1.73	.58	0	-.58	-1.73	$-\infty$	$+\infty$	1.73	.58	0	-.58	-1.73	$-\infty$



चित्र 3.22

प्रेक्षण:

(i) क्योंकि $\cot(\pi+\theta) = \cot\theta$, इसलिए $\cot\theta$ के पूर्ण आलेख में, $\theta = 0$ से $\theta = \pi$ या $\theta = \frac{\pi}{2}$ से $\frac{3\pi}{2}$ तक का भाग सम्मिलत होता है।

(ii) $\cot\theta$ का संख्यात्मक मान धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है।

(iii) $\cot\theta$ का आलेख असतत है। यह $\theta = 0, \pi, 2\pi$ पर विच्छेदित है।

(iii) जैसे θ के मान 0, π और 2π होते हैं, वैसे ही $\cot\theta$ आकस्मिक रूप से $-\infty$ से $+\infty$ में परिवर्तित हो जाता है।

देखें आपने कितना सीखा 3.8

1. (a) $\tan\theta$ का अधिकतम मान क्या है ?

   (b) $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर $\tan\theta$ के मान में आप क्या परिवर्तन देखते हैं ?

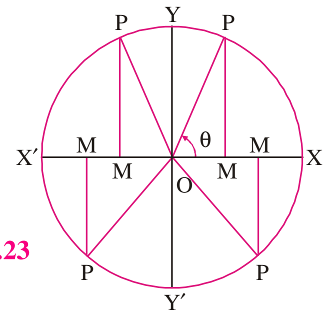
   (c) $-\pi$ से π तक $y = \tan\theta$ का आलेख खींचिए। अपने आलेख से θ का वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए $\tan\theta = 1.7$ ।

2. (a) $\cot\theta$ का अधिकतम मान क्या है ?

   (b) $\cot\theta$ के आलेख से θ का मान ज्ञात कीजिए जब $\cot\theta = -1$ ।

3.4.6 θ के विभिन्न मानों के लिए sec θ के मान ज्ञात कर आलेख खींचना, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

माना $X'OX$ और $Y'OY$ निर्देशांक अक्ष हैं। O को केन्द्र लेकर इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। माना P वृत्त पर एक बिन्दु है। OP को मिलाइए और $PM \perp X'OX$ खींचिए।

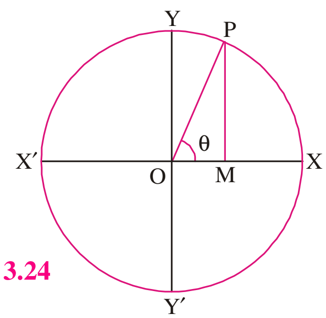


चित्र 3.23

$$\sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{1}{OM}$$

$\therefore$ $\sec\theta$ के मान OM पर निर्भर करेंगे।

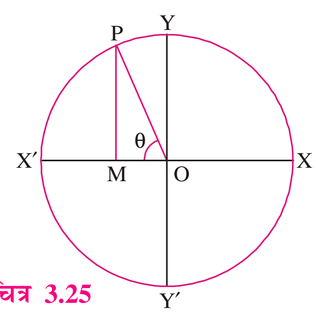
I चतुर्थांश: $\sec\theta$ धनात्मक है, क्योंकि OM धनात्मक है। साथ ही $\sec\theta = 1$ और $\sec\frac{\pi}{2} \to \infty$ है, जब हम $\frac{\pi}{2}$ की ओर दायीं ओर से अग्रसर होते हैं।



चित्र 3.24

$\therefore$ $\sec\theta$ का मान 1 से ∞ तक बढ़ता है, जैसे-जैसे θ का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक बढ़ता है।

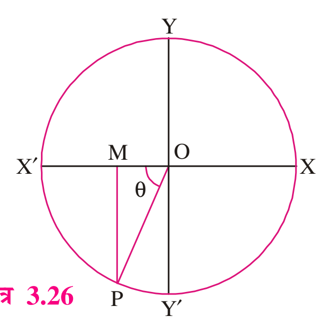
II चतुर्थांश: $\sec\theta$ ऋणात्मक है, क्योंकि OM ऋणात्मक है। $\sec\frac{\pi}{2} \to -\infty$, जब हम $\frac{\pi}{2}$ की ओर बायीं ओर से अग्रसर होते हैं। साथ ही $\sec\pi = -1$ है।



चित्र 3.25

$\therefore$ जब θ का मान $\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है, $\sec\theta$ का मान $-\infty$ से -1 तक बदलता है। ऐसा देखा गया है कि जब θ, $\frac{\pi}{2}$ से होकर गुजर जाता है, $\sec\theta$ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदल जाता है।

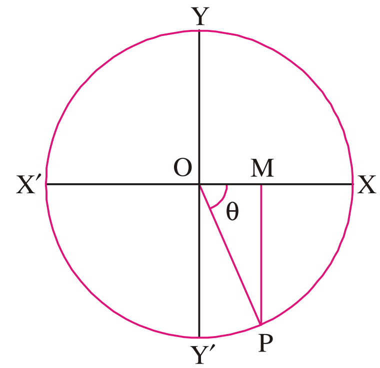
III चतुर्थांश : $\sec\theta$ ऋणात्मक है, क्योंकि OM ऋणात्मक है। $\sec\pi = -1$ और $\sec\frac{3\pi}{2} \to -\infty$ है। जब कोण वामावर्त दिशा में $\frac{3\pi}{2}$ की ओर अग्रसर होता है। $\sec\theta$ का मान -1 से $-\infty$ तक



चित्र 3.26

घटता जाता है, जैसे-जैसे θ का मान π से, $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है।

IV चतुर्थांश: $\sec\theta$ धनात्मक है, क्योंकि OM धनात्मक है।

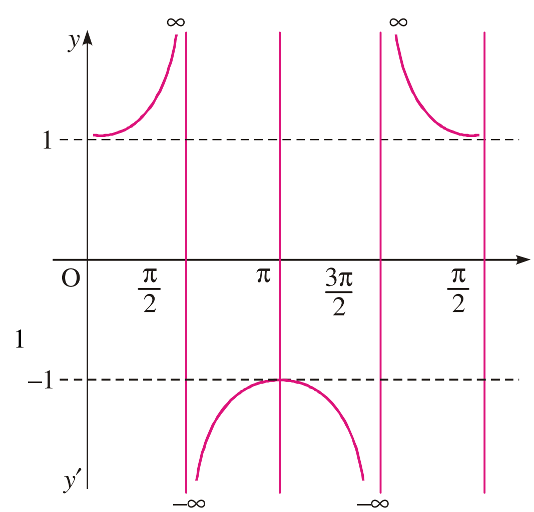


चित्र 3.27

जब θ का मान $\frac{3\pi}{2}$ से कुछ ही बड़ा होता है, तो $\sec\theta$ धनात्मक तथा बहुत बड़ा होता है। साथ ही $\sec 2\pi = 1$ है, अतः $\sec\theta$ का मान ∞ से 1 तक घटता जाता है, जब θ, $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है। यह देखा जा सकता है कि जब θ, $\frac{3\pi}{2}$ से होकर जाता है, तो $\sec\theta$ का मान $-\infty$ से $+\infty$ बदल जाता है

$\sec\theta$ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है।

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}-0$	$\frac{\pi}{2}+0$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}-0$	$\frac{3\pi}{2}+0$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\cot\theta$	1	1.15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$	$+\infty$	2	1.15	



चित्र 3.28

प्रेक्षण:

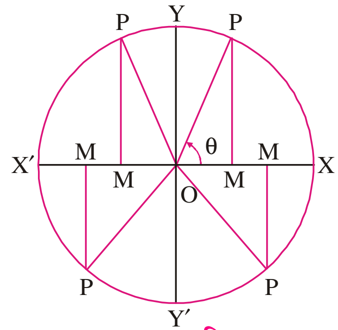
(a) $\sec\theta$ का संख्यात्मक मान '1' से कम नहीं हो सकता है।

(b) $\sec\theta$ का आलेख असतत है। यह $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{3\pi}{2}$ पर असतत (विच्छेदित) है।

(e) जब θ, $\frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2}$ से होकर जाता है, तो $\sec\theta$ आकस्मिक रूप से $+\infty$ से $-\infty$ और $-\infty$ से $+\infty$ में परिवर्तित हो जाता है।

3.4.7 cosec θ का आलेख, जब θ का मान 0 से 2π तक विचरण करता है

माना कि $X'OX$ और $Y'OY$ निदेशांक अक्ष हैं। O केन्द्र मान कर इकाई त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। माना P वृत्त पर कोई एक बिन्दु है। OP को मिलाइए और $PM \perp X'OX$ खींचिए।



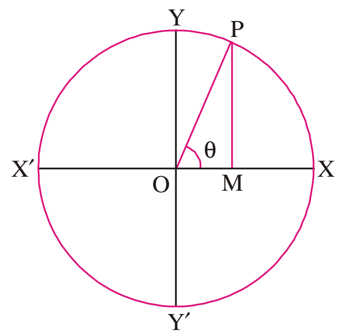
चित्र 3.29

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{MP} = \frac{1}{MP}$$

$\therefore$ $\operatorname{cosec}\theta$ का मान MP पर निर्भर करेगा।

I चतुर्थांश : cosec θ धनात्मक है, क्योंकि MP धनात्मक है।

$\frac{\pi}{2} = 1$ है। जब θ बहुत छोटा होता है, तो MP भी बहुत छोटा होता है और इसीलिए cosec θ का मान बहुत बड़ा होता है।

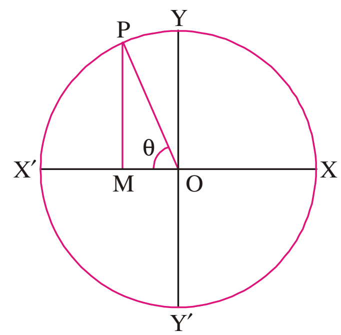


चित्र 3.30

$\therefore$ जैसे-जैसे θ ,0 से $\frac{\pi}{2}$ तक विचरण करता है, वैसे-वैसे cosec θ का मान ∞ से 1 तक घटता जाता है।

II चतुर्थांश : PM धनात्मक है। इसलिए cosec θ धनात्मक है।

$\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2} = 1$ और $\operatorname{cosec}\pi \to \infty$ है, जब घूमने वाली रेखा वामावर्त दिशा में, घूमते हुए π की ओर अग्रसर होती है।



चित्र 3.31

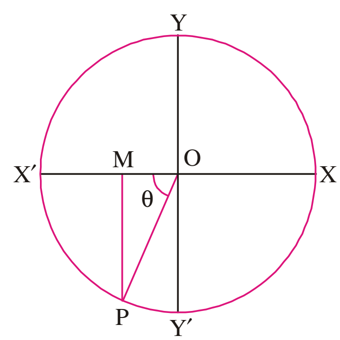
$\therefore$ जब θ , $\frac{\pi}{2}$ से π तक विचरण करता है, तब cosec θ का मान 1 से ∞ तक बढ़ता है।

III चतुर्थांश : PM ऋणात्मक है।

$\therefore$ cosec θ ऋणात्मक है। जब 'θ ' का मान π से कुछ बड़ा होता है, तब cosec θ बहुत बड़ा और ऋणात्मक होता है।

साथ ही $\operatorname{cosec}\frac{3\pi}{2} = -1$ है।

$\therefore$ जैसे-जैसे θ का मान π से $\frac{3\pi}{2}$ तक विचरण करता है, वैसे-वैसे cosec θ का मान $-\infty$ से -1 तक बदलता है। ध्यान दीजिए कि जब θ , π से होकर जाता है, तो cosec θ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदल जाता है।

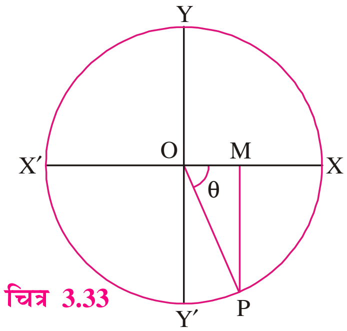


चित्र 3.32

IV चतुर्थांश : PM ऋणात्मक है।

$\therefore$ cosec θ ऋणात्मक है। साथ ही, cosec $\theta = -\infty$, जब θ , 2π की ओर अग्रसर होता है।

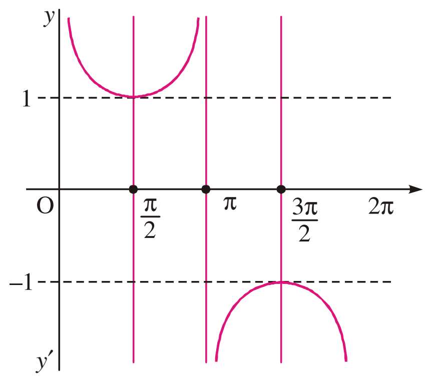
जब θ , $\frac{3\pi}{2}$ से 2π तक विचरण करता है, तब cosec θ का मान -1 से $-\infty$ तक बदलता है।



चित्र 3.33

cosec θ का आलेख :

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi-0$	$\pi+0$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
cosec θ	∞	2	1.15	1	1.15	2	$+\infty$	$-\infty$	-2	-1.15	-1	-1.15	-2	$-\infty$



चित्र 3.34

प्रेक्षण:

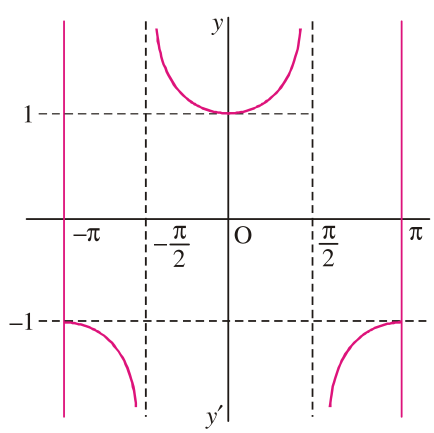
(a) cosec θ का संख्यात्मक मान 1 से कम नहीं हो सकता।

(b) cosec θ का आलेख असतत् है और यह आलेख $\theta = 0, \pi, 2\pi$ पर विच्छेदित है।

(c) जब θ, π से होकर जाता है, तब cosec θ का मान $+\infty$ से $-\infty$ में बदलता है साथ ही 0 और 2π पर यह मान क्रमशः $+\infty$ और $-\infty$ हैं।

उदाहरण 3.16. जब θ, $-\pi$ से π के बीच होता है, तो sec θ के मानों में होने वाले परिवर्तनों का अनुरेखण कीजिए।

हल :



चित्र 3.35

देखें आपने कितना सीखा 3.9

1. (a) जब θ के मान -2π से 2π के बीच में हैं, तो sec θ के मानों में परिवर्तनों का अनुरेखण कीजिए और इन्हीं सीमाओं के बीच में आलेख भी खींचिए।

   (b) -2π से 2π के बीच में θ के मानों के लिए cosec θ का आलेख खींचिए।

3.5 त्रिकोणमितीय फलनों की आवर्तिता

आप अपने दैनिक जीवन में एक नियमित अन्तराल के बाद घटनाओं की पुनरावर्ती देखते हैं। उदाहरणार्थ, सप्ताह के दिन नियमित रूप से 7 दिन के बाद दोबारा आते हैं और वर्ष में प्रत्येक मास 12 महीने के बाद दोबारा आता है। एक गतिमान पहिए पर, एक कण की स्थिति भी इसी प्रकार का उदाहरण है। नियमित अन्तरालों के बाद घटनाओं की पुनरावर्ती हाने के गुण को **आवर्तिता (Periodicity)** कहते हैं।

परिभाषा : एक फलन f(x) आवर्ती कहलाता है, यदि इसका मान चरांक (चर) के मान में किसी स्थिरांक (अचर) की वृद्धि करने पर भी बदलता नहीं है,

अर्थात् यदि सभी x के लिए $f(x+p)=f(x)$ हो।

यदि p इस प्रकार का सबसे छोटा धनात्मक स्थिरांक है, तो यह फलन f(x) का आवर्तकाल कहलाता है।

यदि f(x) एक आवर्ती फलन है,जिसका आवर्तकाल p है, तब $\dfrac{1}{f(x)}$ भी आवर्तकाल p वाला, एक आवर्ती फलन होता है।

3.5.1 त्रिकोणमितीय फलनों के आवर्तकाल

(i) $\sin x=\sin(x+2n\pi)\,;\, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$

(ii) $\cos x=\cos(x+2n\pi)\,;\, n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$

साथ ही, 0 से 2π के बीच में ऐसा कोई 'P' नहीं है, जिसके लिए

$\sin x=\sin(x+p)$, $\cos x=\cos(x+p)$, सभी x के लिए।

$\therefore$ 2π ही वह न्यूनतम धनात्मक मान है, जिसके लिए

$\sin(x+2\pi)=\sin x$ तथा $\cos(x+2\pi)=\cos x$ है।

$\Rightarrow$ sin x तथा cos x में से प्रत्येक का आर्वतकाल 2π है।

(iii) cosec x का आवर्तकाल भी 2π है, क्योंकि cosec $x=\dfrac{1}{\sin x}$ है।

(iv) sec x का आवर्तकाल भी 2π है, क्योंकि sec $x=\dfrac{1}{\cos x}$ है।

(v) $\tan(x+\pi)=\tan x$

माना कि $p(0<p<\pi)$, tan x का आवर्तकाल है। तब $\tan(x+p)=\tan x$, सभी x के लिए। x के स्थान पर 0 रखने पर, $\tan p=0$ है। अर्थात् $p=0$ या π है।

$\Rightarrow$ tan x का आवर्तकाल π है।

$\therefore$ p का ऐसा कोई मान 0 और π के बीच में नहीं हो सकता, जिसके लिए $\tan x = \tan(x+p)$ हो।

$\therefore$ $\tan x$ का आवर्तकाल π है।

(vi) क्योंकि $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ है, इसलिए $\cot x$ का आवर्तकाल भी π है।

उदाहरण 3.17. निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक का आवर्तकाल ज्ञात कीजिए :

(a) $y = 3\sin 2x$ (b) $y = \cos\dfrac{x}{2}$ (c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$

हल : (a) आवर्तकाल $\dfrac{2\pi}{2}$, अर्थात् π।

(b) $y = \cos\dfrac{1}{2}x$ है, इसलिए आवर्तकाल $= \dfrac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$।

(c) $y = \tan\dfrac{x}{4}$ का आवर्तकाल $= \dfrac{\pi}{\frac{1}{4}} = 4\pi$।

देखें आपने कितना सीखा 3.10

1. निम्नलिखित फलनों के आवर्तकाल ज्ञात कीजिए :

(a) $y = 2\sin 3x$ (b) $y = 3\cos 2x$

(c) $y = \tan 3x$ (d) $y = \sin^2 2x$

आइए दोहराएँ

- कोण किरण के घूमने से जनित होता है।
- ऋणात्मक या धनात्मक कोणों का बनना किरण के दक्षिणावर्त या वामावर्त घुमाव पर निर्भर करता है।
- अंश (या डिग्री) कोण को मापने की एक इकाई है और एक पूरा चक्र 360° का कोण बनाता है।
- एक कोण को रेडियन में भी मापा जा सकता है। 360° के तुल्य 2π रेडियन होगा।
- यदि लम्बाई l के चाप द्वारा त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्र पर θ रेडियन का कोण बनता है, तब $l = r\theta$।
- यदि एक इकाई वृत्त के एक बिन्दु P के निर्देशांक (x,y) हों, तो छः त्रिकोणमितीय फलन इस प्रकार से परिभाषित किए जा सकते हैं : $\sin\theta = y$, $\cos\theta = x$, $\tan\theta = \dfrac{y}{x}$, $\cot\theta = \dfrac{x}{y}$, $\sec\theta = \dfrac{1}{x}$ और $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{y}$।

  बिन्दु P के निर्देशांकों (x,y) को $(\cos\theta, \sin\theta)$ के रूप में भी लिखा जा सकता है।

यहाँ θ वह कोण है, जो बिन्दु P को केन्द्र से मिलाने वाली रेखा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है।

- जब θ के मान $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$ हैं, तब त्रिकोणमितीय फलनों $\sin\theta$ व $\cos\theta$ के मान निम्न तालिका द्वारा प्रदर्शित किये जाते हैं :

वास्तविक संख्याएँ θ / फलन	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0

- $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के आलेख सभी स्थानों पर सतत होते हैं।
  - — $\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों का अधिकतम मान 1 है।
  - — $\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों का न्यूनतम मान -1 है।
  - — इन फलनों का आवर्तकाल 2π है।
- $\tan\theta$ और $\cot\theta$ का $-\infty$ और $+\infty$ के मध्य कोई भी मान हो सकता है।
  - — फलन $\tan\theta$ अन्तराल $(0, 2\pi)$ में, $\frac{\pi}{2}$ तथा $\frac{3\pi}{2}$ पर असतत (विच्छेदित) है।
  - — इसका आवर्तकाल π है।
  - — $0, \pi, 2\pi$ पर $\cot\theta$ का आलेख असतत (विच्छेदित) है। इसका आवर्तकाल π है।
- $\sec\theta$ का संख्यात्मक मान '1' से कम नहीं हो सकता है।

  (i) इसका आलेख $\frac{\pi}{2}$ और $\frac{3\pi}{2}$ पर विच्छेदित होता है। 2π के बाद इसकी पुनरावर्ती होती है।

  (ii) $\operatorname{cosec}\theta$ का कोई मान -1 और $+1$ के बीच में नहीं हो सकता। यह $0, \pi$ 2π पर असतत (विच्छेदित) है। 2π के बाद इसकी पुनरावर्ती होती है।

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions*
- *http://mathworld.wolfram.com/ Trigonometric_functions.html*

आइए अभ्यास करें

1. एक रेलगाड़ी एक वृत्तीय पटरी, जिसकी त्रिज्या 2500 मी है, पर 75 कि.मी/घंटा की गति से चल रही है।एक मिनट में वह कितने रेडियन का कोण घूम जाएगी ?

2. एक चाप की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या की 0.357 गुनी है। इस चाप द्वारा केन्द्र पर कितने अंश का कोण बनेगा ?

3. एक घड़ी की मिनट की सुई 30 सेमी लम्बी है। सुई के सिरे द्वारा 15 मिनट में तय की गई दूरी ज्ञात कीजिए।

4. सिद्ध कीजिए :

(a) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}} = \sec\theta - \tan\theta$ (b) $\dfrac{1}{\sec\theta + \tan\theta} = \sec\theta - \tan\theta$

(c) $\dfrac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} - \dfrac{\cot\theta}{1+\cot^2\theta} = 2\sin\theta\cos\theta$ (d) $\dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = (\tan\theta + \sec\theta)^2$

(e) $\sin^8\theta - \cos^8\theta = \left(\sin^2\theta - \cos^2\theta\right)\left(1 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta\right)$

(f) $\sqrt{\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta} = \tan\theta + \cot\theta$

5. यदि $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि : $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

6. मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\dfrac{25\pi}{6}$ (b) $\sin\dfrac{21\pi}{4}$ (c) $\tan\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (d) $\sin\dfrac{17}{4}\pi$ (e) $\cos\dfrac{19}{3}\pi$

7. $x = -\dfrac{\pi}{2}$ से $x = \dfrac{3\pi}{2}$ तक $\cos x$ का आलेख खींचिए।

8. x के एक आवर्ती फलन की परिभाषा लिखिए और आलेख द्वारा दिखाइए कि $\tan x$ का आवर्तकाल π है, अर्थात् $x = \pi$ से 2π तक इसके आलेख का भाग $x = 0$ से π तक के आलेख के भाग की पुनरावृत्ति है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 3.1

1. (i) $\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\dfrac{\pi}{12}$ (iii) $\dfrac{5\pi}{12}$ (iv) $\dfrac{7\pi}{12}$ (v) $\dfrac{3\pi}{2}$

2. (i) 45° (ii) 15° (iii) 9° (iv) 3° (v) 120°

3. $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{13\pi}{36}, \dfrac{14\pi}{36}$ 4. $\dfrac{5\pi}{6}$ 5. $\dfrac{\pi}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 3.2

1. (a) $\dfrac{\pi}{6}$ (b) $\dfrac{\pi}{3}$ (c) $\dfrac{5\pi}{6}$

2. (a) 36° (b) 30° (c) 20°

3. $\dfrac{1}{6}$ रेडियन; 9.55° 4. $\dfrac{1}{5}$ रेडियन 5. 95.54 मी

6. (a) 0.53 मी (b) 38.22 सेमी (c) 0.002 रेडियन
(d) 12.56 मी (e) 31.4 सेमी (f) 3.75 रेडियन
(g) 6.28 मी (h) 2 रेडियन (i) 19.11 मी

देखें आपने कितना सीखा 3.3

1. (i) ऋणात्मक (ii) ऋणात्मक (iii) ऋणात्मक (iv) धनात्मक
(v) धनात्मक (vi) ऋणात्मक (vii) धनात्मक (viii) ऋणात्मक

2. (i) शून्य (ii) शून्य (iii) $-\frac{1}{2}$ (iv) -1
(v) 1 (vi) परिभाषित नहीं है (vii) परिभाषित नहीं है (viii) 1

देखें आपने कितना सीखा 3.4

2. $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cot\theta = 2$, $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{5}$, $\sec\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

3. $\sin\theta = \frac{a}{b}$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, $\sec\theta = \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}$,
$\tan\theta = \frac{a}{\sqrt{b^2 - a^2}}$, $\cot\theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{a}$ 6. $\frac{2m}{1+m^2}$

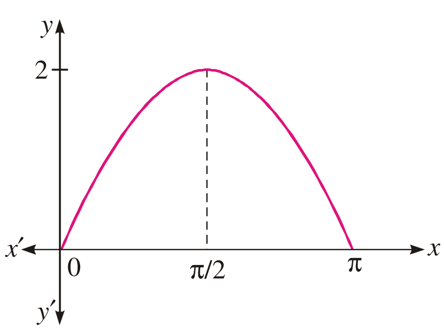
11. $\cos x = \frac{5}{13}, \sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{-13}{12}, \tan x = \frac{-12}{5}, \cot x = \frac{-5}{12}$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

1. (i) $4\frac{1}{4}$ (ii) $6\frac{1}{2}$ (iii) -1 (iv) $\frac{22}{3}$ (v) शून्य

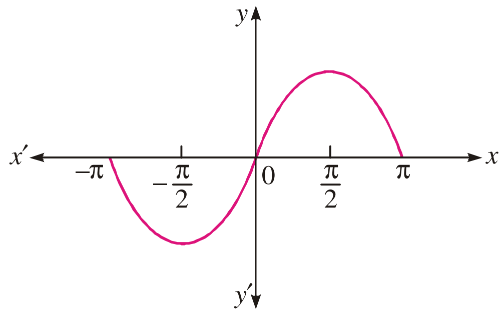
देखें आपने कितना सीखा 3.6

1. 1, -1 3. $y = 2\sin\theta$ का आलेख, $[0, \pi]$



चित्र 3.36

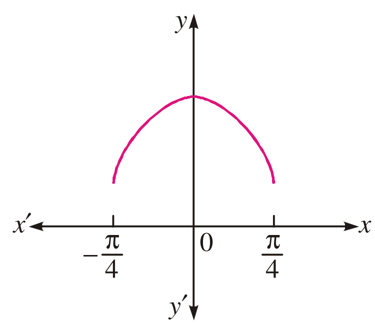
4. (a) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ (b) $\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ 5. $y = \sin x$, $-\pi$ से π तक



चित्र 3.37

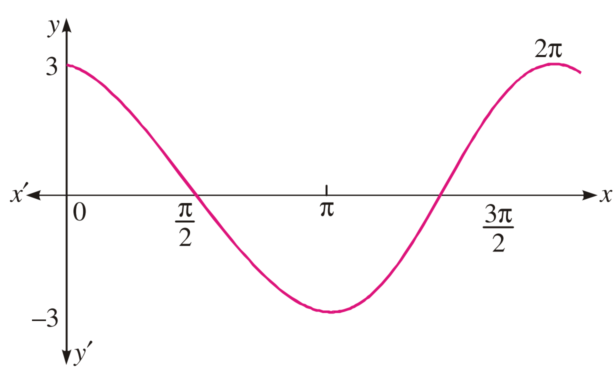
देखें आपने कितना सीखा 3.7

1. (a) $y = \cos\theta, -\frac{\pi}{4}$ से $\frac{\pi}{4}$ तक



चित्र 3.38

(b) $y = 3\cos\theta$; 0 से 2π तक



चित्र 3.39

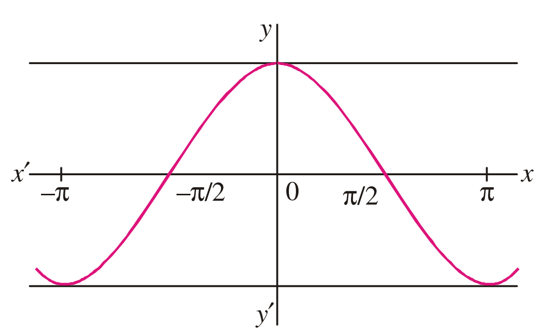
(c) $y = \cos 3\theta, -\pi$ से π तक

$\cos\theta = 0.87$

$$\theta = \frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}$$

$\cos\theta = -0.87$

$$\theta = \frac{5\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$$

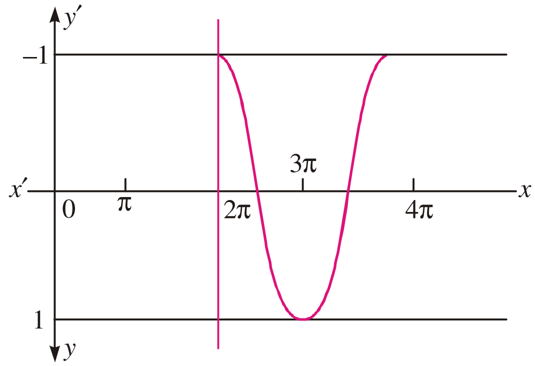


चित्र 3.40

(d) अन्तराल $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ में, $y = \cos\theta$ का आलेख x-अक्ष से नीचे स्थित है।

(e) $y = \cos\theta$,

θ, 2π से 4π के बीच में स्थित है।



चित्र 3.41

देखें आपने कितना सीखा 3.8

1. (a) अपरिमित (b) बिन्दुओं $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ पर आलेख विच्छेदित है।

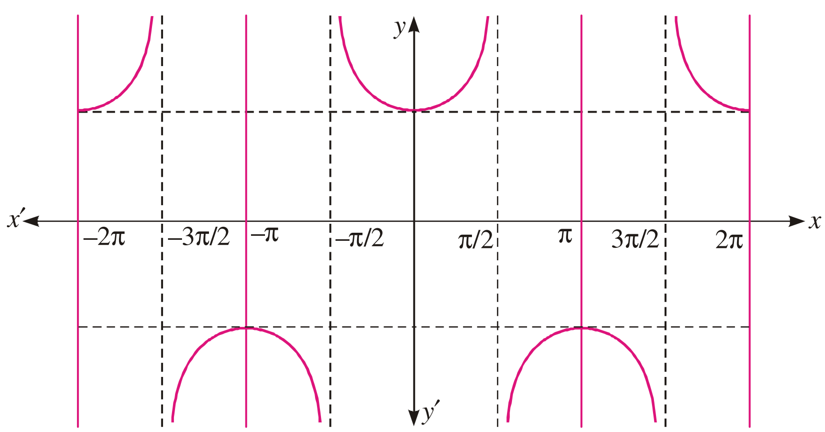
   (e) $y = \tan 2\theta, -\pi$ से π तक

   $\theta = \frac{\pi}{3}$ पर, $\tan\theta = 1.7$ है।

2. (a) अपरिमित (b) $\cot\theta = -1$, जब $\theta = \frac{3\pi}{4}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 3.9

1. (a) $y = \sec\theta$



चित्र 3.42

अन्तराल $[0, 2\pi]$ में, $\sec 2\theta$ की असंतता के बिन्दु $\frac{\pi}{4}$ तथा $\frac{3\pi}{4}$ हैं।

(b) 0 से -2π तक आलेख का अनुरेखण करने में, $\operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$ का प्रयोग कीजिए।

देखें आपने कितना सीखा 3.10

1. (a) आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{3}$ (b) आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{2} = \pi$ (c) y का आवर्तकाल है : $\frac{\pi}{3}$

(d) $y = \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4x$; y का आवर्तकाल है : $\frac{2\pi}{4}$ अर्थात् $\frac{\pi}{2}$

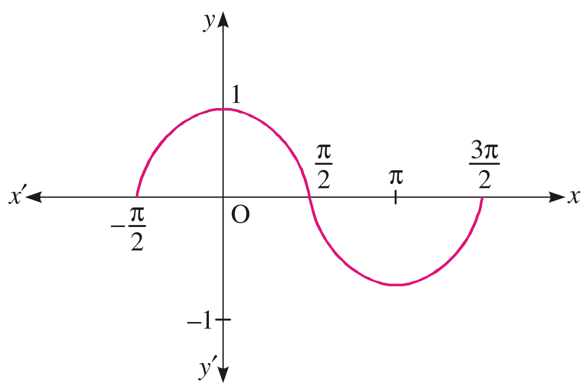
(e) $y = 3\cot\left(\frac{x+1}{3}\right)$, y का आवर्तकाल है : $\frac{\pi}{\frac{1}{3}} = 3\pi$

आइए अभ्यास करें

1. $\frac{1}{2}$ रेडियन 2. 20.45° 3. 15 सेमी

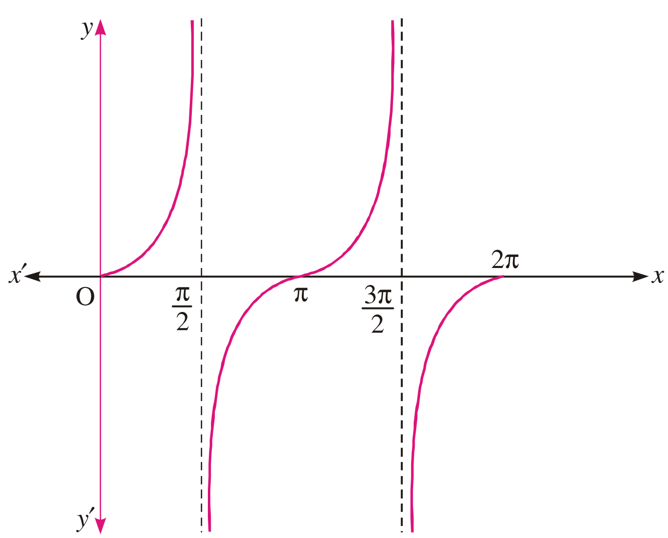
6. (a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (c) –1 (d) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (e) $\frac{1}{2}$

7.



चित्र 3.43

8.



$y = \sec\theta$

चित्र 3.44

4

त्रिकोणमितीय फलन- II

पिछले पाठ में आपने त्रिकोणमितीय फलनों के बारे में सीखा । आपने त्रिकोणमितीय फलनों के ग्राफ को खींचना तथा उनसे निष्कर्ष निकालने के बारे में भी सीखा है। इस पाठ में हम योग तथा अन्तर के सूत्र $\cos(A \pm B)$, $\sin(A \pm B)$ तथा $\tan(A \pm B)$ स्थापित करेंगे। हम गुणज कोणों तथा अपवर्तक कोणों के सूत्रों को भी बताऐंगे और उनसे संबन्धित उदाहरणों को हल करेगें। साधारण त्रिकोणमितीय फलनों के व्यापक हलों की भी इस पाठ में चर्चा करेंगे।

पूर्व ज्ञान

- त्रिकोणमितीय फलनों की परिभाषा
- त्रिकोणमितीय फलनों के पूरक तथा संपूरक कोण
- त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- $-x, \frac{x}{2}, x \pm y, \frac{\pi}{2} \pm x, \pi \pm x$ के त्रिकोणमितीय फलनों को लिख सकना जहां x और y वास्तविक संख्याएँ हैं।
- योग और अन्तर के सूत्र स्थापित करना :
  $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$,
  $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ तथा $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$
- योग व अन्तर के सूत्रों का उपयोग करके प्रश्नों को हल करना
- कोणों के गुणज तथा अपवर्तक सूत्रों जैसे $\cos 2A, \sin 2A, \tan 2A, \cos 3A, \sin 3A, \tan 3A,$ $\sin\frac{A}{2}, \cos\frac{A}{2}$ और $\tan\frac{A}{2}$ को बताना
- सरल त्रिकोणमितीय समीकरण जैसे $\sin x = \sin \alpha, \cos x = \cos \alpha, \tan x = \tan \alpha$ को हल करना

4.1 त्रिकोणमितीय फलनों का योग तथा गुणन

पिछले पाठ में आपने वृत्तीय कोणों की माप, त्रिकोणमितीय फलन और निर्दिष्ट और अन्य सम्बंधित संख्याओं पर त्रिकोणमितीय फलनों के मानों के बारे में सीखा था।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि त्रिकोणमितीय फलनों के किन्हीं दो संख्याओं A तथा B के दिए हुए मानों के लिए क्या त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर को ज्ञात कर पाना सम्भव है।

आप देखेंगे कि संख्याओं के योग व अन्तर के त्रिकोणमितीय फलन किस प्रकार अलग-अलग संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलनों से सम्बंधित हैं।

यह त्रिकोणमितीय फलनों के $-\dfrac{\pi}{12}$ और $\dfrac{5\pi}{12}$ इत्यादि का मान ज्ञात करने में आपकी सहायता करेगा।

$\dfrac{\pi}{12}$ को $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$\dfrac{5\pi}{12}$ को $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$\dfrac{7\pi}{12}$ को योग व अन्तर के रूप में कैसे व्यक्त किया जा सकता है?

इस अनुच्छेद में हम इसी प्रकार के त्रिकोणमितीय फलनों का अध्ययन करेंगे।

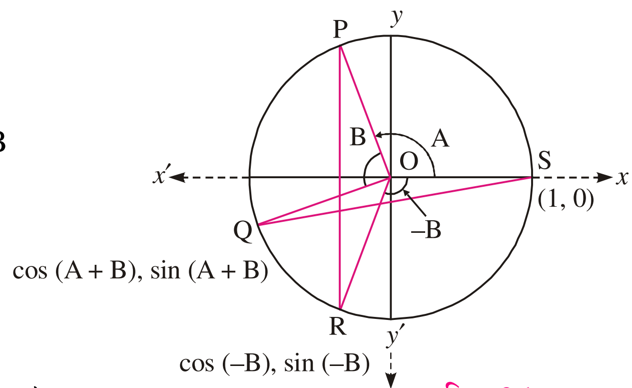
4.1.1 योग के सूत्र

किन्हीं दो संख्याओं A और B के लिए

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

दी गई चित्र में बनाइए :

$$\angle SOP = A$$
$$\angle POQ = B$$
$$\angle SOR = -B$$



चित्र 3.1

जबकि बिन्दु P, Q, R, S इकाई वृत्त पर स्थित हैं।

बिन्दु P, Q, R, S के निर्देशांक (cos A, sin A), [cos (A + B), sin (A + B)], $[\cos(-B), \sin(-B)]$ और (1, 0) होगें।

दिये गये चित्र के अनुसार हमें प्राप्त होता है, भुजा OP = भुजा OQ

$\angle POR = \angle QOS$ [प्रत्येक कोण $= \angle B + \angle QOR$]

भुजा OR = भुजा OS

$\Delta POR \cong \Delta QOS$ (SAS के द्वारा) $\quad \therefore$ PR = QS

$$PR=\sqrt{(\cos A-\cos(-B))^2+(\sin A-\sin(-B))^2}$$

$$QS=\sqrt{(\cos(A+B)-1)^2+(\sin(A+B)-0)^2}$$

क्योंकि $PR^2 = QS^2$

$$\therefore\ \cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B+\sin^2 A+\sin^2 B+2\sin A\sin B$$

$$=\cos^2(A+B)+1-2\cos(A+B)+\sin^2(A+B)$$

$$\Rightarrow \quad 1+1-2(\cos A\cos B-\sin A\sin B)=1+1-2\cos(A+B)$$

$$\Rightarrow \quad \cos A\cos B-\sin A\sin B=\cos(A+B) \qquad \text{(I)}$$

उपप्रमेय 1

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए $\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

उपपत्ति : (1) में B को (–B) से प्रतिस्थापित कीजिए :

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \quad [\because \cos(-B) = \cos B \text{ तथा } \sin(-B) = -\sin B]$$

उपप्रमेय 2

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

उपपत्ति : हम जानते हैं कि $\cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \sin A$ और $\sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right) = \cos A$

$$\therefore \qquad \sin(A+B) = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-(A+B)\right)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-A\right)-B\right]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\cos B + \sin\left(\frac{\pi}{2}-A\right)\sin B$$

या $$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \qquad .....(II)$$

उपप्रमेय 3

किन्हीं दो कोणों A और B के लिए

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

उपपत्ति : (II) में B को –B से प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा :

$$\sin(A+(-B)) = \sin A\cos(-B) + \cos A\sin(-B)$$

या $$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

उदाहरण 4.1.

(a) निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin\frac{5\pi}{12}$ (ii) $\cos\frac{\pi}{12}$ (iii) $\cos\frac{7\pi}{12}$

(b) यदि $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\sin B = \frac{1}{\sqrt{5}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A+B = \frac{\pi}{4}$

हल : (a) (i) $$\sin\frac{5\pi}{12} = \sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $$\cos\frac{\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

ध्यान दीजिए $\sin\frac{5\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12}$

(iii) $\cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{3}\cdot\ \sin\frac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(b) $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$$\cos A = \sqrt{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \text{और} \quad \cos B = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

इन सभी मानों को (II) में रखने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sin(A+B) = \frac{1}{\sqrt{10}}\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{10}\sqrt{5}} + \frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{5}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

या $\quad A+B = \frac{\pi}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. (a) निम्नलिखित में प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin\frac{\pi}{12}$ (ii) $\sin\frac{\pi}{9}\cdot\cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{\pi}{9}\cdot\sin\frac{2\pi}{9}$

(b) सिद्ध कीजिए :

(i) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+A\right) = \frac{1}{2}\left(\cos A + \sqrt{3}\sin A\right)$ (ii) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-A\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos A - \sin A)$

(c) यदि $\sin A = \frac{8}{17}$ और $\sin B = \frac{5}{13}$ हो, तो $\sin(A-B)$ का मान ज्ञात कीजिए।

2. (a) $\cos\frac{5\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

(b) सिद्ध कीजिए :

(i) $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$ (ii) $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = 2\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

(iii) $\cos(n+1)A\cos(n-1)A + \sin(n+1)A\sin(n-1)A = \cos 2A$

(iv) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-B\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\ \sin\left(\frac{\pi}{4}-B\right) = \cos(A+B)$

उपप्रमेय 4 $\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

उपपत्ति : $\tan(A+B)=\dfrac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)}=\dfrac{\sin A\cos B+\cos A\sin B}{\cos A\cos B-\sin A\sin B}$

अंश और हर को $\cos A\cos B$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\tan(A+B)=\dfrac{\dfrac{\sin A\cos B}{\cos A\cos B}+\dfrac{\cos A\sin B}{\cos A\cos B}}{\dfrac{\cos A\cos B}{\cos A\cos B}-\dfrac{\sin A\sin B}{\cos A\cos B}} \quad \text{या} \quad \tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B} \qquad \text{......(III)}$$

उपप्रमेय 5: $\tan(A-B)=\dfrac{\tan A-\tan B}{1+\tan A\tan B}$

उपपत्ति : (III) में B को (–B) प्रतिस्थापित करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होगा।

उपप्रमेय 6: $\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$

उपपत्ति : $\cot(A+B)=\dfrac{\cos(A+B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{\cos A\cos B-\sin A\sin B}{\sin A\cos B+\cos A\sin B}$

अंश और हर को $\sin A\sin B$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है : ......(IV)

$$\cot(A+B)=\dfrac{\cot A\cot B-1}{\cot B+\cot A}$$

उपप्रमेय 7: $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$

उपपत्ति : $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+A\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan A}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan A}=\dfrac{1+\tan A}{1-\tan A}$ क्योंकि $\tan\dfrac{\pi}{4}=1$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-A\right)=\dfrac{1-\tan A}{1+\tan A}$

उदाहरण 4.2. $\tan\dfrac{\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\tan\dfrac{\pi}{12}=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan\frac{\pi}{6}}{1+\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}=\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+1.\frac{1}{\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$

$$=\dfrac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 4.3. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए : (a) $\dfrac{\cos\frac{7\pi}{36}+\sin\frac{7\pi}{36}}{\cos\frac{7\pi}{36}-\sin\frac{7\pi}{36}}=\tan\dfrac{4\pi}{9}$

(b) $\tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \; \tan 4A \cdot \tan 3A$

(c) $\tan \dfrac{7\pi}{18} = \tan \dfrac{\pi}{9} + 2 \tan \dfrac{5\pi}{18}$

हल : (a) अंश व हर दोनों को $\cos \dfrac{7\pi}{36}$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos \frac{7\pi}{36} + \sin \frac{7\pi}{36}}{\cos \frac{7\pi}{36} - \sin \frac{7\pi}{36}} = \frac{1 + \tan \frac{7\pi}{36}}{1 - \tan \frac{7\pi}{36}} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{7\pi}{36}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{7\pi}{36}}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{36}\right) = \tan \frac{16\pi}{36} = \tan \frac{4\pi}{9} = \text{दायाँ पक्ष}$$

(b) $\tan 7A = \tan(4A + 3A) = \dfrac{\tan 4A + \tan 3A}{1 - \tan 4A \; \tan 3A}$

या $\quad \tan 7A - \tan 7A \; \tan 4A \; \tan 3A = \tan 4A + \tan 3A$

या $\quad \tan 7A - \tan 4A - \tan 3A = \tan 7A \tan 4A \tan 3A$

(c) $$\tan \frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi}{18}\right) = \frac{\tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{2\pi}{18}}{1 - \tan \frac{5\pi}{18} \cdot \tan \frac{2\pi}{18}}$$

$$\tan \frac{7\pi}{18} - \tan \frac{7\pi}{18} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{2\pi}{18} = \tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{2\pi}{18} \qquad .....(1)$$

$$\tan \frac{7\pi}{18} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{9}\right) = \cot \frac{\pi}{9} = \cot \frac{2\pi}{18}$$

$\therefore$ (1) को लिखा जा सकता है :

$$\tan \frac{7\pi}{18} - \cot \frac{2\pi}{18} \tan \frac{5\pi}{18} \tan \frac{2\pi}{18} = \tan \frac{5\pi}{18} + \tan \frac{\pi}{9}$$

$\therefore \quad \tan \dfrac{7\pi}{18} = \tan \dfrac{\pi}{9} + 2 \tan \dfrac{5\pi}{18}$

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. रिक्त स्थान भरिए :

   (i) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + A\right) \sin\left(\dfrac{\pi}{4} - A\right) = ...$ (ii) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{4}\right) \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = ...$

2. (a) सिद्ध कीजिए : (i) $\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta\right) \tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \theta\right) = 1.$

   (ii) $\cot(A - B) = \dfrac{\cot A \cot B + 1}{\cot B - \cot A}$ (iii) $\tan \dfrac{\pi}{12} + \tan \dfrac{\pi}{6} + \tan \dfrac{\pi}{12} \cdot \tan \dfrac{\pi}{6} = 1$

(b) यदि $\tan A = \frac{a}{b}$; $\tan B = \frac{c}{d}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan(A+B) = \frac{ad+bc}{bd-ac}$.

(c) $\cos\frac{11\pi}{12}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. सिद्ध कीजिए : (i) $\tan\left(\frac{\pi}{4}+A\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+A\right) = -1$

(ii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$ (iii) $\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$

4.2 गुणन का योग में रूपांतरण करना और उनका विलोम

4.2.1 गुणन का योग व अन्तर में रूपांतरण

हम जानते हैं :

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$$

प्रथम दो सूत्रों का योग व अन्तर करने पर हमें क्रमशः प्राप्त होता है :

$$2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B) \quad .....(1)$$

और $$2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B) \quad .....(2)$$

इसी प्रकार, दूसरे दो सूत्रों का योग व अन्तर करने पर हमें क्रमशः प्राप्त होता है :

$$2\cos A\cos B = \cos(A+B) + \cos(A-B) \quad ....(3)$$

और $$2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B) \quad ....(4)$$

हम इन्हें इस प्रकार भी कह सकते हैं :

$2\sin A\cos B = \sin$ (योग) $+ \sin$ (अन्तर)

$2\cos A\sin B = \sin$ (योग) $- \sin$ (अन्तर)

$2\cos A\cos B = \cos$ (योग) $+ \cos$ (अन्तर)

$2\sin A\sin B = \cos$ (अन्तर) $- \cos$ (योग)

4.2.2 योग व अन्तर का गुणन में रूपातंरण

उपरोक्त परिणामों में $A+B=C$ और $A-B=D$ रखिए।

तब $A = \frac{C+D}{2}$ और $B = \frac{C-D}{2}$ तथा (1), (2), (3) तथा (4) बन जाते हैं :

$$\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

$$\cos D - \cos C = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2}$$

4.2.3 योग व अन्तर सूत्रों के कुछ और अनुप्रयोग

हमें सिद्ध करेंगे कि (i) $\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$ या $\cos^2 B - \sin^2 A$

उपपत्ति : (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)$

$$= (\sin A\cos B + \cos A\sin B)(\sin A\cos B - \cos A\sin B)$$

$$= \sin^2 A\cos^2 B - \cos^2 A\sin^2 B$$

$$= \sin^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\sin^2 A)\sin^2 B = \sin^2 A - \sin^2 B$$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)$

$$= (\cos A\cos B - \sin A\sin B)(\cos A\cos B + \sin A\sin B)$$

$$= \cos^2 A\cos^2 B - \sin^2 A\sin^2 B$$

$$= \cos^2 A(1-\sin^2 B) - (1-\cos^2 A)\sin^2 B = \cos^2 A - \sin^2 B$$

$$= (1-\sin^2 A) - (1-\cos^2 B) = \cos^2 B - \sin^2 A$$

उदाहरण 4.4. निम्नलिखित गुणनों को योग व अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta$ (ii) $\cos 6\theta\cos\theta$ (iii) $\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$

हल : (i) $2\sin 3\theta\cos 2\theta = \sin(3\theta+2\theta) + \sin(3\theta-2\theta) = \sin 5\theta + \sin\theta$

(ii) $$\cos 6\theta\cos\theta = \frac{1}{2}(2\cos 6\theta\cos\theta) = \frac{1}{2}[\cos(6\theta+\theta) + \cos(6\theta-\theta)]$$

$$= \frac{1}{2}(\cos 7\theta + \cos 5\theta)$$

(iii) $$\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\left[2\sin\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi-\pi}{12}\right) - \cos\left(\frac{5\pi+\pi}{12}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{2}\right]$$

उदाहरण 4.5. निम्नलिखित योग को गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए :

(i) $\cos\frac{5\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9}$ (ii) $\sin\frac{5\pi}{36} + \cos\frac{7\pi}{36}$

हल: (i) $\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=2\cos\frac{5\pi+7\pi}{9\times 2}\cos\frac{5\pi-7\pi}{9\times 2}$

$$=2\cos\frac{2\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\left(-\frac{\pi}{9}\right)=\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$=2\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{9}=-2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{9}$$

$$=-\cos\frac{\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$$

(ii) $\sin\frac{5\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{13\pi}{36}\right)+\cos\frac{7\pi}{36}=\cos\frac{13\pi}{36}+\cos\frac{7\pi}{36}$

$$=2\cos\frac{13\pi+7\pi}{36\times 2}\cos\frac{13\pi-7\pi}{36\times 2}=2\cos\frac{5\pi}{18}\cos\frac{\pi}{12}$$

उदाहरण 4.6. सिद्ध कीजिए कि $\frac{\cos 7A-\cos 9A}{\sin 9A-\sin 7A}=\tan 8A$

हल : बायाँ पक्ष $=\dfrac{2\sin\frac{7A+9A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}{2\cos\frac{9A+7A}{2}\sin\frac{9A-7A}{2}}=\frac{\sin 8A\ \sin A}{\cos 8A\ \sin A}=\frac{\sin 8A}{\cos 8A}$

$=\tan 8A=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4.7. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

(i) $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-A\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-B\right)=\sin(A+B)\cos(A-B)$

(ii) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A$

हल : (i) सूत्र $\cos^2 A-\sin^2 B=\cos(A+B)\cos(A-B)$ का उपयोग करने पर

बायाँ पक्ष $=\cos\left[\frac{\pi}{4}-A+\frac{\pi}{4}-B\right]\cos\left[\frac{\pi}{4}-A-\frac{\pi}{4}+B\right]$

$=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(A+B)\right]\cos\left[-(A-B)\right]=\sin(A+B)\cos(A-B)=$ दायां पक्ष

(ii) सूत्र $\sin^2 A-\sin^2 B=\sin(A+B)\sin(A-B)$ का उपयोग करने पर

बायाँ पक्ष $=\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}+\frac{\pi}{8}-\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{A}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{4}\sin A$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin A=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 4.8. सिद्ध कीजिए कि $\cos\frac{\pi}{9}\ \cos\frac{2\pi}{9}\ \cos\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{4\pi}{9}=\frac{1}{16}$

हल : बायाँ पक्ष $= \cos\frac{\pi}{3}\left[\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[2\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9} \qquad \left[\because \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{\pi}{9}\right]\cos\frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[2\cos\frac{4\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9}\right]$$

$$= \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\left[\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right] = \frac{1}{8}\cos\frac{4\pi}{9}+\frac{1}{8}\cos\frac{5\pi}{9}+\frac{1}{16} \qquad .....(1)$$

अब $$\cos\frac{5\pi}{9} = \cos\left[\pi-\frac{4\pi}{9}\right] = -\cos\frac{4\pi}{9} \qquad .....(2)$$

(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है : बायाँ पक्ष $= \frac{1}{16} =$ दायाँ पक्ष

देखें आपने कितना सीखा 4.3

1. निम्नलिखित को योग व अन्तर के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $2\cos 3\theta \sin 2\theta$ (b) $2\sin 4\theta \sin 2\theta$

(c) $2\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$ (d) $2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}$

2. निम्नलिखित में प्रत्येक को गुणन के रूप में व्यक्त कीजिए :

(a) $\sin 6\theta + \sin 4\theta$ (b) $\sin 7\theta - \sin 3\theta$

(c) $\cos 2\theta - \cos 4\theta$ (d) $\cos 7\theta + \cos 5\theta$

3. सिद्ध कीजिए :

(a) $\sin\frac{5\pi}{18}+\cos\frac{4\pi}{9}=\cos\frac{\pi}{9}$ (b) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{9}-\cos\frac{7\pi}{18}}{\sin\frac{7\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{9}}=1$

(c) $\sin\frac{5\pi}{18}-\sin\frac{7\pi}{18}+\sin\frac{\pi}{18}=0$ (d) $\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{5\pi}{9}+\cos\frac{7\pi}{9}=0$

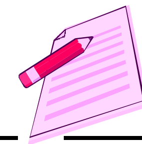
4. सिद्ध कीजिए :

(a) $\sin^2(n+1)\theta - \sin^2 n\theta = \sin(2n+1)\theta\cdot\sin\theta$

(b) $\cos\beta\cos(2\alpha-\beta) = \cos^2\alpha - \sin^2(\alpha-\beta)$

(c) $\cos^2\frac{\pi}{4}-\sin^2\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. सिद्ध कीजिए कि $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)$, θ से स्वतंत्र है।



6. सिद्ध कीजिए :

(a) $\dfrac{\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta}{\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta} = \tan 4\theta$

(b) $\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{6}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18} = \dfrac{1}{16}$

(c) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = 4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

4.3 कोणों के गुणज के त्रिकोणमितीय फलन

(a) $\sin 2A$ को $\sin A, \cos A$ और $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि : $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$B = A$ रखने पर हमें प्राप्त होता है : $\sin 2A = \sin A\cos A + \cos A\sin A = 2\sin A\cos A$

इसको इस प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\sin 2A = \frac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A + \sin^2 A} \qquad (\because\ 1 = \cos^2 A + \sin^2 A)$$

अंश और हर को $\cos^2 A$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sin 2A = \frac{2\left(\dfrac{\sin A\cos A}{\cos^2 A}\right)}{\dfrac{\cos^2 A}{\cos^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

(b) $\cos 2A$ को $\sin A, \cos A$ और $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना

हम जानते हैं कि : $\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$B = A$ रखने पर $\cos 2A = \cos A\cos A - \sin A\sin A$

या $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

और $\cos 2A = \cos^2 A - (1 - \cos^2 A) = \cos^2 A - 1 + \cos^2 A$

अर्थात, $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$

और $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 1 - \sin^2 A - \sin^2 A$

अर्थात, $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A \quad \Rightarrow \quad \sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$

$$\therefore \quad \cos 2A = \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

दायें पक्ष के अंश और हर को $\cos^2 A$ से भाग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

(c) $\tan 2A$ को $\tan A$ के रुप में व्यक्त करना

$$\tan 2A = \tan(A+A) = \frac{\tan A + \tan A}{1 - \tan A \tan A} = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$

इस प्रकार हमने निम्नलिखित सूत्रों का व्युत्पन्न किया है :

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

$$\cos^2 A = \frac{1+\cos 2A}{2}, \quad \sin^2 A = \frac{1-\cos 2A}{2}$$

उदाहरण 4.9. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \tan A$

हल : $$\frac{\sin 2A}{1+\cos 2A} = \frac{2\sin A\cos A}{2\cos^2 A} = \frac{\sin A}{\cos A} = \tan A$$

उदाहरण 4.10. सिद्ध कीजिए : $\cot A - \tan A = 2\cot 2A$

हल : $$\cot A - \tan A = \frac{1}{\tan A} - \tan A = \frac{1-\tan^2 A}{\tan A} = \frac{2(1-\tan^2 A)}{2\tan A}$$

$$= \frac{2}{\left(\dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}\right)} = \frac{2}{\tan 2A} = 2\cot 2A$$

उदाहरण: 4.11. मान ज्ञात कीजिए : $\cos^2\dfrac{\pi}{8} + \cos^2\dfrac{3\pi}{8}$

हल : $$\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} = \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} = \frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} + \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)+(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}} = 1$$

उदाहरण 4.12. सिद्ध कीजिए : $\dfrac{\cos A}{1-\sin A} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{A}{2}\right)$

हल : दायाँ पक्ष $$= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{A}{2}\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\frac{A}{2}}{1 - \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{A}{2}} = \frac{1 + \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}{1 - \dfrac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}}$$

$$= \frac{\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}} = \frac{\left(\cos\frac{A}{2} + \sin\frac{A}{2}\right)\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)}{\left(\cos\frac{A}{2} - \sin\frac{A}{2}\right)^2}$$

[अंश और हर को $\left(\frac{\cos A}{2} - \frac{\sin A}{2}\right)$ से गुणा करने पर]

$$= \frac{\cos^2\frac{A}{2} - \sin^2\frac{A}{2}}{\cos^2\frac{A}{2} + \sin^2\frac{A}{2} - 2\cos\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2}} = \frac{\cos A}{1 - \sin A} = \text{बायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.4

1. यदि $A = \frac{\pi}{3}$ तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \frac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$

   (b) $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$

2. $\sin 2A$ का मान ज्ञात कीजिए जब $0 < A < \frac{\pi}{2}$ हो :

   (a) $\cos A = \frac{3}{5}$ (b) $\sin A = \frac{12}{13}$ (c) $\tan A = \frac{16}{63}$

3. $\cos 2A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि :

   (a) $\cos A = \frac{15}{17}$ (b) $\sin A = \frac{4}{5}$ (c) $\tan A = \frac{5}{12}$

4. $\tan 2A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि :

   (a) $\tan A = \frac{3}{4}$ (b) $\tan A = \frac{a}{b}$

5. $\sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8}$ का मान ज्ञात कीजिए ।

6. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

   (a) $\frac{1 + \sin 2A}{1 - \sin 2A} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} + A\right)$ (b) $\frac{\cot^2 A + 1}{\cos^2 A - 1} = \sec 2A$

7. सिद्ध कीजिए कि :

   (a) $\frac{\sin 2A}{1 - \cos 2A} = \cos A$ (b) $\tan A + \cot A = 2\,\text{cosec}\,2A$

8. सिद्ध कीजिए कि : (a) $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{A}{2}\right)$

   (b) $(\cos\alpha + \cos\beta)^2 + (\sin\alpha - \sin\beta)^2 = 4\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2}$

4.3.1 3A के त्रिकोणमितीय फलन A के रूप में

(a) **sin 3A, sin A के रूप में**

सूत्र $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ में $B = 2A$ रखने पर

हमें प्राप्त होता है : $\sin(A+2A) = \sin A \cos 2A + \cos A \sin 2A$

$$= \sin A\left(1 - 2\sin^2 A\right) + \left(\cos A \times 2\sin A \cos A\right)$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A\left(1 - \sin^2 A\right)$$

$$= \sin A - 2\sin^3 A + 2\sin A - 2\sin^3 A$$

$\therefore$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$ ....(1)

(b) **cos 3A, cos A के रूप में**

सूत्र $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$ के रुप में $B = 2A$ रखने पर

हमें प्राप्त होता है : $\cos(A+2A) = \cos A \cos 2A - \sin A \sin 2A$

$$= \cos A\left(2\cos^2 A - 1\right) - \left(\sin A\right) \times 2\sin A \cos A$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A\left(1 - \cos^2 A\right)$$

$$= 2\cos^3 A - \cos A - 2\cos A + 2\cos^3 A$$

$\therefore$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$ ....(2)

(c) **tan 3A, tan A के रूप में**

सूत्र $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ में $B = 2A$ रखने पर,

हमें प्राप्त होता है : $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

$$\tan(A+2A) = \frac{\tan A + \tan 2A}{1 - \tan A \tan 2A} = \frac{\tan A + \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}{1 - \tan A \times \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}}$$

$$= \frac{\dfrac{\tan A - \tan^3 A + 2\tan A}{1-\tan^2 A}}{\dfrac{1-\tan^2 A - 2\tan^2 A}{1-\tan^2 A}} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

(d) $\sin^3 A$ और $\cos^3 A$ के लिए सूत्र

$\because$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

$\therefore$ $4\sin^3 A = 3\sin A - \sin 3A$ या $\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin 3A}{4}$

इसी प्रकार, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

$\therefore$ $3\cos A + \cos 3A = 4\cos^3 A$ या $\cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$

उदाहरण 4.13. सिद्ध कीजिए : $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$

हल : $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right]$

$$=\frac{1}{2}\sin\alpha\left[1-2\sin^2\alpha-\left(1-2\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right]=2.\frac{1}{2}\sin\alpha\left[\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha\right]$$

$$=\sin\alpha\left[\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right]=\frac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4}=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$$

उदाहरण 4.14. सिद्ध कीजिए : $\cos^3 A\sin 3A+\sin^3 A\cos 3A=\frac{3}{4}\sin 4A$

हल : $\cos^3 A\sin 3A+\sin^3 A\cos 3A$

$$=\cos^3 A\left(3\sin A-4\sin^3 A\right)+\sin^3 A\left(4\cos^3 A-3\cos A\right)$$

$$=3\sin A\cos^3 A-4\sin^3 A\cos^3 A+4\sin^3 A\cos^3 A-3\sin^3 A\cos A$$

$$=3\sin A\cos^3 A-3\sin^3 A\cos A$$

$$=3\sin A\cos A\left(\cos^2 A-\sin^2 A\right)=\left(3\sin A\cos A\right)\cos 2A$$

$$=\frac{3\sin 2A}{2}\times\cos 2A=\frac{3}{2}.\frac{\sin 4A}{2}=\frac{3}{4}\sin 4A.$$

उदाहरण 4.15. सिद्ध कीजिए : $\cos^3\frac{\pi}{9}+\sin^3\frac{\pi}{18}=\frac{3}{4}\left(\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right)$

हल : बायाँ पक्ष $=\frac{1}{4}\left[3\cos\frac{\pi}{9}+\cos\frac{\pi}{3}\right]+\frac{1}{4}\left(3\sin\frac{\pi}{18}-\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}\left[\cos\frac{\pi}{9}+\sin\frac{\pi}{18}\right]=\text{दायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.5

1. यदि $A=\frac{\pi}{3}$ हो, तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin 3A=3\sin A-4\sin^3 A$ (b) $\cos 3A=4\cos^3 A-3\cos A$

   (c) $\tan 3A=\frac{3\tan A-\tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$

2. $\sin 3A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\sin A=\frac{2}{3}$ (b) $\sin A=\frac{p}{q}$, हो।

3. $\cos 3A$ का मान ज्ञात कीजिए यदि

   (a) $\cos A=-\frac{1}{3}$ (b) $\cos A=\frac{c}{d}$ हो।

4. सिद्ध कीजिए : $\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\frac{1}{4}\cos 3\alpha.$

5. (a) सिद्ध कीजिए : $\sin^3\frac{2\pi}{9}-\sin^3\frac{\pi}{9}=\frac{3}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{9}-\sin\frac{\pi}{9}\right)$

   (b) सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin 3A}{\sin A}-\frac{\cos 3A}{\cos A}$ किसी भी 'A' के त्रिकोणमितीय अनुपात से स्वतंत्र है।

6. (a) सिद्ध कीजिए : $\cot 3A=\frac{\cot^3 A-3\cot A}{3\cot^2 A-1}$

   (b) सिद्ध कीजिए : $\cos 10A+\cos 8A+3\cos 4A+3\cos 2A=8\cos A\cos^3 3A$

4.4 अपवर्तक कोणों के त्रिकोणमितीय फलन

कोण $\frac{A}{2},\frac{A}{3},\frac{A}{4}$ आदि कोण A के अपवर्तक कोण कहलाते हैं।

यह सिद्ध किया जा चुका है कि

$$\sin^2 A=\frac{1-\cos 2A}{2},\ \cos^2 A=\frac{1+\cos 2A}{2},\ \tan^2 A=\frac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$$

A को $\frac{A}{2}$ प्रतिस्थापित करने पर हमें आसानी से अपवर्तक कोण $\frac{A}{2}$ के निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होते हैं:

$$\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}},\ \cos\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\ \text{और}\quad \tan\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$$

हम धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह में से कोई सा भी चुन सकते हैं, जो इस बात पर निर्भर करता है कि $\frac{A}{2}$ के मान के लिए फलन का संगत मान धनात्मक है या ऋणात्मक।

यह आपको निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट हो जाएगा :

उदाहरण 4.16. $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ और $\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल : हम सूत्र $\sin\frac{A}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ का उपयोग करेंगे और '–' चिन्ह लेंगे क्योंकि $\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)$ ऋणात्मक होता है।

$$\sin\left(-\frac{\pi}{8}\right)=-\sqrt{\frac{1-\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right)}{2}}=-\sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

इसी प्रकार
$$\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt{\frac{1+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$$

$$=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

उदाहरण 4.17. यदि $\cos A = \frac{7}{25}$ और $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi$ हो, तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin\frac{A}{2}$ (ii) $\cos\frac{A}{2}$ (iii) $\tan\frac{A}{2}$

हल : A चौथे चतुर्थांश में आता है अर्थात् $\frac{3\pi}{2} < A < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{4} < \frac{A}{2} < \pi$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} > 0,\ \cos\frac{A}{2} < 0,\ \tan\frac{A}{2} < 0$$

$$\therefore \quad \sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{2}} = \sqrt{\frac{18}{50}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{7}{25}}{2}} = -\sqrt{\frac{32}{50}} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$$

तथा
$$\tan\frac{A}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{7}{25}}{1+\frac{7}{25}}} = -\sqrt{\frac{18}{32}} = -\sqrt{\frac{9}{16}} = -\frac{3}{4}$$

देखें आपने कितना सीखा 4.6

1. यदि $A = \frac{\pi}{3}$ तो सत्यापित कीजिए :

   (a) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$ (b) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}$ (c) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$

2. $\sin\frac{\pi}{12}$ और $\sin\frac{\pi}{24}$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) $\sin\frac{\pi}{8}$ (b) $\cos\frac{\pi}{8}$ (c) $\tan\frac{\pi}{8}$.

4.5 त्रिकोणमितीय समीकरण

आप बीजगणित में समीकरण जैसे साधारण रैखिक समीकरण, द्विघात समीकरण आदि से परिचित है। आपने उन्हें हल करना भी सीखा है।

इस प्रकार (i) $x - 3 = 0$ का केवल एक हल है।

(ii) $x^2 - 9 = 0$ से x के दो मान मिलते हैं।

आपने देखा होगा कि x के मान समीकरण की घात पर निर्भर करते हैं। अब यदि x और y के स्थान पर त्रिकोणमितीय अनुपात हों तो क्या होगा, हम इस बात पर विचार करेंगे।

इस प्रकार समीकरण $\sin\theta - 1 = 0$ से प्राप्त होगा

$$\sin\theta = 1 \text{ तथा } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots.$$

स्पष्टतः सरल समीकरण के सीमित मान हों, यह बात त्रिकोणमितीय समीकरण में आवश्यक नहीं कि सत्य हो।

अब हम इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की विधि सीखेंगे।

4.5.1 समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया है कि $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \sin\theta - \sin\alpha = 0$

या $$2\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$$

$\therefore$ या तो $\cos\left(\frac{\theta+\alpha}{2}\right) = 0$ अथवा $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\theta+\alpha}{2} = (2p+1)\frac{\pi}{2}$ अथवा $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in z$ (पूर्णांकों का समुच्चय)

$\Rightarrow \quad \theta = (2p+1)\pi - \alpha$ अथवा $\theta = 2q\pi + \alpha$ ....(1)

(1) से हमें समीकरण $\sin\theta = \sin\alpha$ का व्यापक हल प्राप्त होता है

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in z$$

4.5.2 समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया है कि $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \cos\theta - \cos\alpha = 0$

$$\Rightarrow \quad -2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$\Rightarrow$ या तो $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ अथवा $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$

$\Rightarrow \quad \frac{\theta+\alpha}{2} = p\pi$ अथवा $\frac{\theta-\alpha}{2} = q\pi,\ p, q \in z$

$\Rightarrow \quad \theta = 2p\pi - \alpha$ अथवा $\theta = 2p\pi + \alpha$ ....(1)

(1) से हमें समीकरण $\cos\theta = \cos\alpha$ का व्यापक हल प्राप्त होता है

$$\theta = 2n\pi \pm \alpha, n \in z$$

4.5.3 समीकरण $\tan\theta = \tan\alpha$ का व्यापक हल ज्ञात करना

दिया गया है कि $\tan\theta = \tan\alpha$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$$

$\Rightarrow \quad \sin\theta\cos\alpha - \sin\alpha\cos\theta = 0 \Rightarrow \sin(\theta-\alpha) = 0$

$\Rightarrow \quad \theta - \alpha = n\pi,\ n \in z \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha\ \ n \in z$

इसी प्रकार $\operatorname{cosec}\theta = \operatorname{cosec}\alpha$ का व्यापक हल है :

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha$$

और $\sec\theta = \sec\alpha$ के लिए व्यापक हल है : $\theta = 2n\pi \pm \alpha$

और $\cot\theta = \cot\alpha$ के लिए व्यापक हल है : $\theta = n\pi + \alpha$

उदाहरण 4.18. निम्नलिखित समीकरणों में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$ (d) $4\sin^2\theta = 1$

हल : (a) (i) $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$ $\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6},\ n \in z$

(ii) $\sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{4\pi}{3}$

$\therefore\quad \theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3},\ n \in z$

(b) (i) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ $\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in z$

(ii) $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$ $\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in z$

(c) $\cot\theta = -\sqrt{3}$

$\tan\theta = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan\frac{\pi}{6} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\frac{5\pi}{6}$

$\therefore\quad \theta = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in z$

(d) $4\sin^2\theta = 1 \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \sin^2\frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow\quad \sin\theta = \sin\left(\pm\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in z$

उदाहरण 4.19. निम्नलिखित में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0$ (b) $\cos 4x = \cos 2x$

(c) $\cos 3x = \sin 2x$ (d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$

हल : (a) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta = 0 \Rightarrow 2(1 - \sin^2\theta) + 3\sin\theta = 0$

$\Rightarrow\quad 2\sin^2\theta - 3\sin\theta - 2 = 0 \Rightarrow (2\sin\theta + 1)(\sin\theta - 2) = 0$

$\Rightarrow\quad \sin\theta = -\frac{1}{2}$ या $\sin\theta = 2$

क्योंकि $\sin\theta = 2$ संभव नहीं है,

$\therefore\quad \sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}$

$\therefore \qquad \theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{7\pi}{6}, \; n \in z$

(b) $\qquad \cos 4x = \cos 2x$ अर्थात $\cos 4x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \qquad -2 \sin 3x \sin x = 0$

$\Rightarrow \qquad \sin 3x = 0$ या $\sin x = 0$

$\Rightarrow \qquad 3x = n\pi$ या $x = n\pi$

$\Rightarrow \qquad x = \frac{n\pi}{3}$ या $x = n\pi, \quad n \in z$

(c) $\qquad \cos 3x = \sin 2x \Rightarrow \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

$\Rightarrow \qquad 3x = 2n\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right), \quad n \in z$

केवल + चिन्ह लेने पर, हमें प्राप्त होगा $3x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$

$\Rightarrow \qquad 5x = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{5} + \frac{\pi}{10}$

अब '–' चिन्ह लेने पर, हमें प्राप्त होता है : $3x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} + 2x \Rightarrow x = 2n\pi - \frac{\pi}{2}, \; n \in z$

(d) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = 0$ या $(\sin 6x + \sin 2x) + \sin 4x = 0$

या $2 \sin 4x \cos 2x + \sin 4x = 0$ या $\sin 4x\,[2 \cos 2x + 1] = 0$

$\therefore \qquad \sin 4x = 0$ या $\cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow \qquad 4x = n\pi$ या $2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, \; n \in z$

$x = \frac{n\pi}{4}$ या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in z$

देखें आपने कितना सीखा 4.7

1. निम्न में प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $\operatorname{cosec}\theta = \sqrt{2}$ (iii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sin\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

   (i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$ (ii) $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ (iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (iv) $\sec\theta = -\sqrt{2}$

3. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\tan\theta = -1$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$ (iii) $\cot\theta = -1$

4. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(i) $\sin 2\theta = \dfrac{1}{2}$ (ii) $\cos 2\theta = \dfrac{1}{2}$ (iii) $\tan 3\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (iv) $\cos 3\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(v) $\sin^2\theta = \dfrac{3}{4}$ (vi) $\sin^2 2\theta = \dfrac{1}{4}$ (vii) $4\cos^2\theta = 1$ (viii) $\cos^2 2\theta = \dfrac{3}{4}$

5. निम्नलिखित में प्रत्येक का व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(i) $2\sin^2\theta + \sqrt{3}\cos\theta + 1 = 0$ (ii) $4\cos^2\theta - 4\sin\theta = 1$

(iii) $\cot\theta + \tan\theta = 2\operatorname{cosec}\theta$

आइए दोहराएँ

- $\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$,

  $\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$

  $\tan(A+B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$, $\tan(A-B) = \dfrac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$

  $\cot(A+B) = \dfrac{\cot A\cot B - 1}{\cot B + \cot A}$, $\cot(A-B) = \dfrac{\cot A\cot B + 1}{\cot B - \cot A}$

- $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$

  $2\cos A\sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$

  $2\cos A\cos B = \cos(A+B) - \cos(A-B)$

  $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$

- $\sin C + \sin D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

  $\sin C - \sin D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{C-D}{2}$

  $\cos C + \cos D = 2\cos\dfrac{C+D}{2}\cos\dfrac{C-D}{2}$

  $\cos C - \cos D = 2\sin\dfrac{C+D}{2}\sin\dfrac{D-C}{2}$

- $\sin(A+B)\cdot\sin(A-B) = \sin^2 A - \sin^2 B$

  $\cos(A+B)\cdot\cos(A-B) = \cos^2 A - \sin^2 B$

- $\sin 2A = 2\sin A\cos A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

- $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$
- $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$
- $\sin^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \dfrac{1+\cos 2A}{2}$, $\tan^2 A = \dfrac{1-\cos 2A}{1+\cos 2A}$
- $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

  $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1-3\tan^2 A}$
- $\sin^3 A = \dfrac{3\sin A - \sin 3A}{4}$, $\cos^3 A = \dfrac{3\cos A + \cos 3A}{4}$
- $\sin\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$, $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$

  $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$
- $\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha, \quad n \in z$
- $\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha, \quad n \in z$
- $\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha, \quad n \in z$

सहायक वेबसाइट

- *http://mathworld.wolfram.com/ Trigonometric_functions.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Trigonometric_functions*

आइए अभ्यास करें

1. सिद्ध कीजिए : $\tan(A+B)\times\tan(A-B) = \dfrac{\cos^2 B - \cos^2 A}{\cos^2 B - \sin^2 A}$
2. सिद्ध कीजिए : $\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta = 2\cos\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$
3. यदि $A + B = \dfrac{\pi}{4}$ हो, तो

   सिद्ध कीजिए : $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ और $(\cot A - 1)(\cot B - 1) = 2$
4. निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :

   (i) $\dfrac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B} + \dfrac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C} + \dfrac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A} = 0$

(ii) $\cos\left(\frac{\pi}{10}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{10}+A\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{5}-A\right)\cdot\cos\left(\frac{2\pi}{5}+A\right)=\cos 2A$

(iii) $\cos\frac{2\pi}{9}\cdot\cos\frac{4\pi}{9}\cdot\cos\frac{8\pi}{9}=-\frac{1}{8}$ (iv) $\cos\frac{13\pi}{45}+\cos\frac{17\pi}{45}+\cos\frac{43\pi}{45}=0$

(v) $\tan\left(A+\frac{\pi}{6}\right)+\cot\left(A-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sin 2A-\sin\frac{\pi}{3}}$

(vi) $\frac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\tan\theta$ (vii) $\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}=\tan 2\theta+\sec 2\theta$

(viii) $\left(\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}\right)^2=\tan^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)$

(ix) $\cos^2 A+\cos^2\left(A+\frac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(A-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{3}{2}$

(x) $\frac{\sec 8A-1}{\sec 4A-1}=\frac{\tan 8A}{\tan 2A}$ (xi) $\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{7\pi}{30}\cos\frac{11\pi}{30}\cos\frac{13\pi}{30}=\frac{11}{16}$

(xii) $\sin\frac{\pi}{10}+\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{2}$

5. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (b) $\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ (d) $\text{cosec}\,\theta=\sqrt{2}$

6. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos\theta=\frac{1}{2}$ (b) $\sec\theta=\frac{2}{\sqrt{3}}$ (c) $\cos\theta=\frac{-\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sec\theta=-2$

7. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\tan\theta=1$ (b) $\tan\theta=-1$ (c) $\cot\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

8. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin^2\theta=\frac{1}{2}$ (b) $4\cos^2\theta=1$ (c) $2\cot^2\theta=\text{cosec}^2\theta$

9. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\cos p\theta=\cos q\theta$ (b) $\sin 9\theta=\sin\theta$ (c) $\tan 5\theta=\cot\theta$

10. निम्न में से प्रत्येक के लिए θ का व्यापक मान ज्ञात कीजिए :

(a) $\sin m\theta+\sin n\theta=0$ (b) $\tan m\theta+\cot n\theta=0$

(c) $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ (d) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\sin 4\theta=0$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 4.1

1. (a) (i) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (c) $\frac{21}{221}$

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 4.2

1. (i) $\frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{2}$ (ii) $-\frac{1}{4}$ 2. (c) $-\frac{(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 4.3

1. (a) $\sin 5\theta - \sin\theta$; (b) $\cos 2\theta - \cos 6\theta$
   (c) $\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}$ (d) $\sin\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{6}$
2. (a) $2\sin 5\theta\cos\theta$ (b) $2\cos 5\theta \cdot \sin 2\theta$
   (c) $2\sin 3\theta \cdot \sin\theta$ (d) $2\cos 6\theta \cdot \cos\theta$

देखें आपने कितना सीखा 4.4

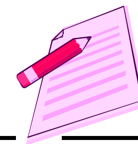
2. (a) $\frac{24}{25}$ (b) $\frac{120}{169}$ (c) $\frac{2016}{4225}$
3. (a) $\frac{161}{289}$ (b) $\frac{-7}{25}$ (c) $\frac{119}{169}$
4. (a) $\frac{24}{7}$ (b) $\frac{2ab}{b^2 - a^2}$ 5. 1

देखें आपने कितना सीखा 4.5

2. (a) $\frac{22}{27}$ (b) $\frac{(3pq^2 - 4p^3)}{q^3}$ 3. (a) $\frac{23}{27}$ (b) $\frac{4c^3 - 3cd^2}{d^3}$

देखें आपने कितना सीखा 4.6

2. (a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$, $\frac{\sqrt{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}}{2\sqrt{2}}$
3. (a) $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ (b) $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ (c) $\sqrt{2}-1$



देखें आपने कितना सीखा 4.7

1. (i) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$

   (iii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{4\pi}{3}, n \in z$ (iv) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in z$

2. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$ (ii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$ (iv) $\theta = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}, n \in z$

3. (i) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in z$

   (iii) $\theta = n\pi - \frac{\pi}{4}, n \in z$

4. (i) $\theta = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in z$ (iv) $\theta = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{5\pi}{18}, n \in z$

   (v) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (vi) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in z$

   (vii) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (viii) $\theta = \frac{n\pi}{2} \pm \frac{\pi}{12}, n \in z$

5. (i) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$ (ii) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (iii) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

आइये अभ्यास करें

5. (a) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{3}, n \in z$

   (c) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{5\pi}{4}, n \in z$ (d) $\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}, n \in z$

6. (a) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$ (b) $\theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}, n \in z$

   (c) $\theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in z$ (d) $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$

7. (a) $\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi + \frac{3\pi}{4}, n \in z$

   (c) $\theta = n\pi + \frac{2\pi}{3}, n \in z$

8. (a) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in z$ (b) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in z$

(c) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{4}, n \in z$

9. (a) $\theta = \frac{2n\pi}{p \mp q}, n \in z$ (b) $\theta = \frac{n\pi}{4}$ or $(2n+1)\frac{\pi}{10}, n \in z$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{12}, n \in z$

10. (a) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{m-n}$ or $\frac{2k\pi}{m+n}, k \in I$ (b) $\theta = \frac{(2k+1)\pi}{2(m-n)}, k \in z$

(c) $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{4}$ or $2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in z$

(d) $\theta = \frac{2n\pi}{5}$ or $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in I$ or $\theta = (2n-1)\pi, n \in z$

5

त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों में संबंध

पिछले पाठ में हमने वास्तविक संख्याओं के त्रिकोणमितीय फलन और उनके सम्बन्धों के विषय में सीखा है। हमने त्रिकोणमितीय फलनों का ग्राफ खींचना और उनके आलेखों से उनके गुणों का अध्ययन करना भी सीखा है। हमने त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर तथा वास्तविक संख्याओं के गुणजों तथा अपवर्तकों के त्रिकोणमितीय फलनों का भी अध्ययन किया है।

इस अध्याय में हम कुछ परिणामों को स्थापित करने का प्रयास करेंगे जो एक त्रिभुज की भुजाओं तथा कोणों के बीच सम्बन्धों को बतायेंगे जो त्रिभुजों के अज्ञात भागों को ज्ञात करने में सहायता करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- साइन-सूत्र, कोसाइन-सूत्र तथा प्रक्षेप-सूत्र का व्युत्पन्न करना
- इन सूत्रों को प्रश्नों को हल करने में उपयोग करना

पूर्व ज्ञान

- त्रिकोणमितीय फलन की जानकारी
- त्रिकोणमितीय फलनों के योग व अन्तर के सूत्र
- वास्तविक संख्याओं के गुणज व अपवर्तक के त्रिकोणमितीय फलन

5.1 ज्या सूत्र

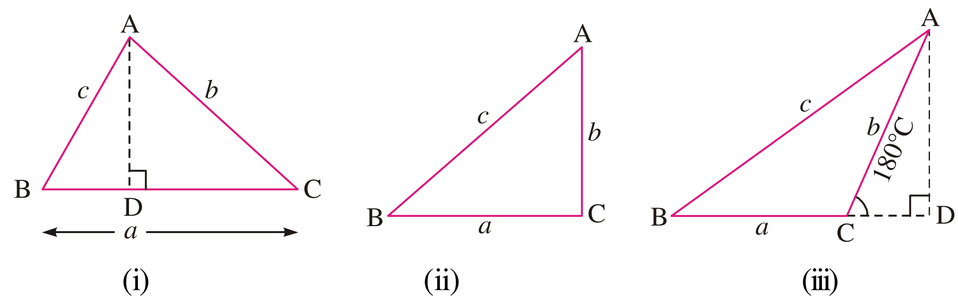
ΔABC में, शीर्ष A, B और C के संगत कोणों को A, B तथा C से प्रदर्शित किया जाता है और इसके शीर्षों की सम्मुख भुजाओं को क्रमशः a, b तथा c से प्रदर्शित करते हैं।

यह कोण तथा भुजाएँ मिलकर त्रिभुज के छः अवयव कहलाते हैं।

सिद्ध कीजिए कि किसी त्रिभुज में, भुजाओं की लम्बाईयां सम्मुख भुजाओं के कोणों के साइन के अनुपात में होती है

अर्थात्
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

उपपत्तिः ΔABC में, चित्र 5.1 [(i), (ii) और (iii)] में $BC = a, CA = b$ और $AB = c$ और $\angle C$ चित्र (i) में एक न्यूनकोण, (ii) में समकोण तथा (iii) में अधिक कोण है।



चित्र 5.1

AD, BC पर लम्ब खींचिए (अथवा BC को, आवश्यकता होने पर, बढ़ाइए)

चित्र 5.1 (i) में ΔABC में, $\dfrac{AD}{AB} = \sin B$ या $\dfrac{AD}{c} = \sin B \Rightarrow AD = c \sin B$ .....(i)

$\Delta ADC, \dfrac{AD}{AC} = \sin C$ [चित्र 5.1 (i)] या $\dfrac{AD}{b} = \sin C \Rightarrow AD = b \sin C$ ....(ii)

और चित्र 5.1 (ii) में, $\dfrac{AD}{AC} = 1 = \sin\dfrac{\pi}{2} = \sin C$ और $\dfrac{AD}{AB} = \sin B$

$AD = b \sin C$ और $AD = c \sin B$

और चित्र 5.1 (iii) में, $\dfrac{AD}{AC} = \sin(\pi - C) = \sin C$ और $\dfrac{AD}{AB} = \sin B$

या $\dfrac{AD}{b} = \sin C$ या $AD = b \sin C$ और $AD = C \sin B$

अतः इन तीनों चित्रों में, $AD = b \sin C$ और $AD = c \sin B$ ....(iii)

अतः (iii) से हमें प्राप्त हुआ

$$c \sin B = b \sin C \Rightarrow \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad ....(iv)$$

इसी प्रकार, c से AB पर लम्ब खींच कर हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad .....(v)$$

(iv) और (v) से हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad .....(A)$$

(A) ज्या-सूत्र कहलाता है।

टिप्पणी: (A) को प्रायः इस प्रकार भी लिखा जाता है :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \quad ....(A')$$

(A) तथा (A') के संबंध अज्ञात कोणों और भुजाओं को ज्ञात करने में हमारी सहायता करते हैं जब कुछ दूसरे कोण या भुजाएं दी हुई हों।

आइए कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 5.1. ज्या-सूत्र का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि $a\cos\frac{B-C}{2}=(b+c)\sin\frac{A}{2}$

हल : हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

$\Rightarrow$ $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=k(\sin B+\sin C)\cdot\sin\frac{A}{2}=k\cdot 2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}$

अब $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ $\quad(\because\ A+B+C=\pi)$

$\therefore$ $\sin\frac{B+C}{2}=\cos\frac{A}{2}$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=2k\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}=k\cdot\sin A\cdot\cos\frac{B-C}{2}=a\cdot\cos\frac{B-C}{2}=$ बायाँ पक्ष

उदाहरण 5.2. ज्या-सूत्र का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि $a(\cos C-\cos B)=2(b-c)\cos^2\frac{A}{2}$

हल : हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

$\Rightarrow$ $a=k\sin A,\ b=k\sin B,\ c=k\sin C$

$\therefore$ दायाँ पक्ष $=2k(\sin B-\sin C)\cdot\cos^2\frac{A}{2}=2k\cdot 2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\cos^2\frac{A}{2}$

$$=4k\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}\cdot\ \cos^2\frac{A}{2}=2a\sin\frac{B-C}{2}\cdot\ \cos\frac{A}{2}$$

$$=2a\sin\frac{B+C}{2}\cdot\ \sin\frac{B-C}{2}=a(\cos C-\cos B)=\text{ बायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 5.3. ΔABC में, सिद्ध कीजिए कि $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$

हल : हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

बायाँ पक्ष $=k\sin A\cdot\sin A-k\sin B\cdot\sin B=k\left[\sin^2A-\sin^2B\right]$

$$=k\sin(A+B)\cdot\sin(A-B)$$

$A+B=\pi-C\Rightarrow\ \sin(A+B)=\sin C$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $=k\sin C\cdot\sin(A-B)=c\sin(A-B)=$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 5.4. किसी त्रिभुज में, सिद्ध कीजिए कि $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$

हल: हम जानते हैं कि $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$ (माना)

बायाँ पक्ष $=k\sin A(k\sin B\cos C-k\sin C\cos B)=k^2\cdot\sin A[\sin(B-C)]$

$$= k^2 \cdot \sin(B+C) \cdot \sin(B-C) \qquad [\because \sin A = \sin(B+C)]$$

$$= k^2 (\sin^2 B - \sin^2 C) = k^2 \sin^2 B - k^2 \sin^2 C = b^2 - c^2 = \text{ दायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 5.1

1. साइन-सूत्र का उपयोग करके सिद्ध कीजिए कि :

(i) $\dfrac{\tan\dfrac{A-B}{2}}{\tan\dfrac{A+B}{2}} = \dfrac{a-b}{a+b}$ (ii) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

(iii) $a\sin\dfrac{B-C}{2} = (b-c)\cos\dfrac{A}{2}$ (iv) $\dfrac{b+c}{b-c} = \tan\dfrac{B+C}{2}\cdot\cot\dfrac{B-C}{2}$

(v) $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

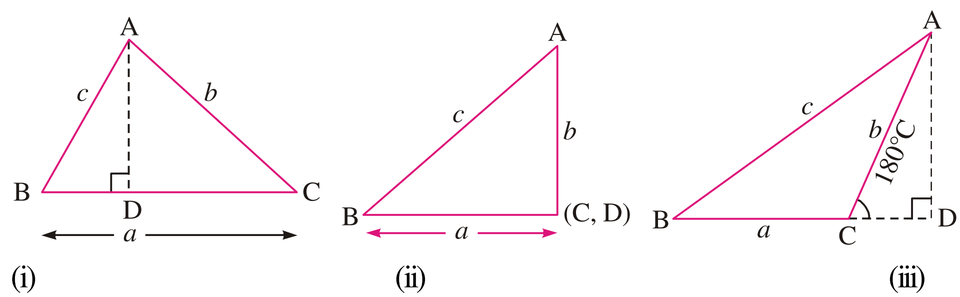
2. किसी त्रिभुज में, यदि $\dfrac{a}{\cos A} = \dfrac{b}{\cos B}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।

5.2 कोज्या-सूत्र

किसी त्रिभुज में सिद्ध कीजिए कि

(i) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (ii) $\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$ (iii) $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

उपपत्तिः



चित्र 5.2

तीन स्थितियां उत्पन्न होती हैं जब

(i) $\angle C$ न्यून कोण है (ii) $\angle C$ एक समकोण है (iii) $\angle C$ एक अधिक कोण है।

आइए प्रत्येक स्थिति पर विचार करें।

स्थिति (i) जब $\angle C$ एक न्यून कोण है

$$\frac{AD}{AC} = \sin C \quad \Rightarrow \quad AD = b\sin C$$

और $BD = BC - DC = a - b\cos C$ $\qquad \left[\because \dfrac{DC}{b} = \cos C\right]$

चित्र 5.2 (i) से, $c^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2$

$$= b^2\sin^2 C + a^2 + b^2\cos^2 C - 2ab\cos C = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

स्थिति (ii) जब $\angle C = \frac{\pi}{2}$, $c^2 = AD^2 + BD^2 = b^2 + a^2$

क्योंकि $\quad C = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos C = 0$

$$\therefore \qquad c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cdot\cos C \;\Rightarrow\; \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$$

स्थिति (iii) जब $\angle C$ एक अधिक कोण है

$$\frac{AD}{AC} = \sin(\pi - C) = \sin C \qquad \therefore\; AD = b\sin C$$

और $\quad BD = BC + CD = a + b\cos(180° - C) = a - b\cos C$

$$\therefore \qquad c^2 = (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

$$\Rightarrow \qquad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$\therefore$ सभी तीनों स्थितियों में, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

इसी प्रकार, यह भी सिद्ध किया जा सकता है कि $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$ और $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

आइए कुछ उदाहरण लें और इनकी उपयोगिता को देखें।

उदाहरण 5.5. त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc}$

हल : हम जानते हैं कि $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, $\cos B = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$\therefore$ बायाँ पक्ष $= \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,abc} + \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2\,abc} + \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,abc}$

$= \dfrac{1}{2\,abc}\left[b^2 + c^2 - a^2 + c^2 + a^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2\right] = \dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{2\,abc} =$ दायाँ पक्ष

उदाहरण 5.6. यदि $\angle A = \frac{\pi}{3}$, सिद्ध कीजिए कि ΔABC में $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$

हल : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ .....(i)

$$A = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \cos A = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

(i) को हम लिख सकते हैं : $\frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \Rightarrow b^2+c^2-a^2 = bc$

या $\quad b^2+c^2+2bc-a^2 = 3bc$ या $(b+c)^2 - a^2 = 3bc$

या $\quad (b+c+a)(b+c-a) = 3bc$.

उदाहरण 5.7. यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ 3 सेमी, 5 सेमी और 7 सेमी हों, तो त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर, a = 3 सेमी, b = 5 सेमी, c = 7 सेमी

हम जानते हैं कि एक त्रिभुज में सबसे बड़ी भुजा का सम्मुख कोण सबसे बड़ा होता है।

$\therefore \quad \angle C$ सबसे बड़ा कोण है

$$\therefore \quad \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{9+25-49}{30} = \frac{-15}{30} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore \quad \cos C = \frac{-1}{2} \Rightarrow C = \frac{2\pi}{3}$$

$\therefore$ त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण $\frac{2\pi}{3}$ अथवा $120°$ है।

उदाहरण 5.8. ΔABC में, यदि $\angle A = \frac{\pi}{3}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$.

हल: $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ या $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\therefore \quad b^2+c^2-a^2 = bc$$

या
$$b^2+c^2 = a^2+bc \qquad .....(i)$$

बायाँ पक्ष $= \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = \frac{ab+b^2+c^2+ac}{(c+a)(a+b)} = \frac{ab+a^2+bc+ac}{(c+a)(a+b)}$ [(i) के उपयोग से]

$$= \frac{ab+a^2+ac+bc}{(c+a)(a+b)} = \frac{a(a+b)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)} = \frac{(a+c)(a+b)}{(a+c)(a+b)} = 1 = \text{दायाँ पक्ष}$$

देखें आपने कितना सीखा 5.2

1. ΔABC में सिद्ध कीजिए कि

(i) $\frac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A + \frac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B + \frac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C = 0$

(ii) $(a^2-b^2+c^2)\tan B = (b^2-c^2+a^2)\tan C = (c^2-a^2+b^2)\tan A$

(iii) $\frac{k}{2}(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ जहाँ $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k$

(iv) $\left(b^2-c^2\right)\cot A+\left(c^2-a^2\right)\cot B+\left(a^2-b^2\right)\cot C=0$

2. एक त्रिभुज की भुजाएं क्रमशः $a = 9$ सेमी, $b = 8$ सेमी $c = 4$सेमी है। सिद्ध कीजिए कि

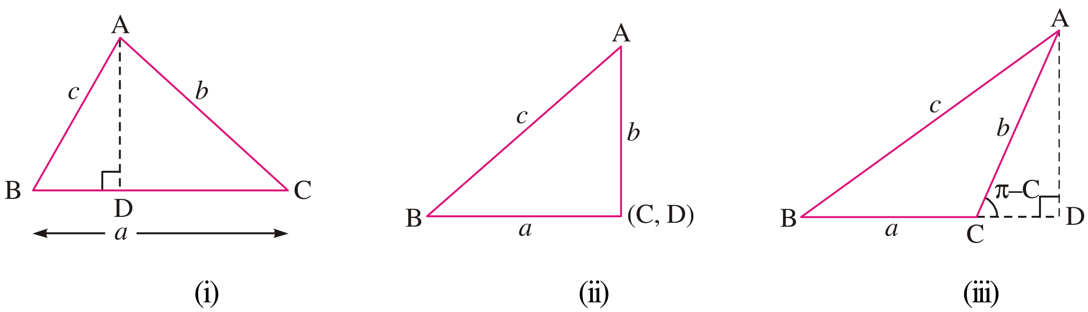
$$6\cos C=4+3\cos B$$

5.3 प्रक्षेप सूत्र

ΔABC में, यदि $BC=a, CA=b$ और $AB=c$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि

(i) $a=b\cos C+c\cos B$ (ii) $b=c\cos A+a\cos C$ (iii) $c=a\cos B+b\cos A$

उपपत्तिः



चित्र 5.3

पिछले परिणाम की तरह, यहां पर भी तीन स्थितियां उत्पन्न होती हैं। हम एक-एक करके प्रत्येक स्थिति का वर्णन करेंगे।

स्थिति (i) जब $\angle C$ न्यून कोण है:

ΔADB में, $\frac{BD}{c}=\cos B \quad\Rightarrow\quad BD=c\cos B$

Δ ADC में, $\frac{DC}{b}=\cos C \quad\Rightarrow\quad DC=b\cos C$

$a = BD + DC = c\cos B + b\cos C$

$\therefore \quad a = c\cos B + b\cos c$

स्थिति (ii) जब $\angle C=\frac{\pi}{2}$

$$a=BC=\frac{BC}{AB}\cdot AB=\cos B\cdot c$$

$$=c\cos B+0 \quad =c\cos B+b\cos\frac{\pi}{2} \qquad \left(\because \cos\frac{\pi}{2}=0\right)$$

$$=c\cos B+b\cos C$$

स्थिति (iii) जब $\angle C$ अधिक कोण है:

Δ ADB में, $\frac{BD}{c}=\cos B \Rightarrow BD=c\cos B$

Δ ADC में, $\quad \dfrac{CD}{b} = \cos(\pi - C) = -\cos C \;\Rightarrow\; CD = -b\cos C$

चित्र 5.3 (iii) में, $BC = BD - CD$

$$a = c\cos B - (-b\cos C) = c\cos B + b\cos C$$

अत: सभी स्थितियों में, $a = b\cos C + c\cos B$

इसी प्रकार, हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$b = c\cos A + a\cos C \quad \text{और} \quad c = a\cos B + b\cos A$$

आइए कुछ उदाहरण लेकर इन परिणामों का उपयोग दिखाएँ।

उदाहरण 5.9. किसी त्रिभुज ABC में, सिद्ध कीजिए कि

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$$

हल : बायाँ पक्ष $= b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$

$$= (b\cos A + a\cos B) + (c\cos A + a\cos C) + (c\cos B + b\cos C)$$

$$= c+b+a \;\; = a+b+c = \text{ दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 5.10. किसी ΔABC में, सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos 2A}{a^2} - \dfrac{\cos 2B}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{1}{b^2}$

हल : बायाँ पक्ष $= \dfrac{1-2\sin^2 A}{a^2} - \dfrac{1-2\sin^2 B}{b^2} = \dfrac{1}{a^2} - \dfrac{2\sin^2 A}{a^2} - \dfrac{1}{b^2} + \dfrac{2\sin^2 B}{b^2}$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} - 2k^2 + 2k^2 \qquad \left(\because \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = k\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = \text{दायाँ पक्ष}$$

उदाहरण 5.11. ΔABC में, यदि $a\cos A = b\cos B$ जहां $a \neq b$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि ΔABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल : दिया है : $a\cos A = b\cos B$

$\therefore \qquad a\left[\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right] = b\left[\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right]$

या $\qquad a^2(b^2+c^2-a^2) = b^2(a^2+c^2-b^2)$ या $a^2b^2 + a^2c^2 - a^4 = a^2b^2 + b^2c^2 - b^4$

या $\qquad c^2(a^2-b^2) = (a^2-b^2)(a^2+b^2) \Rightarrow c^2 = a^2+b^2$

$\therefore \quad \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

उदाहरण 5.12. यदि $a=2, b=3, c=4$ हो, तो $\cos A, \cos B$ और $\cos C$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\quad \cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{9+16-4}{2\times3\times4} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8}$

$\cos B = \dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ac} = \dfrac{16+4-9}{2\times4\times2} = \dfrac{11}{16}$ और $\cos C = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \dfrac{4+9-16}{2\times2\times3} = \dfrac{-3}{12} = \dfrac{-1}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. यदि $a=3, b=4$ और $c=5$ हो, तो $\cos A, \cos B$ तथा $\cos C$ का मान ज्ञात कीजिए।
2. एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः 7 सेमी, $4\sqrt{3}$ सेमी, तथा $\sqrt{13}$ सेमी है। त्रिभुज के सबसे छोटे कोण का माप ज्ञात कीजिए।
3. यदि a : b : c = 7 : 8 : 9, तो सिद्ध कीजिए कि $\cos A : \cos B : \cos C = 14:11:6$
4. यदि एक त्रिभुज की भुजाएँ क्रमशः x^2+x+1, $2x+1$ और x^2-1 हैं, तो सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज का सबसे बड़ा कोण $\frac{2\pi}{3}$ है।
5. एक त्रिभुज में, $b\cos A = a\cos B$, सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज है।
6. प्रक्षेप-सूत्र से साइन-सूत्र को व्युत्पन्न (deduce) कीजिए।

आइये दोहराएँ

निम्न सूत्रों की सहायता से एक त्रिभुज के अज्ञात अवयवों को ज्ञान कर पाना सम्भव है यदि त्रिभुज के अनुरूप अवयव दिए हुए हों।

ज्या सूत्र

(i) $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

कोज्या सूत्र

(ii) $$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}, \ \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

प्रक्षेप सूत्र

$$a = b\cos C + c\cos B, \ b = c\cos A + a\cos C, \ c = a\cos B + b\cos A$$

सहायक वेबसाइट

- *www.mathopenref.com/trianglesideangle.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Solution_of_triangles*
- *www.themathpage.com/abookI/propI-18-19.htm*

आइए अभ्यास करें

एक त्रिभुज ABC में, निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए (1-10)

1. $a\sin(B-C) + b\sin(C-A) + c\sin(A-B) = 0$

2. $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$

3. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\cdot\sin 2A + \dfrac{c^2-a^2}{b^2}\cdot\sin 2B + \dfrac{a^2-b^2}{c^2}\cdot\sin 2C = 0$

4. $\dfrac{c^2+a^2}{b^2+c^2} = \dfrac{1+\cos B\cos(C-A)}{1+\cos A\cos(B-C)}$

5. $\dfrac{c-b\cos A}{b-c\cos A} = \dfrac{\cos B}{\cos C}$

6. $\dfrac{a-b\cos C}{c-b\cos A} = \dfrac{\sin C}{\sin A}$

7. $(a+b+c)\left[\tan\dfrac{A}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\right] = 2c\cot\dfrac{C}{2}$

8. $\sin\dfrac{A-B}{2} = \dfrac{a-b}{c}\cos\dfrac{C}{2}$

9. (i) $b\cos B + c\cos C = a\cos(B-C)$

   (ii) $a\cos A + b\cos B = c\cos(A-B)$

10. $b^2 = (c-a)^2\cos^2\dfrac{B}{2} + (c+a)^2\sin^2\dfrac{B}{2}$

11. एक त्रिभुज में यदि $b=5, c=6, \tan\dfrac{A}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $a=\sqrt{41}$.

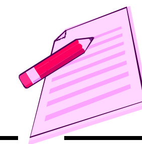
12. ΔABC में सिद्ध कीजिए कि $\dfrac{\cos A}{\cos B} = \dfrac{b-a\cos C}{a-b\cos C}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 5.3

1. $\cos A = \dfrac{4}{5}$, $\cos B = \dfrac{3}{5}$, $\cos C =$ शून्य

2. त्रिभुज का सबसे छोटा कोण $\dfrac{\pi}{6}$ है।



6

अनुक्रम तथा श्रेणियां

उत्तरोत्तर संख्याएँ जिसमें से एक संख्या पहले नियुक्त होती है, उसके बाद दूसरी, उसके बाद तीसरी और इस प्रकार बढ़ता हुआ संख्या क्रम एक अनुक्रम कहलाता है। अनुक्रमों के व्यापक उपयोग हैं। इस पाठ में हम विशेष प्रकार के अनुक्रमों की चर्चा करेंगे, जिन्हें समान्तर अनुक्रम, गुणोत्तर अनुक्रम कहते हैं और दो दी हुई संख्याओं के मध्य समान्तर माध्य (A.M), गुणोत्तर माध्य (G.M) ज्ञात करेंगे। हम समान्तर माध्य और गुणोत्तर माध्य में सम्बन्ध भी स्थापित करेंगे।

आइए निम्न समस्याओं पर विचार करें :

(a) एक आदमी नवजात खरगोशों का एक जोड़ा एक दरबे में रखता है और निश्चित अवधि के पश्चात् कितने खरगोश होंगे यह जानना चाहता है। एक खरगोश का जोड़ा अपने जन्म के दो महीनों के पश्चात बच्चे पैदा करना प्रारम्भ करेगा, और उसके बाद प्रत्येक महीने में एक नया जोड़ा खरगोशों का दिखाई पड़ेगा। प्रारंभ में खरगोशों के उसी दरबे में केवल एक जोड़ा खरगोशों का होगा, दूसरे महीने में वही जोड़ा होगा, तीसरे महीने में उसके पास उसी दरबे में खरगोशों के तीन जोड़े होंगे। इस प्रकार खरगोशों के जोड़ों की संख्या क्रमागत महीनों में 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... होगी।

(b) आवर्ती दशमलव $0.\bar{3}$ को योग के रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं:

$$0.\bar{3} = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots$$

(c) एक व्यक्ति पहले दिन 10 रुपये कमाता है, दूसरे दिन 30 रुपये, तीसरे दिन 50 रुपये इत्यादि। तो व्यक्ति की दिन प्रतिदिन की कमाई (रू. में) इस प्रकार लिख सकते हैं

10, 30, 50, 70, 90, $\cdots$

हम किसी विशेष महीने के 10 वें दिन की उसकी कमाई पूछ सकते हैं।

पुनः निम्नलिखित अनुक्रमों पर विचार करें :

(1) $2, 4, 8, 16, \cdots$ (2) $\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, \frac{1}{81}, -\frac{1}{243}, \ldots$ (3) $0.01, 0.0001, 0.000001, \cdots$

इन तीन अनुक्रमों में पहले पद के अतिरिक्त प्रत्येक पद एक निश्चित अनुक्रम में हैं, लेकिन पहले दिये तीन प्रश्नों से क्रम में अलग हैं। इस पाठ में हम उन अनुक्रमों पर चर्चा करेंगे जिन श्रेणियों का एक निश्चित क्रम है।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे :

- अनुक्रम (श्रेणी) की अवधारणा का वर्णन करना;
- समान्तर श्रेणी को परिभाषित करना तथा उदाहरणों का प्रमाण (उल्लेख) देना;
- समान्तर श्रेणी का व्यापक पद तथा सार्व अन्तर ज्ञात करना;
- a, d, n तथा t_n में से कोई तीन पद (राशि) दी हो, तब समान्तर श्रेणी की चौथी राशि प्राप्त करना;
- समान्तर श्रेणी के दो पद दिए गये हों तब सार्वअन्तर या कोई अन्य पद ज्ञात करना;
- A.P. के प्रथम n पदों का योग का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- S, n, a तथा d में से कोई तीन रशियाँ दी हुई हों तो A.P. की चौथी राशि की गणना करना;
- दो संख्याओं के मध्य समान्तर माध्य अन्तर्निविष्ट करना रखना;
- A.P. की अवधारणा का उपयोग करके दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करना;
- दिखाना कि G.P. एक अनुक्रम है जो एक निश्चित शून्येतर संख्या (एक के अतिरिक्त) के गुणन से प्राप्त होती है
- श्रेणियों के समुच्चय से G.P. पहचानना
- G.P. का व्यापक पद और सार्वअनुपात ज्ञात करना
- t_n, a, r तथा n में से कोई तीन राशियाँ दी हों तो, G.P. की चौथी राशि की गणना करना
- G.P. के सार्व अनुपात तथा किसी अन्य पद की गणना करना जब इसके कोई दो पद दिए गये हैं;
- अनुक्रम लिखना, जब व्यापक पद दिया हो;
- G.P. के प्रथम n पदों का योग का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- यदि a, r, n तथा S में से कोई तीन राशियाँ दी हो, तो G.P. की चौथी राशि की गणना करना
- G.P. के अनन्त पदों के योग (S_∞) का सूत्र व्युत्पन्न करना, जब $|r| < 1$;
- तीसरी राशि की गणना करना, जब S_∞, a तथा r में से कोई दो राशियां दी गई हों;
- G.P. का उपयोग करके आवर्ती दशमलवों को भिन्न में परिवर्तित करना
- दो संख्याओं के मध्य G.M. अन्तर्निविष्ट करना
- समान्तर माध्य (A.M.) तथा गुणोत्तर माध्य (G.M.) के मध्य सम्बन्ध स्थापित करना

पूर्व ज्ञान

- घातांकों के नियम
- दो अज्ञात राशियों के युगपत समीकरण
- द्विघात समीकरण

6.1 अनुक्रम

अनुक्रम संख्याओं का संग्रह है जो कुछ निर्दिष्ट नियम का पालन करते हुए एक निश्चित क्रम में होते हैं। जहाँ संग्रह की एक निश्चित संख्या a_n संगत धनात्मक पूर्णांक n से सम्बन्धित हो सकती है।

अनुक्रम के लिए विभिन्न संकेत प्रयोग में लाए जाते हैं :

1. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ 2. a_n, $n = 1, 2, 3, ...$ 3. $\{a_n\}$

आइए निम्न अनुक्रमों पर विचार करें

1. $1, 2, 4, 8, 16, 32, ...$ 2. $1, 4, 9, 16, 25, ...$

3. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots$ 4. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \cdots$

उपरोक्त उदाहरणों में, अनुक्रम के n वें पद के व्यंजक नीचे दिए गए है :

(1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) $a_n = n^2$ (3) $a_n = \frac{n}{n+1}$ (4) $a_n = \frac{1}{n}$ सभी धनात्मक पूर्णांक n के लिए।

भूमिका में पहले प्रश्न (समस्या) के लिए पदों को निम्न सम्बन्ध से प्राप्त कर सकते हैं।

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, \text{n} \geq 3$$

परिमित अनुक्रम में पदों की संख्या परिमित होती है। अपरिमित अनुक्रम में पदों की संख्या अपरिमित होती है।

6.2 समान्तर श्रेणी

आइए संख्याओं के अनुक्रम के निम्न उदाहरणों पर विचार करें :

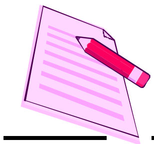
(1) $2, 4, 6, 8, \cdots$ (2) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \cdots$

(3) $10, 8, 6, 4, \cdots$ (4) $-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2, -\frac{5}{2}, \cdots$

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त संख्याओं के चार अनुक्रमों के पहले पद क्रमशः 2, 1, 10, और $-\frac{1}{2}$ हैं। पहले पद का इस पाठ में बड़ा महत्व है। अनुक्रम के प्रत्येक उत्तरोत्तर पद का पहले पद से निश्चित सम्बन्ध होता है। पदों का पहले पद से क्या सम्बन्ध है। उदाहरण (1) में

पहला पद $= 2$, दूसरा पद $= 4 = 2 + 1 \times 2$

तीसरा पद$= 6 = 2 + 2 \times 2$ चौथा पद $= 8 = 2 + 3 \times 2$ और इसी प्रकार



उपरोक्त अनुक्रम के प्रत्येक पद में 2 जोड़ने पर उत्तरोत्तर पद प्राप्त होते हैं, अर्थात् किन्ही दो क्रमागत पदों का अन्तर समान है।

इस गुण से सम्बन्धित संख्याओं का अनुक्रम, जिसमें दो क्रमागत पदों का अन्तर एक शून्येतर समान संख्या है, समान्तर श्रेणी कहलाती है जिसे सरल रूप से A. P. लिखते हैं।

दो क्रमागत पदों का अन्तर A.P. का सार्व अन्तर कहलाता है इस को d से प्रदर्शित करते हैं।

आम तौर पर A.P. जिसका प्रथम पद a, सार्वअन्तर d है, को $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ भी लिख सकते हैं।

हम t_n का प्रयोग श्रेणी के n वें पद को दर्शाने में करते हैं।

6.2.1 समान्तर श्रेणी का व्यापक पद

आइए A.P. $a, a+d, a+2d, a+3d, \cdots$ पर विचार करें।

यहाँ पहला पद $= a$, दूसरा पद $= a + d = a + (2-1)\,d$, तीसरा पद $= a + 2d = a + (3-1)\,d$

उपरोक्त पद्धति के अवलोकन द्वारा n वाँ पद इस प्रकार लिख सकते हैं : $t_n = a + (n-1)\,d$

इसलिये यदि A.P. का प्रथम पद और सार्व अन्तर ज्ञात हैं तो श्रेणी का कोई भी पद उपरोक्त सूत्र से ज्ञात किया जा सकता है।

कभी–कभी A.P. के n वें पद को n के पदों के रूप में प्रकट करते हैं उदाहरणार्थ $t_n = 2n - 1$

उस स्थिति में व्यंजक में $n = 1, 2, 3, \cdots$ रखकर श्रेणी प्राप्त होगी। इस स्थिति में A.P. के पद 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$ होंगे।

टिप्पणी :

(i) यदि A.P. के प्रत्येक पद में एक शून्येतर समान संख्या जोड़ी जाए, तो परिणामी अनुक्रम पुनः A.P. ही प्राप्त होता है।

(ii) यदि A.P. के प्रत्येक पद को एक शून्येतर समान संख्या से गुणा किया जाए तो परिणामी अनुक्रम पुनः A.P. ही प्राप्त होता है।

उदाहरण 6.1. A.P. 2, 4, 6, ... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ प्रथम पद $(a) = 2$ और सार्वअन्तर $d = 4 - 2 = 2$

सूत्र $t_n = a + (n-1)\,d$, का प्रयोग करके, हमें प्राप्त होता है

$$t_{10} = 2 + (10-1)\,2 = 2 + 18 = 20$$

अतः दी गई A.P. का 10वाँ पद = 20

उदाहरण 6.2. किसी A.P. का 10वाँ पद – 15 और 31वाँ पद –57 है, 15वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि A.P. का प्रथम पद a तथा सार्वन्तर d है।

तब सूत्र $t_n = a + (n-1)d$, से

$$t_{10} = a + (10-1)d = a + 9d$$

$$t_{31} = a + (31-1)d = a + 30d$$

हमें प्राप्त हुआ

$$a + 9d = -15 \qquad ...(1)$$

$$a + 30d = -57 \qquad ...(2)$$

a और b के मान ज्ञात करने के लिये समीकरण (1) और (2) को हल कर लीजिये।

(2) में से (1) घटाने पर,

$$21d = -57 + 15 = -42$$

$$\therefore \qquad d = \frac{-42}{21} = -2$$

पुनः (1) से, $a = -15 - 9d = -15 - 9(-2) = -15 + 18 = 3$

अब $t_{15} = a + (15-1)d = 3 + 14(-2) = -25$

उदाहरण 6.3. A.P. 5, 11, 17, ... का कौन सा पद 119 है?

हल : यहाँ $a = 5$, $d = 11 - 5 = 6$, $t_n = 119$

हम जानते हैं कि

$$t_n = a + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \qquad 119 = 5 + (n-1) \times 6$$

$$\Rightarrow \qquad (n-1) = \frac{119-5}{6} = 19$$

$$\therefore \qquad n = 20$$

अतः A.P. का 20वाँ पद 119 है।

उदाहरण 6.4. क्या 600, A.P. 2, 9, 16, ... का कोई पद है?

हल : यहाँ $a = 2$, और $d = 9 - 2 = 7$.

मान लीजिए 600 A.P. का nवाँ पद है। हमें प्राप्त हुआ $t_n = 2 + (n-1)7$

प्रश्नानुसार $2 + (n-1)7 = 600$

$\therefore \quad (n-1)7 = 598$

या $\quad n = \frac{598}{7} + 1 \qquad \therefore \; n = 86\frac{3}{7}$

क्योंकि n एक भिन्न है। इसलिए यह श्रेणी का सदस्य नहीं हो सकता। अतः 600 दी हुई श्रेणी, A.P. का पद नहीं है।

उदाहरण 6.5. यदि $a + b + c \neq 0$ और $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ A.P. में है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ भी A.P. में होंगे।

हल : क्योंकि $\frac{a}{b+c}, \frac{b}{c+a}, \frac{c}{a+b}$ A.P. में हैं, अतः

$$\frac{b}{c+a} - \frac{a}{b+c} = \frac{c}{a+b} - \frac{b}{c+a}$$

या $$\left(\frac{b}{c+a}+1\right) - \left(\frac{a}{b+c}+1\right) = \left(\frac{c}{a+b}+1\right) - \left(\frac{b}{c+a}+1\right)$$

या $$\frac{a+b+c}{c+a} - \frac{a+b+c}{b+c} = \frac{a+b+c}{a+b} - \frac{a+b+c}{c+a}$$

या $$\frac{1}{c+a} - \frac{1}{b+c} = \frac{1}{a+b} - \frac{1}{c+a} \quad (\text{क्योंकि } a + b + c \neq 0)$$

या $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ A.P. में हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.1

1. निम्नलिखित A.P. का nवाँ पद ज्ञात कीजिए।
   (a) $1, 3, 5, 7, \cdots$ (b) $3, 5, 7, 9, \cdots$
2. यदि $t_n = 2n + 1$ हो, तो A.P. ज्ञात कीजिए।
3. A.P. $2\frac{1}{2}, 4, 5\frac{1}{2}$, ... का कौन सा पद 31 है। 10वाँ पद भी ज्ञात कीजिए।
4. क्या -292 A.P. $7, 4, 1, -2, \ldots$ का कोई पद है?
5. A.P. का mवाँ पद n तथा nवाँ पद m है। दिखाइये कि इसका $(m + n)$ वाँ पद शून्य होगा।
6. तीन संख्याएँ A.P. में हैं प्रथम और अन्तिम संख्या का अन्तर 8 है और इन दोनों का गुणनफल 20 है संख्याएँ ज्ञात कीजिए।
7. एक अनुक्रम का nवाँ पद $na + b$ है। सिद्ध कीजिये कि यह एक A.P. है जिसका सार्वअन्तर a है।

6.3 समान्तर श्रेणी के प्रथम *n* पदों का योग ज्ञात करना

मान लीजिए A.P. का प्रथम पद a, सार्वअन्तर d है। माना l अन्तिम पद को व्यक्त करता है।

$$l = t_n = a + (n - 1)d \quad \ldots (i)$$

माना S_n, A.P. के प्रथम n पदों के योग को व्यक्त करता है। तो

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + (l - 2d) + (l - d) + l \quad \ldots (ii)$$

उपर्युक्त समीकरण (R.H.S.) के दायें पक्ष को उलटने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$S_n = l + (l - d) + (l - 2d) + \ldots + (a + 2d) + (a + d) + a \qquad \ldots \text{(iii)}$$

(ii) और (iii) को ऊर्ध्वाधर जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है।

$$2S_n = (a + l) + (a + l) + (a + l) + \ldots\ n \text{ पदों तक} = n\,(a + l) \text{ अर्थात् } S_n = \frac{n}{2}(a + l)$$

साथ ही $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$ [(i) से]

यह स्पष्ट है कि $t_n = S_n - S_{n-1}$

उदाहरण 6.6. $2 + 4 + 6 + \ldots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 2$, $d = 4 - 2 = 2$

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$, का प्रयोग करके हमें प्राप्त है

$$S_n = \frac{n}{2}[2 \times 2 + (n-1)\,2] = \frac{n}{2}[2 + 2n] = \frac{2n\,(n+1)}{2} = n\,(n+1)$$

उदाहरण 6.7. किसी A.P. का 35वाँ पद 69 है। A.P. इस के 69 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना A.P. का प्रथम पद a और सार्वअन्तर d है

हमें प्राप्त होता है $t_{35} = a + (35 - 1)\,d = a + 34\,d.\ \therefore\ a + 34\,d = 69$ ... (i)

सूत्र $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)\,d]$ से हमें प्राप्त होता है

$$S_{69} = \frac{69}{2}[2a + (69-1)\,d] = 69\,(a + 34d) \qquad \text{[(i) का प्रयोग करके]}$$

$$= 69 \times 69 = 4761$$

उदाहरण 6.8. किसी A.P. का प्रथम पद 10 और अन्तिम पद 50 है। यदि सभी पदों का योग 480 है तो सार्वअन्तर और पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हमें प्राप्त होता है $a = 10$, $l = t_n = 50$, $S_n = 480$.

a, t_n और S_n के मानों को सूत्र $S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\,d\right]$ और $t_n = a + (n - 1)\,d$, में रखने पर, हमें प्राप्त होता है

$$480 = \frac{n}{2}\left[20 + (n-1)\,d\right] \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$50 = 10 + (n - 1)\,d \qquad \cdots \text{(ii)}$$

समीकरण. (ii) से प्राप्त होता है: $(n - 1)\,d = 50 - 10 = 40$ ... (iii)

समीकरण. (i) से हमें प्राप्त होता है

$$480 = \frac{n}{2}(20+40) \text{ या } 60n = 2 \times 480 \therefore n = \frac{2\times 480}{60} = 16$$

(iii) से, $d = \frac{40}{15} = \frac{8}{3}$ (क्योंकि $n-1=16-1=15$)

उदाहरण 6.9. मान लीजिए कि किसी A.P. का nवाँ पद और n पदों का योगफल क्रमशः p और q है। सिद्ध कीजिए कि इसका प्रथम पद $\left(\frac{2q-pn}{n}\right)$. है।

हल : इस स्थिति में $t_n = p$ और $S_n = q$

माना A.P. का प्रथम पद a है अब $S_n = \frac{n}{2}(a+t_n)$

या $\frac{n}{2}(a+p)=q$ या $a+p=\frac{2q}{n}$ या $a=\frac{2q}{n}-p \;\therefore\; a=\frac{2q-pn}{n}$

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. निम्न A.P. का योग ज्ञात कीजिए :

   (a) 8, 11, 14, 17, $\cdots$ 15 पदों तक (b) 8, 3, –2, –7, –12, $\cdots n$ पदों तक

2. A.P. 27, 23, 19, 15, ... के कितने पदों का योग 95 है?

3. एक व्यक्ति अपने मित्र से 1740 रुपये ब्याज मुक्त ऋण लेना चाहता है। भुगतान मासिक किस्तों में करने का वादा करता है। पहले मास में वह 200 रुपये देता है और अगले प्रत्येक मास की किस्तों में 10-10 रुपये कम करता जाता है। कितने महीने में वह पूरा भुगतान कर देगा?

4. श्रेणी 3, 6, 9, 12, $\cdots$ में कम–से–कम कितने पद लिए जाएँ कि उनका योग 2000 से कम न हो?

5. बच्चों की आलू दौड़ में, n आलू एक–एक मीटर की दूरी पर, एक रेखा में रखे जाते हैं। एक प्रतियोगी निकटतम आलू से 5 मीटर दूर उसी रेखा में एक बिन्दु से प्रारम्भ करता है। यदि वह एक समय में जाकर एक ही आलू उठाये तथा उसे लाकर प्रारम्भिक बिन्दु पर रखे तो इस प्रकार सब आलुओं को प्रारम्भिक बिन्दु पर इकट्ठा करने में कुल चली दूरी के लिए एक व्यंजक ज्ञात कीजिए। यदि कुल चली हुई दूरी 162 मीटर हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

6. यदि अनुक्रम के प्रथम n पदों का योग an^2+bn हो, तो सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम A.P. में हैं। इसका सार्वअन्तर ज्ञात कीजिए।

6.4 समान्तर माध्य (A.M.)

जब तीन संख्याएँ a, A और b A.P. में हों, तब A, a तथा b का समान्तर माध्य कहलाता है। हम प्राप्त करते हैं, $A - a = b - A$ या $A = \frac{a+b}{2}$

A.P.

इस प्रकार दो संख्याओं का अभीष्ट A.M. $\dfrac{a+b}{2}$ है।

निम्न A.P. पर विचार करें: 3, 8, 13, 18, 23, 28, 33.

यहाँ प्रथम पद 3 और अन्तिम पद 33 के मध्य 5 पद हैं। ये पद 3 और 33 के मध्य A.M. कहलाते हैं। एक अन्य A.P. 3, 13, 23, 33, पर विचार कीजिए। इस स्थिति में 3 और 33 के मध्य दो A.M.13 और 23 हैं।

सामान्यतया, दो संख्याओं a तथा b के मध्य कितने ही A.M. अन्तर्निविष्ट किये जा सकते हैं। माना $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$, a तथा b के बीच n समांतर माध्य हैं।

$a, A_1, A_2, A_3 \ldots, A_n, b$ एक समांतर श्रेढ़ी है

माना इस A.P. का सार्वअन्तर d है। स्पष्टतया इसमें $(n + 2)$ पद हैं।

$\therefore \quad b = (n + 2)$वाँ पद $= a + (n + 1)\, d$

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

अब $\quad A_1 = a + d \Rightarrow A_1 = \left(a + \dfrac{b-a}{n+1}\right) \qquad \ldots\text{(i)}$

$$A_2 = a + 2d \Rightarrow A_2 = \left(a + \frac{2(b-a)}{n+1}\right) \qquad \ldots\text{(ii)}$$

$$\vdots$$

$$A_n = a + nd \Rightarrow A_n \left(a + \frac{n(b-a)}{n+1}\right) \qquad \ldots(n)$$

ये a तथा b के मध्य अभीष्ट n समांतर माध्य हैं।

(i), (ii), ..., (n) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = na + \cdots + \frac{b-a}{n+1}[1+2+\ldots n]$$

$$= na + \left(\frac{b-a}{n+1}\right)\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) = na + \frac{n(b-a)}{2} = \frac{n(a+b)}{2}$$

$= n$ [a तथा b के मध्य एक समांतर माध्य]

उदाहरण 6.10. 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य अन्तर्निविष्ट कीजिये।

माना : माना 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य A_1, A_2, A_3, A_4 तथा A_5 हैं।

इसलिए $8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26$ समांतर श्रेणी में हैं। साथ ही $a = 8$, $b = 26$, $n = 7$

हम प्राप्त करते हैं $26 = 8 + (7 - 1)\, d \;\; \therefore\; d = 3$

$\therefore \quad A_1 = a + d = 8 + 3 = 11, A_2 = a + 2d = 8 + 2 \times 3 = 14$

$A_3 = a + 3d = 17, A_4 = a + 4d = 20$

$A_5 = a + 5d = 23$

अतः 8 और 26 के मध्य 5 समांतर माध्य 11, 14, 17, 20 और 23 हैं।

उदाहरण 6.11. 20 और 80 के मध्य n समांतर माध्य इस प्रकार हैं कि पहले समांतर माध्य और अन्तिम समांतर माध्य का अनुपात 1 : 3 है। n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ A.P. का $(n+2)$वाँ पद 80 है, प्रथम पद 20 है। माना सार्वअन्तर d है।

$\therefore \quad 80 = 20 + (n+2-1)\, d$

या $\quad 80 - 20 = (n+1)\, d$ या $d = \dfrac{60}{n+1}$

प्रथम A.M. $= 20 + \dfrac{60}{n+1} = \dfrac{20n+20+60}{n+1} = \dfrac{20n+80}{n+1}$

अन्तिम A.M. $= 20 + n \times \dfrac{60}{n+1} = \dfrac{80n+20}{n+1}$

हम प्राप्त करते हैं, $\dfrac{20n+80}{n+1} : \dfrac{80n+20}{n+1} = 1 : 3$

या $\quad \dfrac{n+4}{4n+1} = \dfrac{1}{3}$ या $4n + 1 = 3n + 12$ या $n = 11$

$\therefore$ 20 और 80 के मध्य 11 A.M. हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.3

1. सिद्ध कीजिये कि यदि समांतर श्रेणी के पदों की संख्या विषम है तो मध्य पद पहले तथा अन्तिम पद का समांतर माध्य होगा।
2. 7 और 85 के मध्य m समांतर माध्य इस प्रकार लिये गये हैं कि $(m-3)$वें तथा m वें माध्यों का अनुपात 11 : 24 है। m का मान ज्ञात कीजिये।
3. सिद्ध कीजिये कि दो संख्याओं के मध्य n समांतर माध्यों का योग, उनके बीच अकेले समांतर माध्य का n गुना है।
4. यदि A.P. के pवें तथा qवें पदों का A.M., rवें तथा sवें पदों के A.M. के समान है तो दिखाइये कि $p + q = r + s$.

6.5 गुणोत्तर श्रेणी

आइए निम्नलिखित अनुक्रम पर विचार करें :

(1) $1, 2, 4, 8, 16, \cdots$ (2) $3, 1, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{9}, \dfrac{1}{27}, \cdots$ (3) $1, -3, 9, -27, \cdots$ (4) $x, x^2, x^3, x^4, \cdots$

यदि हम उपर्युक्त सभी अनुक्रमों में पदों के प्रारूप को देखें तो पता चलता है कि प्रत्येक पद अपने से पहले पद के साथ एक विशेष नियम के द्वारा सम्बन्धित है।

जैसे उदाहरण (1) में, प्रथम पद 1 है, दूसरा पद पहले पद का दुगुना है। तीसरा पद पहले पद का 2^2 गुना है।

पुनः उदाहरण (2) में प्रथम पद 3 है, दूसरा पद पहले पद का $\frac{1}{3}$ गुना है। तीसरा पद पहले पद का $\frac{1}{3^2}$ गुना है।

इस प्रकार के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेणी कहते हैं। संख्याओं का ऐसा अनुक्रम जिसमें किन्हीं दो क्रमागत पदों का अनुपात एक समान शून्येतर संख्या हो गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है या संक्षिप्त में उसे G. P. कहते हैं। इसका अनुपात सार्वअनुपात कहलाता है।

इस प्रकार $\frac{\text{दुसरा पद}}{\text{पहला पद}} = \frac{\text{तीसरा पद}}{\text{दुसरा पद}} =$ ..... गुणोत्तर श्रेणी का सार्वअनुपात कहलाता है।

उदाहरण (1) से (4) तक गुणोत्तर श्रेणी हैं जिनके प्रथम पद क्रमशः 1, 3, 1, x तथा सार्वअनुपात $2, \frac{1}{3}, -3$ तथा x हैं।

किसी गुणोत्तर श्रेणी का व्यापक रूप जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r हो $a, ar, ar^2, ar^3 \ldots$ है।

6.5.1 व्यापक पद

आइए, एक गुणोत्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, पर विचार करें। इस के पद हैं :

$$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$$

इस स्थिति में $t_1 = a = ar^{1-1}$, $t_2 = ar = ar^{2-1}$, $t_3 = ar^2 = ar^{3-1}$, $t_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

$\ldots \qquad \ldots$

व्यापकीयकरण करने पर, हमें nवें पद का निम्न मान प्राप्त होता है

$$t_n = ar^{n-1} \qquad \ldots (A)$$

6.5.2 गुणोत्तर श्रेणी के कुछ (विशेष) गुण धर्म

(i) यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी के सभी पदों को किसी शून्येतर संख्या से गुणा किया जाए तो प्राप्त श्रेणी भी गुणोत्तर श्रेणी ही होगी। प्राप्त G.P. का सार्वअनुपात भी वही होगा जो मूल श्रेणी का है।

यदि $a, b, c, d, \ldots$ एक G.P. है, तो $ak, bk, ck, dk \ldots$ भी G.P. में हैं। $(k \neq 0)$

(ii) किसी G.P. के सभी पदों की घात बराबर बढ़ा दी जाए तो परिणामी श्रेणी भी G.P. में ही होगी।

माना $a, b, c, d \ldots$ G.P. में है तो $a^k, b^k, c^k, d^k, \ldots$ भी एक G.P. में है। $(k \neq 0)$

परिणामी G.P. का सार्वअनुपात मूल सार्वअनुपात की वही घात बढ़ाकर प्राप्त होगा जो श्रेणी के पदों की घात बढ़ाई है।

उदाहरण 6.12. G.P. 4, 8, 16, ... का 6वाँ पद ज्ञात कीजिए

हल : इस स्थिति में प्रथम पद $(a) = 4$ सार्वअनुपात $(r) = 8 \div 4 = 2$

सूत्र $t_n = ar^{n-1}$, द्वारा, हम प्राप्त करते हैं :

$$t_6 = 4 \times 2^{6-1} = 4 \times 32 = 128$$

G.P. का 6वाँ पद 128 है।

उदाहरण 6.13. एक G.P. के चौथे तथा नौवें पद के मान क्रमशः 8 और 256 हैं गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल : G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है, तब

$t_4 = ar^{4-1} = ar^3,\ t_9 = ar^{9-1} = ar^8$

प्रश्नानुसार, $ar^8 = 256$ ... (1)

या $ar^3 = 8$ ... (2)

$\therefore$ $\dfrac{ar^8}{ar^3} = \dfrac{256}{8}$ या $r^5 = 32 = 2^5 \therefore r = 2$

पुनः (2) से $a \times 2^3 = 8 \therefore a = \dfrac{8}{8} = 1$

इसलिए, G.P. है :

1, 2, 4, 8, 16, ...

उदाहरण 6.14. G.P. 5, –10, 20, – 40, ... का कौन सा पद 320 होगा?

हल : इस स्थिति में, $a = 5$; $r = \dfrac{-10}{5} = -2$. माना G.P. का nवाँ पद 320 है

सूत्र $t_n = ar^{n-1}$, द्वारा, हम प्राप्त करते हैं $t_n = 5.\,(-2)^{n-1}$

$\therefore$ $5.\,(-2)^{n-1} = 320$ (दिया है)

$\therefore$ $(-2)^{n-1} = 64 = (-2)^6 \;\therefore n - 1 = 6 \;\therefore n = 7$

इसलिए, 320 G.P. का 7वाँ पद है।

उदाहरण 6.15. यदि $a, b, c,$ और d G.P. में हैं, तो दिखाइये कि $(a + b)^2, (b + c)^2$ और $(c + d)^2$ भी G.P. में हैं।

हल : क्योंकि a, b, c और d G.P. में हैं, $\therefore \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{b} = \dfrac{d}{c}$

$\therefore$ $b^2 = ac,\ c^2 = bd,\ ad = bc$ ...(1)

अब $(a + b)^2 (c + d)^2 = \left[(a+b)(c+d)\right]^2 = (ac + bc + ad + bd)^2$

$= (b^2 + c^2 + 2bc)^2$ ...[(1) का प्रयोग करके] $= \left[(b+c)^2\right]^2$

$\therefore$ $\dfrac{(c+d)^2}{(b+c)^2} = \dfrac{(b+c)^2}{(a+b)^2}$

इस प्रकार $(a + b)^2, (b + c)^2, (c + d)^2$ भी G.P. में हैं।

देखें आपने कितना सीखा 6.4

1. एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद और सार्वअनुपात क्रमशः 3 और $-\frac{1}{2}$ हैं। इसके प्रथम पाँच पद लिखिए।

2. गुणोत्तर श्रेणी 1, 2, 4, 8, 16, ... का कौन सा पद 1024 है? क्या 520 इस श्रेणी का कोई पद है?

3. तीन संख्याएँ एक गुणोत्तर श्रेणी में हैं। उनका योग 43 है तथा गुनफल 216 है। उन संख्याओं को क्रमानुसार ज्ञात कीजिये।

4. n के प्रत्येक मान के लिए किसी गुणोत्तर श्रेणी का 'n' वाँ पद 2×3^n है। तो गुणोत्तर श्रेणी का (a) प्रथम पद ज्ञात कीजिये (b) सार्वअनुपात ज्ञात कीजिये।

6.6 एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योग

माना G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वनुपात r है। माना S_n G.P. के प्रथम 'n' पदों का योग निरूपित करता है।

इस प्रकार $S_n = a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-2} + ar^{n-1}$ ... (1)

(1) को r द्वारा गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$r\,S_n = ar + ar^2 + \ldots. + ar^{n-2} + ar^{n-1} + ar^n \quad \ldots (2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow S_n - rS_n = a - ar^n$$

या $\quad S_n(1-r) = a(1-r^n)$

$$\therefore \quad S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad \ldots.(A)$$

$$= \frac{a(r^n-1)}{r-1} \quad \ldots.(B)$$

(A) और (B) में कोई–न–कोई (दोनों में से एक) प्रथम n पदों का योग देता है। इस सूत्र को सुविधाजनक (उपयुक्त) प्रयोग करते हैं (A) जब $|r|<1$ और (B) जब $|r|>1$।

उदाहरण 6.16. G.P. 1, 3, 9, 27, ... का 10 पदों तक योग ज्ञात कीजिये।

हल : यहाँ प्रथम पद $(a) = 1$ तथा सार्वअनुपात $(r) = \frac{3}{1} = 3$

अब सूत्र $S_n = \dfrac{a\left(r^n-1\right)}{r-1}$, का उपयोग करने पर ($\because\ r>1$) हमें प्राप्त होता है :

$$S_{10} = \frac{1.(3^{10}-1)}{3-1} = \frac{3^{10}-1}{2}$$

उदाहरण 6.17. G.P. $\frac{1}{\sqrt{3}}, 1, \sqrt{3},\ , \ldots, 81$ का योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = \frac{1}{\sqrt{3}}; r = \sqrt{3}$ और $t_n = l = 81$

अब $t_n = 81 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3})^{n-1} = (\sqrt{3})^{n-2}$ $\therefore$ $(\sqrt{3})^{n-2} = 3^4 = (\sqrt{3})^8$ $\therefore n-2=8$

या $n = 10$

$$\therefore \quad S_n = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{3}^{10}-1\right]}{\sqrt{3}-1} = \frac{\left(\sqrt{3}\right)^{10}-1}{3-\sqrt{3}}$$

उदाहरण 6.18. G.P. 0.6, 0.06, 0.006, 0.0006, $\cdots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $a = 0.6 = \frac{6}{10}$ तथा $r = \frac{0.06}{0.6} = \frac{1}{10}$

सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है $[\because\ r<1]$

$$S_n = \frac{\frac{6}{10}\left\{1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{6}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right) = \frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$$

अभीष्ट योग $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$ है।

उदाहरण 6.19. G.P. 64, 32, 16, $\cdots$ के कितने पदों का योग $127\frac{1}{2}$ होगा?

हल : यहाँ $a = 64, r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$ (<1) और $S_n = 127\frac{1}{2} = \frac{255}{2}$.

सूत्र $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$, का उपयोग करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$S_n = \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{64\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{255}{2} \qquad \text{... (दिया है)}$$

या $128\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{255}{2}$ या $1-\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{255}{256}$

या $\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1-\frac{255}{256} = \frac{1}{256} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$ $\therefore n = 8$

इसलिए पदों की अभीष्ट संख्या 8 है।

उदाहरण 6.20. निम्न श्रेणी का योग ज्ञात कीजिए :

2, 22, 222, ..., n पदों तक

हल : माना S योग को दर्शाता है। तब

$S = 2 + 22 + 222 + \cdots$ n पदों तक

$= 2\,(1 + 11 + 111 + \cdots$ n पदों तक$) = \dfrac{2}{9}$ $(9 + 99 + 999 + \cdots$ n पदों तक$)$

$$= \frac{2}{9}\left\{(10-1)+\left(10^2-1\right)+\left(10^3-1\right)+\quad \ldots n \qquad)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{\left(10+10^2+10^3+\ldots n \qquad\right)-\left(1+1+1+\quad \ldots n \qquad\right)\right\}$$

$$= \frac{2}{9}\left\{\frac{(10^n-1)}{10-1}-n\right\} \qquad [\because 10+10^2+10^3+\cdots \text{ एक G.P. है जिसमें } r = 10>1]$$

$$= \frac{2}{9}\left[\frac{10^n-1-9n}{9}\right] = \frac{2}{81}\left(10^n-1-9n\right)$$

उदाहरण 6. 21. श्रेणी 0.7, 0.77, 0.777, $\cdots$ का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए।

हल : माना S योग को दर्शाता है। तब

$S = 0.7 + 0.77 + 0.777 + \cdots$ n पदों तक

$= 7(0.1 + 0.11 + 0.111 + \cdots$ n पदों तक$) = \dfrac{7}{9}$ $(0.9 + 0.99 + 0.999 + \cdots$ n पदों तक$)$

$= \dfrac{7}{9}$ $\{(1–0.1) + (1–0.01) + (1 – 0.001) + \cdots$ n पदों तक$\}$

$= \dfrac{7}{9}$ $\{(1 + 1 + 1 + \ldots$ n पदों तक$) – (0.1 + 0.01 + 0.001 + \cdots$ n पदों तक$)\}$

$$= \frac{7}{9}\left\{n-\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\cdots n \qquad\right)\right\} = \frac{7}{9}\left\{n-\frac{\frac{1}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}}\right\}$$

(क्योंकि r < 1)

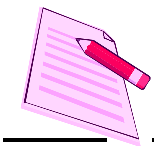
$$= \frac{7}{9}\left\{n-\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)\right\} = \frac{7}{9}\left[\frac{9n-1+10^{-n}}{9}\right] = \frac{7}{81}\left[9n-1+10^{-n}\right]$$

देखें आपने कितना सीखा 6.5

1. निम्न गुणोत्तर श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए :

   (a) 6, 12, 24, ... 10 पदों तक (b) $1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16} -$ ... 20 पदों तक

2. G.P. 8, 16, 32, 64, $\cdots$ के कितने पदों का योग 8184 होगा?



3. सिद्ध कीजिये कि G.P. $a+b+...+l$ का योग $\dfrac{bl-a^2}{b-a}$ है।

4. निम्नलिखित अनुक्रमों का योग n पदों तक ज्ञात कीजिए :

   (a) 8, 88, 888, ... (b) 0.2, 0.22, 0.222, ...

6.7 अनन्त गुणोत्तर श्रेणी

अभी तक हमने G.P. के परिमित पदों का योग करना सीखा है। अब हम G.P. के अनन्त पदों का योग ज्ञात करेंगे, जैसे $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \dfrac{1}{16}, \cdots$

इसे हम इस तरह से करते हैं : यहाँ पर $a=1,\ r=\dfrac{1}{2}$.

G.P. nवाँ पद $t_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ है और n पदों का योग अर्थात् $S_n = \dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = 2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right) = 2-\dfrac{1}{2^{n-1}} < 2.$

अतः n का मान कितना भी बड़ा हो n पदों का योग कभी भी 2 से अधिक नहीं होगा।

अतः, यदि हम अनन्त पदों का योग करें, तो भी हम उत्तर 2 से अधिक प्राप्त नहीं करेंगे।

यह भी ध्यान दें कि असांत दशमलव भिन्न $0.\bar{3}$ वास्तव में $0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + ...$ है।

अर्थात् उपर्युक्त अनन्त अनुक्रम का योग वास्तव में $\dfrac{1}{3}$ है।

दूसरे शब्दों में यह देखा गया है कि हम G.P. 1, 2, 4, 8, 16, ... के अनन्त पदों का योग करें तो हम एक परिमित संख्या प्राप्त करेंगे।

अतः कभी–कभी हम G.P. के अनन्त पदों का योग ज्ञात कर सकते हैं और कभी–कभी नहीं भी। अब हम इस समस्या पर विचार करेंगे।

6.7.1 गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग

आइए अनन्त पद तथा सार्वअनुपात r वाले एक G.P. पर विचार करें :

स्थिति 1 : माना कि $|r| > 1$

तब G.P. के n पदों के योग की अभिव्यक्ति की जाती है :

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} = \frac{a\,r^n}{r-1} - \frac{a}{r-1} \qquad \text{... (A)}$$

अब, जैसे n का मान बढ़ता है तो r^n का मान भी बढ़ता है। इस प्रकार यदि n अनन्त बड़ा हो तथा $|r| > 1$ तब अनन्त पदों का योग भी अनन्त बड़ा ही होगा, जिसका गणित में अधिक महत्त्व नहीं है। अब हम अन्य सम्भावना पर विचार करेंगे।

स्थिति 2 : माना $|r| < 1$

सूत्र (A) निम्न प्रकार लिखा जा सकता है। $S = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r} - \dfrac{ar^n}{1-r}$

अब यदि n का मान बढ़ता है तो r^n का मान छोटा होता जाता है, अर्थात् यदि $n \to \infty$, $r^n \to 0$ तब उपरोक्त सूत्र बन जाएगा : $S = \dfrac{a}{1-r}$

अतः एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी जिसका प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है के योग का सूत्र

$$S = \frac{a}{1-r}, \text{ जब } |r| < 1 \text{ है} \qquad \text{...(i)}$$

उदाहरण 6.22. अनन्त G.P. $\dfrac{1}{3}, -\dfrac{2}{9}, \dfrac{4}{27}, -\dfrac{8}{81}, \cdots$ का योग ज्ञात कीजिए :

हल : यहाँ अनन्त G.P. का प्रथम पद $a = \dfrac{1}{3}$, और $r = \dfrac{-\frac{2}{9}}{\frac{1}{3}} = -\dfrac{2}{3}$. यहाँ $|r| = \left|-\dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{2}{3} < 1$

$\therefore$ अनन्त पदों के योग का सूत्र $S = \dfrac{a}{1-r}$ का उपयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

अतः दी गई अनन्त G.P. का योग $\dfrac{1}{5}$ है।

उदाहरण 6.23. असांत दशमलव $0.\bar{3}$ को अनन्त गुणोत्तर श्रेणी के रूप में लिखिये तथा उसका मान परिमेय के संख्या रूप में ज्ञात कीजिए।

हल : $0.\bar{3} = 0.3333333 \ldots = 0.3 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \ldots. = \dfrac{3}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{3}{10^3} + \dfrac{3}{10^4} + \ldots$

उपर्युक्त श्रेणी एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है। जिसका प्रथम पद $a = \dfrac{3}{10}$ और $r = \dfrac{\frac{3}{10^2}}{\frac{3}{10}} = \dfrac{1}{10} < 1$

अतः सूत्र $S = \dfrac{a}{1-r}$, का उपयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं : $0.\bar{3} = \dfrac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{9}{10}} = \dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$

इस प्रकार, असांत दशमलव भिन्न $0.\bar{3} = \dfrac{1}{3}$.

उदाहरण 6.24. एक सरल लोलक द्वारा क्रमागत सेकण्डों में तय की गई दूरी 16, 12, 9, ... है। विराम अवस्था में आने तक यह कितनी दूरी तय करेगी।

हल : सरल लोलक द्वारा क्रमागत सेकण्डों में तय की गई दूरी 16, 12, 9, ... एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद $a = 16$ और $r = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} < 1$.

सूत्र $S = \frac{a}{1-r}$ का उपयोग करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$S = \frac{16}{1-\frac{3}{4}} = \frac{16}{\frac{1}{4}} = 64$$

अतः सरल लोलक द्वारा तय की गई दूरी 64 सेमी है।

उदाहरण 6.25. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग 3 है तथा इसके प्रथम दो पदों का योग $\frac{8}{3}$ है। प्रथम पद ज्ञात कीजिए।

हल : इस समस्या में $S = 3$ । माना दी हुई अनन्त G.P. का प्रथम पद a तथा सार्वअनुपात r है।

तब प्रश्नानुसार $a + ar = \frac{8}{3}$ या $3a(1+r) = 8$ ... (1)

$S = \frac{a}{1-r}$, से हम प्राप्त करते हैं $3 = \frac{a}{1-r}$ या $a = 3(1-r)$ ... (2)

(1) और (2) से, हमें प्राप्त हुआ

$3.3\,(1-r)\,(1+r) = 8$ या $1 - r^2 = \frac{8}{9}$ या $r^2 = \frac{1}{9}$ या $r = \pm\frac{1}{3}$

(2) से $r = \pm\frac{1}{3}$ के अनुसार $a = 3\left(1 \mp \frac{1}{3}\right) = 2$ या 4

देखें आपने कितना सीखा 6.6

(1) निम्नलिखित अनन्त गुणोत्तर श्रेणियों का योग ज्ञात कीजिए :

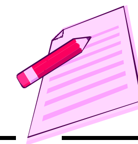
(a) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots \infty$ (b) $\frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \frac{2}{5^3} + \frac{3}{5^4} + \cdots \infty$

2. निम्नलिखित असांत दशमलव भिन्नों को अनन्त G.P. के रूप में लिखिये तथा उनका मान परिमेय संख्या के रूप में ज्ञात कीजिए :

(a) $0.\overline{7}$ (b) $0.3\overline{15}$

3. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग 15 है तथा उस श्रेणी के पदों के वर्गों का योग 45 है, G.P. ज्ञात कीजिए।

4. एक अनन्त गुणोत्तर श्रेणी का योग $\frac{1}{3}$ है तथा इसका प्रथम पद $\frac{1}{4}$ है। गुणोत्तर श्रेणी ज्ञात कीजिए।



6.8 गुणोत्तर माध्य (G.M.)

यदि a, G, b G.P. में हैं, तब G, a तथा b का गुणोत्तर माध्य कहलाता है।

यदि तीन संख्याएँ G.P. में हैं, तब मध्य पद अन्य दो पदों का गुणोत्तर माध्य कहलाता है।

यदि $a, G_1, G_2, \ldots, G_n, b$ G.P. में हैं,

तब $G_1, G_2, \ldots, G_n$ संख्याओं a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्य कहलाते हैं। n पदों का गुणोत्तर माध्य उनके गुणनफल के वर्गमूल की nवीं घात से परिभाषित होता है।

इस प्रकार यदि $a_1, a_2, \ldots, a_n$, n पद हैं, तब उनका G.M. $= (a_1, a_2, \ldots a_n)^{\frac{1}{n}}$

माना a तथा b का गुणोत्तर माध्य G है, तब a, G, b गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$$\frac{G}{a} = \frac{b}{G} \text{ या } G^2 = ab \text{ या } G = \sqrt{ab}$$

$$\therefore \quad \text{गुणोत्तर माध्य} = \sqrt{\text{चरम पदों का गुणनफल}}$$

यदि कोई दो धन संख्याएँ a तथा b दिए गये हों तो इनके मध्य कितने ही गुणोत्तर माध्य अन्तर्निविष्ट कर सकते हैं। माना a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्य $a_1, a_2, a_3 \ldots, a_n$ हैं।

तब a_1 $a_1, a_3, \ldots\ldots a_n, b$ एक G.P. है।

इस प्रकार b श्रेणी का $(n + 2)$वाँ पद है।

$$b = a\, r^{n+1} \text{ या } r^{n+1} = \frac{b}{a} \text{ या } r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$\text{अतः } a_1 = ar = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \; a_2 = ar^2 = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

$$a_n = ar^n = a \times \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

आगे हम दिखा सकते हैं कि इन n G.M. का गुणनफल, a तथा b के मध्य एकल गुणोत्तर माध्य की n घात के बराबर होता है।

$a_1 . a_2, \ldots a_n$, का गुणा करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$$a_1, a_2 \cdots a_n = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+1} \cdots + \frac{n}{n+1}} = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1+2+\cdots+n}{n+1}} = a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n(n+1)}{2(n+1)}}$$

$$= a^n \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{2}} = (ab)^{\frac{n}{2}} = \left(\sqrt{ab}\right)^n = G^n = (a \text{ तथा } b \text{ के मध्य एकल G.M.})^n$$

उदाहरण 6.26. $\frac{3}{2}$ और $\frac{27}{2}$ का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि यदि a तथा b के मध्य G गुणोत्तर माध्य हैं, तब $G=\sqrt{ab}$

$\therefore$ $\frac{3}{2}$ और $\frac{27}{2}$ का गुणोत्तर माध्य $=\sqrt{\frac{3}{2}\times\frac{27}{2}}=\frac{9}{2}$

उदाहरण 6.27. 1 और 256 के मध्य तीन G.M. अन्तर्निविष्ट कीजिये।

हल : माना 1 और 256 के मध्य तीन गुणोत्तर माध्यम G_1, G_2, G_3 हैं।

तब 1, G_1, G_2, G_3, 256 गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

यदि r सार्व अन्तर हो, तब $t_5 = 256$

अर्थात् $ar^4 = 256 \Rightarrow 1.\ r^4 = 256$ या $r^2 = 16$ या $r = \pm 4$

जब $r = 4$, $G_1 = 1.\ 4 = 4$, $G_2 = 1.\ (4)^2 = 16$ और $G_3 = 1.\ (4)^3 = 64$

जब $r = -4$, $G_1 = -4$, $G_2 = (1)\ (-4)^2 = 16$ और $G_3 = (1)\ (-4)^3 = -64$

$\therefore$ 1 और 256 के मध्य G.M. हैं 4, 16, 64, या – 4, 16, –64.

उदाहरण 6.28. यदि 4, 36, 324 G.P. में हों, तो इस श्रेणी में दो पद और अन्तर्निविष्ट कीजिये जिससे कि यह पुनः G.P. बन जाये।

हल : 4 और 36 के मध्य G.M. $=\sqrt{4\times 36}=\sqrt{144}=12$

36 और 324 के मध्य GM $=\sqrt{36\times 324}=6\times 18=108$

यदि हम 4 और 36 के मध्य 12 और 36 तथा 324 के मध्य 108 रख दे तब संख्याएँ 4, 12, 36, 108, 324 एक गुणोत्तर माध्य बनाते हैं।

$\therefore$ अन्तर्निविष्ट की गई दो नई संख्याएँ 12 और 108 हैं।

उदाहरण 6.29. n का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि a तथ b का गुणोत्तर माध्य $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ हो।

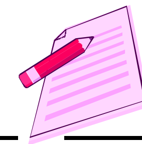
हल : यदि x, a तथा b का गुणोत्तर माध्य है, तब $x = a^{\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}}$

$\therefore$ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}=a^{\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}$ या $a^{n+1}+b^{n+1}=\left(a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^n+b^n\right)$

या $a^{n+1}+b^{n+1}=a^{n+\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}\,b^{n+\frac{1}{2}}$ या $a^{n+1}-a^{n+\frac{1}{2}}.\,b^{\frac{1}{2}}=a^{\frac{1}{2}}\,b^{n+\frac{1}{2}}-b^{n+1}$

या $a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)=b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)$ या $a^{n+\frac{1}{2}}=b^{n+\frac{1}{2}}$

या $\frac{a^{n+\frac{1}{2}}}{b^{n+\frac{1}{2}}}=1$ या $\left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}}=\left(\frac{a}{b}\right)^0$ $\therefore$ $n+\frac{1}{2}=0$ या $n=\frac{-1}{2}$



टिप्पणी

6.8.1 समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य के बीच सम्बन्ध

माना a और b दो संख्याएँ हैं।

माना a और b के मध्य A तथा G क्रमश: A.M. और G.M. हैं।

$$\therefore \quad A = \frac{a+b}{2}, G = \sqrt{ab}$$

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{\left(\sqrt{a}\right)^2 + \left(\sqrt{b}\right)^2 - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 > 0$$

$$\therefore \quad A > G$$

उदाहरण 6.30. दो संख्याओं का समांतर माध्य 34 तथा उनका गुणोत्तर माध्य 16 है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : माना संख्याएँ a तथा b हैं।

$\because$ a और b के मध्य A.M. 34 है,

$$\therefore \quad \frac{a+b}{2} = 34, \text{ या } a + b = 68 \qquad \dots (1)$$

$\because$ a और b के मध्य गुणोत्तर माध्य 16 है,

$$\therefore \quad \sqrt{ab} = 16 \text{ या } ab = 256$$

हम जानते हैं कि $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4\,ab \qquad \cdots (2)$

$$= (68)^2 - 4 \times 256 = 4624 - 1024 = 3600$$

$$\therefore \quad a - b = \sqrt{3600} = 60 \qquad \cdots (3)$$

(1) और (3) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त हुआ $2a = 128 \therefore a = 64$

(1) में से (3) घटाने पर, हमें प्राप्त हुआ $2b = 8$ या $b = 4$

$\therefore$ अभीष्ट संख्याएँ 64 और 4 हैं।

उदाहरण 6.31. दो राशियों b तथा c का समांतर माध्य a और उनके मध्य दो गुणोत्तर माध्य g_1 तथा g_2 हैं। सिद्ध कीजिये कि $g_1^3 + g_2^3 = 2\,abc$

हल : b और c के मध्य A.M. a है $\therefore \dfrac{b+c}{2} = a$, या $b + c = 2a$

पुन: g_1 और g_2, b और c के मध्य दो G.M. हैं। $\therefore$ b, g_1, g_2, c G.P. में हैं।

यदि r सार्व अनुपात है, तब $c = br^3$ या $r = \left(\dfrac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$

$$g_1 = br = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{3}} \text{ और } g_2 = br^2 = b\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \quad g_1^{\,3} + g_1^{\,3} = b^3\left[\left(\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}\right)^2\right] = b^3 \times \frac{c}{b}\left(1+\frac{c}{b}\right) = b^2 c \times \left(\frac{b+c}{b}\right)$$

$$= bc\,(2a) = 2abc \qquad [\because\ b + c = 2a]$$

उदाहरण 6.32. G.P. के प्रथम तीन पदों का गुणनफल 1000 है। यदि हम इसके दूसरे पद में 6 तथा तीसरे पद में 7 जोड़ दें तो तब ये तीनों पद A.P. बनाते हैं। G.P. के पद ज्ञात कीजिए।

हल : माना $t_1 = \frac{a}{r}, t_2 = a$ और $t_3 = ar$ G.P. के प्रथम तीन पद हैं।

तब उनका गुणनफल $= \frac{a}{r}.\ a.\ ar = 1000$ या $a^3 = 1000,$ या $a = 10$

प्रश्न द्वारा, $t_1, t_2 + 6, t_3 + 7$ A.P. में हैं। ...(1)

$\therefore \quad \frac{a}{r}, a + 6, ar + 7$ A. P. में हैं। $\Rightarrow (a + 6) - \frac{a}{r} = (ar + 7) - (a + 6)$

या $\quad 2(a+6) = \frac{a}{r} + (ar+7)$

या $\quad 2(10+6) = \frac{10}{r} + (10r+7)$ [(1) का प्रयोग करने पर]

या $\quad 32r = 10 + 10\,r^2 + 7r$

या $\quad 10r^2 - 25r + 10 = 0$

$$\therefore \quad r = \frac{25 \pm \sqrt{625-400}}{20} = \frac{25 \pm 15}{20} = 2, \frac{1}{2}$$

जब $a = 10, r = 2$ तब पद हैं $\frac{10}{2}, 10(2)$ या 5, 10, 20

जब $a = 10,\ r = \frac{1}{2}$ तब पद हैं $10(2), 10, 10\left(\frac{1}{2}\right)$ या 20, 10, 5

देखें आपने कितना सीखा 6.7

1. 8 तथा $\frac{1}{64}$ के मध्य 8 G.M. अन्तर्निविष्ट कीजिए।

2. यदि a तथा b के मध्य n गुणोत्तर माध्यों में से a_1 प्रथम गुणोत्तर माध्य है, तो सिद्ध कीजिए कि $a_1^{\,n+1} = a^n\, b$

3. यदि a तथा b का गुणोत्तर माध्य G है तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{G^2 - a^2} + \frac{1}{G^2 - b^2} = \frac{1}{G^2}$

4. यदि दो संख्याओं के मध्य A.M. तथा G.M. का अनुपात $m : n$ है तो सिद्ध कीजिये कि संख्याएँ $m+\sqrt{m^2-n^2}\ :\ m-\sqrt{m^2-n^2}$ के अनुपात में होंगी।

5. यदि दो संख्याओं a तथा b के मध्य A और G क्रमशः समांतर तथा गुणोत्तर माध्य हैं तो दिखाइये कि A > G.

6. एक G.P. के प्रथम तीन पदों का योग $\frac{13}{12}$ तथा उनका गुणनफल –1 है। G.P. ज्ञात कीजिए।

7. एक G.P. के प्रथम तीन पदों का गुणनफल 512 है। यदि प्रथम पद में 8 तथा दूसरे पद में 6 जोड़ दिया जाए तो संख्याएँ बनाती हैं। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- एक अनुक्रम जिसके दो क्रमागत पदों का अनुपात हमेशा नियत रहता है गुणोत्तर श्रेणी कहलाता है।
- समांतर श्रेणी $a, a + d, a + 2d, \ldots$ का व्यापक पद $t_n = a + (n-1)\, d$ द्वारा प्राप्त होता है।
- A.P. $a, a + d, a + 2d, \ldots$ के प्रथम n पदों का योग

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)\, d\right] = \frac{n}{2}\ (a + l), \text{ जहाँ } l = a + (n-1)\, d.$$

- एक अनुक्रम जिसके दो क्रमागत पदों का अन्तर हमेशा नियत रहता है, समांतर श्रेणी कहलाता है।
- $t_n = S_n - S_{n-1}$
- a और b का समांतर माध्य $\frac{a+b}{2}$ है।
- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ का nवाँ पद ar^{n-1} है।
- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ के प्रथम n पदों का योग है,

$$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \text{ for } |r| > 1 \text{ के लिए} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \text{ for } |r| < 1 \text{ के लिए}$$

- G.P. $a, ar, ar^2, \ldots$ के अनन्त पदों का योग है,

$$S = \frac{a}{1-r} \text{ for } |r| < 1 \text{ के लिए}$$

- दो संख्याओं a और b का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{ab}$ है।
- दो संख्याओं a तथा b का समांतर माध्य A उनके संगत गुणोत्तर माध्य G से हमेशा बड़ा होता है, अर्थात् A > G.

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=7T5yHI-po_c*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ElRtd1Z2FRc*
- *https://www.youtube.com/watch?v=zjNC0rLeKO4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=0wwg3mS7lGk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=0wwg3mS7lGk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=GI6bvnhjUqM*

आइए अभ्यास करें

1. 100 और 200 के बीच की सभी प्राकृत संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए, जो 7 से विभाजित हों।

2. दो समांतर श्रेणियों के प्रथम n पदों का योग $(2n-1):(2n+1)$ के अनुपात में है, उनके 10वें पदों में अनुपात ज्ञात कीजिए।

3. यदि a, b, c समांतर श्रेणी में हैं तो दिखाइये कि $b+c, c+a, a+b$ भी समांतर श्रेणी में है।

4. यदि $a_1, a_2, ..., a_n$ समांतर श्रेणी में हैं तो सिद्ध कीजिये कि

$$\frac{1}{a_1 a_2}+\frac{1}{a_2 a_3}+\frac{1}{a_3 a_4}+\ldots+\frac{1}{a_{n-1} a_n}=\frac{n-1}{a_1 a_n}$$

5. यदि $(b-c)^2, (c-a)^2, (a-b)^2$ समांतर श्रेणी में है, तो सिद्ध कीजिये कि

$\frac{1}{b-c}, \frac{1}{c-a}, \frac{1}{a-b}$, भी समांतर श्रेणी में हैं।

6. यदि एक समान्तर श्रेणी के pवें, qवें तथा rवें पद क्रमशः P, Q, R हैं, तो सिद्ध कीजिये कि $p(Q-R)+q(R-P)+r(P-Q)=0$.

7. यदि a, b, c G.P. में हैं, तो सिद्ध कीजिये कि

$$a^2 b^2 c^2\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)=a^3+b^3+c^3$$

8. यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो दिखाइये कि निम्नलिखित में प्रत्येक पद एक गुणोत्तर श्रेणी है :

(a) $(a^2-b^2), (b^2-c^2), (c^2-d^2)$ (b) $\frac{1}{a^2+b^2}, \frac{1}{b^2+c^2}, \frac{1}{c^2-d^2}$

9. यदि x, y, z एक G.P. के pवें, qवें तथा rवें पद हैं तो सिद्ध कीजिये कि $x^{q-r}\, y^{r-p}\, z^{p-q}=1$

10. यदि a, b, c A.P. में हैं और x, y, z G.P. में हैं तो सिद्ध कीजिये कि
$x^{b-c} y^{c-a} z^{a-b} = 1$

11. यदि एक G.P. के प्रथम n पदों का योग S_n द्वारा निरूपित होता है तो सिद्ध कीजिये कि
$S_n (S_{3n} - S_{2n}) = (S_{2n} - S_n)^2$

12. यदि p, q, r A.P. में हैं तो सिद्ध कीजिए कि G.P. के pवें, qवें तथा rवें पद भी G.P. में हैं।

11. यदि $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}$ हो, तो n का छोटे–से–छोटा मान ज्ञात कीजिए जो इस प्रकार है कि $2 - S_n < \frac{1}{100}$

14. यदि G.P. के प्रथम n पदों का योग S है तथा इसके इन पदों का गुणनफल p है और उनके व्युत्क्रमों का योग R है तो सिद्ध कीजिए कि

$$p^2 = \left(\frac{S}{R}\right)^n$$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 6.1

1. (a) $2n - 1$ (b) $2n + 1$

2. 3, 5, 7, 9, ... 3. 20, 16 4. नहीं 5. $m + n$ 6. 10, 6, 2, ...

देखें आपने कितना सीखा 6.2

1. (a) 435 (b) $\frac{n}{2}\left[21 - 5n^2\right]$

2. 5 3. 12

4. 37 5. $n^2 + 9n, 9$

6. $2a$

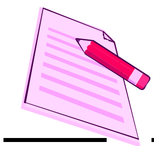
देखें आपने कितना सीखा 6. 3

2. 5

देखें आपने कितना सीखा 6. 4

1. $3, -\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}$ 2. 11वाँ, नहीं

3. 36, 6, 1 या 1, 6, 36 4. (a) 6 (b) 3



देखें आपने कितना सीखा 6.5

1. (a) 6138 (b) $\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{2^{20}}\right)$ 2. 10.

4. (a) $\frac{80}{81}\left(10^n-1\right)-\frac{8n}{9}$ (b) $\frac{2n}{9}-\frac{2}{81}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 6. 6

1. (a) $\frac{3}{2}$ (b) $\frac{13}{24}$ 2. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{52}{165}$

3. $5, \frac{10}{3}, \frac{20}{9}, \frac{40}{27}, \ldots \infty$ 4. $\frac{1}{4}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{4^3}, \frac{1}{4^4}, \ldots \infty$

देखें आपने कितना सीखा 6.7

1. $4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32},$ 6. $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$ या $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$

7. 4, 8, 16

आइए अभ्यास करें

1. 2107 2. 37 : 39

7

कुछ विशेष श्रेणियाँ

मान लीजिए कि आपको प्रत्येक दिन इस प्रकार पत्थर इकट्ठे करने को कहा जाता है कि पहले दिन एक पत्थर लेना है, दूसरे दिन पहले दिन के पत्थरों से दुगुने पत्थर इकट्ठे करने हैं। तीसरे दिन दूसरे दिन के पत्थरों से दुगुने पत्थर इकट्ठे करने हैं तथा इसी प्रकार आगे भी। फिर इन पत्थरों को तिथिनुसार व्यवस्थित करना है तो आपको एक

$1, 2, 2^2, 2^3, ...$ जैसा अनुक्रम प्राप्त होगा

अनुक्रम से हमें एक श्रेणी प्राप्त होती है। उपरोक्त अनुक्रम की संगत श्रेणी $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ...$

एक जानी मानी श्रेणी है जिसे फिबोनाशी (Fibonacci) श्रेणी कहते हैं $1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + ...$

इस पाठ में हम कुछ विशेष प्रकार के अनुक्रमों का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे:

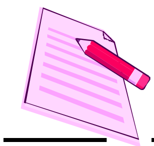
- श्रेणी को परिभाषित करना
- t_n से दिए हुए मान n के लिए श्रेणी के पदों की गणना करना
- अन्तर और गणितीय आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करके $\sum n, \sum n^2, \sum n^3$ का मान ज्ञात करना
- साधारण श्रेणी जैसे $1.3 + 3.5 + 5.7 + ...$ n पदों तक, का मान ज्ञात करना

पूर्वज्ञान

- श्रेणी (अनुक्रम) की अवधारणा
- समान्तर श्रेणी तथा गुणोत्तर श्रेणी के n वां पद तथा n पदों तक के योग का ज्ञान
- गुणोत्तर श्रेणी का उपयोग कर आवर्त दशमलव भिन्न को भिन्न संख्या में परिवर्तित करने का ज्ञान

7.1 श्रेणी

$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ...$ के रूप का व्यंजक श्रेणी कहलाता है, जहां $u_1, u_2, u_3 ..., u_n ...$ सख्याओं का अनुक्रम है। उपर्युक्त श्रेणी को $\sum_{r=1}^{n} u_r$ से निरूपित किया जाता है। यदि n परिमित



हो, तो श्रेणी एक परिमित श्रेणी कहलाती है, अन्यथा अपरिमित कहलाती है। इस प्रकार हम देखते हैं कि एक श्रेणी किसी अनुक्रम से सम्बन्धित होती है।

इस प्रकार श्रेणी एक विशेष नियम के अनुसार व्यवस्थित पदों के योग का अनुक्रम है।

निम्नलिखित संख्याओं के समूहों पर विचार कीजिए–

(a) 1, 6, 11, ... (b) $\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{12}, \ldots$ (c) 48, 24, 12, ... (d) $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$

(a), (b), (c), (d) सभी अनुक्रम है, क्योंकि ये पद एक नियम के अनुसार जुड़े हुए हैं। इनकी संगत श्रेणियां इस प्रकार हैं:

$$1 + 6 + 11 + \ldots, \ \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \ldots, \ 48 + 24 + 12 + \ldots, \ 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots$$

उदाहरण 7.1. निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम के प्रथम 6 पदों को लिखिए, जिसका nवां पद है:

(a) $T_n = 2n + 1$, (b) $a_n = n^2 - n + 1$ (c) $f_n = (-1)^n . 5^n$

तत्पश्चात उस अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हलः (a) $T_n = 2n + 1$

$n = 1$ के लिए, $T_1 = 2.1 + 1 = 3$ $n = 2$ के लिए, $T_2 = 2.2 + 1 = 5$

$n = 3$ के लिए, $T_3 = 2.3 + 1 = 7$ $n = 4$ के लिए, $T_4 = 2.4 + 1 = 9$

$n = 5$ के लिए, $T_5 = 2.5 + 1 = 11$ $n = 6$ के लिए, $T_6 = 2.6 + 1 = 13$

इस प्रकार उपरोक्त अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी है: $3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + \ldots$

(b) $a_n = n^2 - n + 1$

$n = 1$ के लिए, $a_1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$ $n = 2$ के लिए, $a_2 = 2^2 - 2 + 1 = 3$

$n = 3$ के लिए, $a_3 = 3^2 - 3 + 1 = 7$ $n = 4$ के लिए, $a_4 = 4^2 - 4 + 1 = 13$

$n = 5$ के लिए, $a_5 = 5^2 - 5 + 1 = 21$ $n = 6$ के लिए, $a_6 = 6^2 - 6 + 1 = 31$

इस प्रकार उपरोक्त अनुक्रम से सम्बन्धित श्रेणी है: $1 + 3 + 7 + 13 + \ldots$

(c) यहां $f_n = (-1)^n 5^n$

$n = 1$ के लिए, $f_1 = (-1)^1 5^1 = -5$ $n = 2$ के लिए, $f_2 = (-1)^2 5^2 = 25$

$n = 3$ के लिए, $f_3 = (-1)^3 5^3 = -125$ $n = 4$ के लिए, $f_4 = (-1)^4 5^4 = 625$

$n = 5$ के लिए, $f_5 = (-1)^5 5^5 = -3125$ $n = 6$ के लिए, $f_6 = (-1)^6 5^6 = 15625$

अनुक्रम से सम्बन्धित संगत श्रेणी है:

$$-5 + 25 - 125 + 625 - 3125 + 15625 -$$

उदाहरण 7.2. निम्नलिखित प्रत्येक अनुक्रम का 'n' वां पद लिखिए:

(a) $-2 + 4 - 6 + 8 - \dots$ (b) $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$

(c) $4 + 16 + 64 + 256 + \dots$ (d) $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \dots$

हल: (a) श्रेणी है: $-2 + 4 - 6 + 8 \dots\dots$

यहां विषम पद की संख्याएं ऋणात्मक हैं तथा सम पद की संख्याएं धनात्मक हैं। उपरोक्त श्रेणी अनुक्रम

$-1 + 2 - 3 + 4 - \dots$ को 2 से गुणा करने पर प्राप्त होती है।

$\therefore$ $T_n = 2\,(-1)^n\, n = (-1)^n\, 2n$

(b) श्रेणी है: $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots\dots$ $\therefore\ T_n = (-1)^{n+1}$

(c) श्रेणी है: $4 + 16 + 64 + 256 + \dots$

उपरोक्त श्रेणी को इस प्रकार लिख सकते हैं। $4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + \dots\dots$

अर्थात् n वॉ पद $T_n = 4^n$.

(d) श्रेणी है: $\sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{5} + \dots$ अर्थात् $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{5} + \dots$

इसलिए n वॉ पद $T_n = \sqrt{n+1}$.

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. जिस अनुक्रम का nवाँ पद निम्नलिखित है उसके प्रथम 6 पद लिखिए:

(a) $T_n = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ (b) $a_n = \dfrac{n^2 - 1}{2n - 3}$

2. यदि $A_1 = 1$ और $A_2 = 2$ हो, तो A_6 ज्ञात कीजिए जबकि $A_n = \dfrac{A_{n-1}}{A_{n-2}},\ (n > 2)$

3. निम्नलिखित अनुक्रम का nवाँ पद लिखिए:

(a) $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} - \cdots$ (b) $3 - 6 + 9 - 12 + \dots$

7.2 प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घातांकों का योग ज्ञात करना

(a) प्रथम n प्राकृत संख्याओं का अनुक्रम है–

$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n.$

माना $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

यह एक समान्तर श्रेणी है जिसका प्रथम पद 1, सार्व अन्तर 1 तथा पदों की संख्या n है।

$\therefore$ $S_n = \dfrac{n}{2}[2.1 + (n-1)1] = \dfrac{n}{2}[2 + n - 1]$ अर्थात् $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ हम लिख सकते हैं कि $\sum n = \frac{n(n+1)}{2}$

(b) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग ज्ञात करना।

माना $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

सर्वसमिका, $n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$ का उपयोग करने पर उपरोक्त सर्वसमिका में $n = 1, 2, 3, ..., n-1, n$ आदि मान रखने पर हमें प्राप्त होता है:–

$$1^3 - 0^3 = 3.1^2 - 3.1 + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3.2^2 - 3.2 + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3.3^2 - 3.3 + 1$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots$$
$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1$$

इसका योग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$n^3 - 0^3 = 3\,(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 1 + 1 + \ldots\ n \text{ पदों तक})$$

या $n^3 = 3\,S_n - 3\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] + n \qquad \cdots\left[\because \sum n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

या $3\,S_n = n^3 + \frac{3n\,(n+1)}{2} - n$

$$= n\,(n^2 - 1) + \frac{3n}{2}(n+1) = n\,(n+1)\left(n - 1 + \frac{3}{2}\right) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{2}$$

$\therefore \quad S_n = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$ अर्थात् $\sum n^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

(c) प्रथम n प्राकृत संख्याओं के घनों का योग ज्ञात करना

यहां $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

सर्वसमिका $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ का उपयोग करने पर

n के स्थान पर 1, 2, 3, ... आदि रखने पर हमें प्राप्त होता है:

$$1^4 - 0^4 = 4.1^3 - 6.1^2 + 4.1 - 1$$
$$2^4 - 1^4 = 4.2^3 - 6.2^2 + 4.2 - 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4.3^3 - 6.3^2 + 4.3 - 1$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4.n^3 - 6.n^2 + 4.n - 1$$

योग करने पर

$$n^4 - 0^4 = 4(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) - 6(1^2 + 2^2 + \ldots + n^2) + 4\,(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$$
$$- \,(1 + 1 + \ldots\ n \text{ बार})$$

$$\Rightarrow \qquad n^4 = 4.S_n - 6\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] + 4n\,\frac{n+1}{2} - n$$

$$\Rightarrow \quad 4S_n = n^4 + n(n+1)\,(2n+1) - 2n\,(n+1) + n$$

$$= n^4 + n\,(2n^2 + 3n + 1) - 2n^2 - 2n + n$$

$$= n^4 + 2n^3 + 3n^2 + n - 2n^2 - 2n + n = n^4 + 2n^3 + n^2 = n^2\,(n^2 + 2n + 1)$$

अर्थात् $4S_n = n^2\,(n+1)^2$

$$\therefore \qquad S_n = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\therefore \qquad \sum n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2 \text{ या } \sum n^3 = \left(\sum n\right)^2$$

टिप्पणी: प्रश्नों में श्रेणी का योग ज्ञात करने के लिए, पहले हम श्रेणी का nवॉं पद ज्ञात करेंगे। उसके पश्चात् $S_n = \sum t_n$ का उपयोग करेंगे।

उदाहरण 7.3. श्रेणी 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: माना $S_n = 1.3 + 3.5 + 5.7 + \ldots$

श्रेणी का nवॉं पद

$$t_n = \{1, 3, 5, \ldots \text{ का } n\text{वॉं पद}\} \times \{3, 5, 7, \ldots \text{ का } n\text{वॉं पद}\}$$

$$= (2n-1)\,(2n+1) = 4n^2 - 1$$

$$S_n = \sum t_n = \sum\left[4n^2 - 1\right] = 4\sum n^2 - \sum(1)$$

$$= 4\,\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} - n = \frac{2n\,(n+1)\,(2n+1) - 3n}{3}$$

$$= \frac{n}{3}\left[2\,(2n^2 + 3n + 1) - 3\right] = \frac{n}{3}\left[4n^2 + 6n - 1\right]$$

उदाहरण 7.4. श्रेणी $1.2^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots \ldots$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: यहां $t_n = n\,\{2 + (n-1)\}^2 = n\,(n+1)^2 = n.\,(n^2 + 2n + 1)$

अर्थात् $t_n = n^3 + 2n^2 + n$

माना $S_n = 1.2^2 + 2.3^2 + 2.3^2 + 3.4^2 + \ldots. + n.\,(n+1)^2$.

$$\therefore \qquad S_n = \sum t_n = \sum\,(n^3 + 2n^2 + n) = \sum n^3 + 2\sum n^2 + \sum n.$$

$$= \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2 + 2\left[\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}\right] + \frac{n\,(n+1)}{2}$$

$$= n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4} + \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(3n^2 + 11n + 10) = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$$

उदाहरण 7.5. श्रेणी 2. 3. 5 + 3. 5. 7 + 4. 7. 9 + ... के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: माना $S_n = 2.\ 3.\ 5. + 3.\ 5.\ 7 + 4.\ 7.\ 9 + ...$

श्रेणी का nवॉं पद t_n

= {2, 3, 4, ... का nवॉं पद} × {3, 5, 7, ... का nवॉं पद } × {5, 7, 9, ... का nवॉं पद}

$= (n + 1) \times (2n + 1) \times (2n + 3) = (n + 1)\ [4n^2 + 8n + 3]$

$= 4n^3 + 12n^2 + 11n + 3$

$\therefore \quad S_n = \sum t_n = \sum [4n^3 + 12n^2 + 11n + 3] = 4\sum n^3 + 12\sum n^2 + 11\sum n + \sum(3)$

$$= 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{12\,n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{11\,n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1) + \frac{11n(n+1)}{2} + 3n$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n(n+1)^2 + 4(n+1)(2n+1) + 11(n+1) + 6\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n(n^2+2n+1) + 4(2n^2+3n+1) + 11n + 17\right]$$

$$= \frac{n}{2}\left[2n^3 + 12n^2 + 25n + 21\right]$$

उदाहरण 7.6. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots$

हल: $$t_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)$$

क्रमशः $n = 1, 2, 3, ...$ रखने पर

$$t_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3}\right],\ t_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right],\ t_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right]$$

$\cdots \quad \cdots$

$$t_n = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(2n-1)} - \frac{1}{(2n+1)}\right]$$

योग करने पर, $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{2n+1}\right] = \frac{n}{(2n+1)}$

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक के n पदों का योग ज्ञात कीजिए:

 (a) $1 + (1 + 3) + (1 + 3 + 5) + \ldots$ (b) $\frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots$

 (c) $(1) + (1 + 3) + (1 + 3 + 3^2) + (1 + 3 + 3^2 + 3^3) + \ldots$

2. उस श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए, जिसका nवाँ पद $n(n + 1)\,(n + 4)$ है।

3. निम्नलिखित श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए: $1.\,2.\,3 + 2.\,3.\,4. + 3.\,4.\,5 + \cdots$

आइये दोहराएँ

- $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots.. + u_n + \ldots$ के रूप का व्यंजक श्रेणी कहलाता है, जहां $u_1, u_2, u_3 \ldots. u_n, \ldots.$ सख्यांओं का अनुक्रम है।
- $$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n\,(n+1)}{2}$$
- $$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$$
- $$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left\{\frac{n\,(n+1)}{2}\right\}^2$$
- $S_n = \Sigma t_n$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Sequence_and_series*
- *http://mathworld.wolfram.com/Series.html*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक का योग ज्ञात कीजिए:

 (a) $2 + 4 + 6 + \ldots$ का 40 पदों तक (b) $2 + 6 + 18 + \ldots$ का 6 पदों तक।

2. निम्नलिखित श्रेणियों में प्रत्येक का n पदों तक योग ज्ञात कीजिए:

 (a) $1 + 3 + 7 + 15 + 31 + \ldots..$ (b) $\frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots..$

 (c) $\frac{3}{1.4} + \frac{5}{4.9} + \frac{7}{9.16} + \frac{9}{16.25} + \ldots.$

3. श्रेणी $1^2 + 3^2 + 5^2 + ...$ के प्रथम n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

4. श्रेणी $5 + 7 + 13 + 31 + ...$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

5. श्रेणी $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{5^2}+\frac{10}{5^3}+\cdots$ के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

6. $2^2 + 4^2 + 6^2 + ... + (2n)^2$ का योग ज्ञात कीजिए।

7. दिखाइए कि $\frac{1\times 2^2+2\times 3^2+......+n\times (n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+......+n^2\times (n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 7.1

1. (a) 1, 4, 10, 20, 35, 56 (b) $0, 3, \frac{8}{3}, 3, \frac{24}{7}, \frac{35}{9}$

2. $\frac{1}{2}$

3. (a) $(-1)^n \frac{1}{n}$ (b) $(-1)^{n+1}\, 3n$

देखें आपने कितना सीखा 7.2

1. (a) $\frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$ (b) $\frac{n}{3n+1}$ (c) $\frac{1}{4}(3^{n+1}-2n-3)$

2. $\frac{n(n+1)}{12}\left[3n^2+23n+34\right]$

3. $\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 1640 (b) 728

2. (a) $2^{n+1} - n - 2$

   (b) $\frac{1}{12}-\frac{1}{4(2n+1)(2n+3)}$ (c) $1-\frac{1}{(n+1)^2}$

3. $\frac{n}{3}(4n^2-1)$ 4. $\frac{1}{2}(3^n+8n-1)$

5. $\frac{5}{4}+\frac{15}{16}\left(1-\frac{1}{5^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{4.(5^{n-1})}$ 6. $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

8

सम्मिश्र संख्याएँ

हमने प्राकृत संख्याओं से संख्याओं के निकाय का अध्ययन प्रारंभ किया, तदुपरांत पूर्ण संख्याओं का निकाय बनाने के लिए, उनमें शून्य को सम्मिलित किया तथा अगले चरण में ऋणात्मक संख्याएँ परिभाषित की गयीं। इस प्रकार, हमने अपने संख्या–निकाय का पूर्ण संख्याओं तथा पूर्णांकों तक विस्तार किया। $p \div q$ के रूप वाली समस्याओं के समाधान हेतु हमने पूर्णांकों के निकाय में परिमेय संख्याओं को सम्मिलित किया। परिमेय संख्याओं के निकाय को आगे अपरिमेय संख्याओं तक बढ़ाया गया, क्योंकि सभी लम्बाइयों का परिमेय संख्याओं द्वारा मापना संभव नहीं था। परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याएँ कहा गया। किन्तु वास्तविक संख्याओं का निकाय सभी बीजगणितीय समीकरणों को हल करने के लिए पर्याप्त नहीं है। ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जो समीकरण $x^2 = -1$ को सन्तुष्ट कर सके। ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए, अर्थात ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात करने के लिए, हम वास्तविक संख्याओं के निकाय को आगे एक नये संख्या–निकाय तक ले जाते हैं जिसे सम्मिश्र संख्याओं का निकाय कहा जाता है। इस पाठ में, शिक्षार्थी को सम्मिश्र संख्याओं, उनके निरूपण तथा उन पर बीजगणितीय संक्रियाओं से अवगत कराया जायेगा।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे:

- वास्तविक संख्याओं के समुच्चय का सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय तक विस्तार करने की आवश्यकता को बताना
- सम्मिश्र संख्या को परिभाषित करना तथा उसके उदाहरण देना
- किसी दी हुई संख्या के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को पहचानना
- दो सम्मिश्र संख्याओं के समान होने के प्रतिबन्ध को बताना
- इस तथ्य को जानना तथा पहचानना कि ऑरगंड तल में बिन्दु $P(x, y)$ से संबद्ध एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $x + iy$ है एवम विलोमतः प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $x + iy$ से संबद्ध ऑरगंड तल में एक अद्वितीय बिन्दु $P(x, y)$ है
- एक सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी को परिभाषित करना तथा ज्ञात करना
- एक सम्मिश्र संख्या के मापांक (निरपेक्ष मान) तथा कोणांक को परिभाषित करना तथा ज्ञात करना
- एक सम्मिश्र संख्या को ध्रुवीय रूप में प्रदर्शित करना

- सम्मिश्र संख्याओं में बीजगणितीय संक्रियाओं (योग, घटा, गुणा तथा भाग) का उपयोग करना
- बीजगणितीय संक्रियाओं के गुणों (गुणधर्मों) (संवृतता, क्रमविनिमेयता, सहचारिता, तत्समक, विलोम एवं वितरणता) को बताना एवं उनका उपयोग करना
- समस्याओं के हल करने में सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित गुणों को बताना एवं उनका उपयोग करना

  (i) $|z|=0 \Leftrightarrow z=0$ और $z_1 = z_2 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

  (ii) $|z| = |-z| = |\bar{z}|$ (iii) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

  (iv) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$ (v) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, (z_2 \ne 0)$

- सम्मिश्र संख्याओं का वर्गमूल ज्ञात करना

पूर्व ज्ञान

- वास्तविक संख्याओं के गुण
- रैखिक एवं द्विघात समीकरणों के हल
- वास्तविक संख्याओं का संख्या–रेखा पर निरूपण
- एक तल में बिन्दुओं का निरूपण

8.1 सम्मिश्र संख्याएँ

समीकरण $x^2 + 1 = 0$ ...(A) पर विचार कीजिए।

इसे लिखा जा सकता है: $x^2 = -1$ अथवा $x = \pm\sqrt{-1}$

किन्तु ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जो $x^2 = -1$ को सन्तुष्ट करती हो। दूसरे शब्दों में, हम कह सकते हैं कि ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है जिसका वर्ग -1 हो। ऐसे समीकरणों को हल करने के लिए, आइए हम कल्पना करें कि एक संख्या 'i' हमारे संख्या निकाय में है जो $\sqrt{-1}$ के बराबर है।

वर्ष 1748 में, महान गणितज्ञ एल. ऑयलर ने संख्या 'i' को आयोटा (*Iota*) नाम दिया, जिसका वर्ग -1 है। इस आयोटा अथवा 'i' को काल्पनिक इकाई के रूप में परिभाषित किया गया। नये संकेत चिन्ह 'i' के लेने से, हम ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूल को एक वास्तविक संख्या तथा 'i' के गुणनफल के रूप में प्रकट कर सकते हैं।

अतएव, हम समीकरण (A) के हल को $x = \pm i$ के रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं।

इस प्रकार, $-4 = 4(-1)$

$$\therefore \quad \sqrt{-4} = \sqrt{(-1)(4)} = \sqrt{i^2 . 2^2} = 2i$$

इसे परम्परागत रूप में $2i$ लिखा जाता है।

इस प्रकार, हम प्राप्त करते हैं: $\sqrt{-4} = 2i$, $\quad \sqrt{-7} = \sqrt{7}i$

$\sqrt{-4}$, $\sqrt{-7}$ सम्मिश्र संख्याओं के उदाहरण हैं।

एक अन्य द्विघात समीकरण $x^2 - 6x + 13 = 0$ पर विचार कीजिए।

इसे निम्नलिखित रूप में हल किया जा सकता है:

$(x-3)^2 + 4 = 0$ या, $(x-3)^2 = -4$

या, $x - 3 = \pm 2i$ या, $x = 3 \pm 2i$

हमें $x + yi$ के रूप वाली संख्याएँ प्राप्त होती हैं जिनमें x तथा y वास्तविक संख्याएँ हैं तथा $i = \sqrt{-1}$ है।

कोई भी संख्या, जिसे $a + bi$ के रूप में प्रकट किया जा सकता हो, जबकि a तथा b वास्तविक संख्याएँ एवं $i = \sqrt{-1}$ हो, एक सम्मिश्र संख्या कहलाती है।

प्राय: एक सम्मिश्र संख्या को अक्षर z द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। अर्थात् $z = a + bi$, 'a' को z का वास्तविक भाग कहा जाता है, जिसे Re $(a+bi)$ लिखा जाता है तथा b को z का काल्पनिक भाग कहा जाता है जिसे Im $(a + bi)$ लिखा जाता है।

यदि $a = 0$ तथा $b \neq 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या bi हो जाती है, जो कि एक पूर्णत: काल्पनिक सम्मिश्र संख्या है। $-7i$, $\frac{1}{2}i$, $\sqrt{3}\,i$ πi पूर्णत: काल्पनिक संख्याओं के उदाहरण हैं।

यदि $a \neq 0$ तथा $b = 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या 'a' हो जाती है, जो कि एक वास्तविक संख्या है। 5, 2.5 तथा $\sqrt{7}$ सभी वास्तविक संख्याओं के उदाहरण हैं।

यदि $a = 0$ तथा $b = 0$ हो, तो सम्मिश्र संख्या 0 (शून्य) हो जाती है। अत: वास्तविक संख्याएँ सम्मिश्र संख्याओं की विशेष दशाएँ हैं।

उदाहरण 8.1. 'i' का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(i) $\sqrt{-36}$ (ii) $\sqrt{25}.\sqrt{-4}$

हल: (i) $\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = 6i$ (ii) $\sqrt{25}.\sqrt{-4} = 5 \times 2i = 10i$

8.2 i की धनात्मक पूर्णांकीय घातें

हम जानते हैं कि

$i^2 = -1,\ i^3 = i^2.i = -1.i = -i,\ i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1,\ i^5 = (i^2)^2.i = 1.i = i$

$i^6 = (i^2)^3 = (-1)^3 = -1,\ i^7 = (i^2)^3(i) = -i,\ i^8 = (i^2)^4 = 1$

इस प्रकार, हम देखते हैं कि 'i' की किसी भी बड़ी घात को चार मानों $i, -1, -i$ तथा 1 में से किसी एक के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

यदि n एक ऐसा धनात्मक पूर्णांक है कि $n > 4$ है, तो i^n को ज्ञात करने के लिए हम पहले n को 4 से भाग देते हैं। उस दशा में, मान लीजिए कि m भागफल तथा r शेष मिलता है। तब,

$n = 4m + r$ जहाँ $0 \leq r < 4$ है।

इस प्रकार,

$i^n = i^{(4m+r)} = i^{4m}.i^r = (i^4)^m.i^r = i^r \qquad (\because i^4=1)$

टिप्पणी: किन्ही दो वास्तविक संख्याओं a तथा b के लिए, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ केवल उसी दशा में सत्य होगा जबकि a तथा b में से कम से कम एक शून्य अथवा धनात्मक हो।

वास्तव में, $\sqrt{-a}\times\sqrt{-b} = i\sqrt{a}\times i\sqrt{b} = i^2\sqrt{ab}$

$= -\sqrt{ab}$, जहाँ a तथा b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं।

उदाहरण 8.2. $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हलः $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30}$

$= 1 + (i^2)^5 + (i^2)^{10} + (i^2)^{15} = 1 + (-1)^5 + (-1)^{10} + (-1)^{15}$

$= 1 + (-1) + 1 + (-1) = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$

इस प्रकार, $1 + i^{10} + i^{20} + i^{30} = 0$

उदाहरण 8.3. $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हलः $8i^3 + 6i^{16} - 12i^{11}$ को लिखा जा सकता है:

$8(i^2).i + 6(i^2)^8 - 12(i^2)^5.i$

$= 8(-1).i + 6(-1)^8 - 12(-1)^5.i = -8i + 6 - 12(-1).i$

$= -8i + 6 + 12i = 6 + 4i$

जो $a + bi$ के रूप में है, जहाँ 'a' = 6 तथा 'b' = 4

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1. 'i' का उपयोग करते हुए, निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (a) $\sqrt{-27}$ (b) $-\sqrt{-9}$ (c) $\sqrt{-13}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को $a + bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए:

   (a) 5 (b) $-3i$ (c) 0

3. सरल कीजिए: $10i^3 + 6i^{13} - 12i^{10}$

4. सभी $m \in N$ के लिए, दिखाइए कि: $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$

8.3 एक सम्मिश्र संख्या का संयुग्मी

किसी सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का सम्मिश्र संयुग्मी (अथवा केवल संयुग्मी) $a - bi$ के रूप में परिभाषित किया जाता है तथा $\bar{z}$ के द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।

इस प्रकार, यदि $z = a + bi$, तो $\bar{z} = a - bi$

टिप्पणी: किसी सम्मिश्र संख्या में उसके काल्पनिक भाग के चिन्ह को बदल देने से उसका संयुग्मी प्राप्त होता है।

नीचे कुछ सम्मिश्र संयुग्मियों के उदाहरण दिए गए हैं:

(i) यदि $z = 2 + 3i$ हो, तो $\bar{z} = 2 - 3i$

(ii) यदि $z = 1 - i$ हो, तो $\bar{z} = 1 + i$

(iii) यदि $z = -2 + 10i$ हो, तो $\bar{z} = -2 - 10i$

8.3.1 सम्मिश्र संयुग्मियों के गुण

(i) यदि z एक वास्तविक संख्या है, तो $z = \bar{z}$, अर्थात् एक वास्तविक संख्या का संयुग्मी स्वयं वह संख्या ही होती है। उदाहरणार्थ, मान लीजिए $z = 5$ इसे लिखा जा सकता है:

$$z = 5 + 0i \therefore \bar{z} = 5 - 0i = 5 \therefore z = 5 = \bar{z}$$

(ii) यदि z एक पूर्णतः काल्पनिक संख्या है, तो $\bar{z} = -z$

उदाहरणार्थ, यदि $z = 3i$ है, तो इसे लिखा जा सकता है:

$$z = 0 + 3i \therefore \bar{z} = 0 - 3i = -3i = -z \therefore \bar{z} = -z$$

(iii) किसी सम्मिश्र संख्या के संयुग्मी का संयुग्मी स्वयं वह संख्या ही होती है। अर्थात् $\overline{(\bar{z})} = z$

उदाहरणार्थ, यदि $z = a + bi$ है, तो $\bar{z} = a - bi$

पुनः $\overline{(\bar{z})} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z$

$$\therefore \overline{(\bar{z})} = z$$

उदाहरण 8.4. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

(i) $3 - 4i$ (ii) $(2 + i)^2$

हल:

(i) मान लीजिए कि $z = 3 - 4i$ तब, $\bar{z} = \overline{(3 - 4i)} = 3 + 4i$

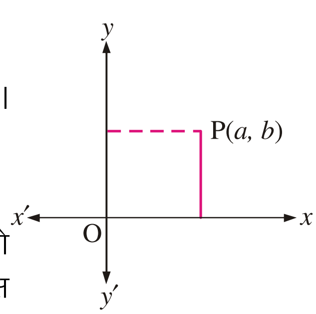
अतः, $3 - 4i$ का संयुग्मी $3 + 4i$ है।

(ii) मान लीजिए $z = (2 + i)^2$ है।

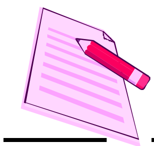
अर्थात्, $z = (2)^2 + (i)^2 + 2(2)(i) = 4 - 1 + 4i = 3 + 4i$

तब, $\bar{z} = \overline{(3 + 4i)} = 3 - 4i$ अतः, $(2 + i)^2$ का संयुग्मी $3 - 4i$ है।

8.4 एक सम्मिश्र संख्या का ज्यामितीय निरूपण

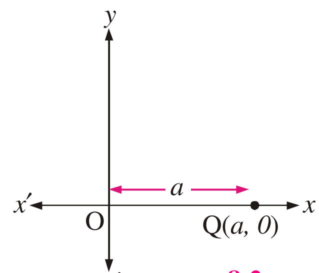


मान लीजिए कि $\mathbf{z} = a + bi$ एक सम्मिश्र संख्या है। मान लीजिए दो परस्पर लम्ब रेखाओं XOX' तथा YOY' को क्रमशः x-अक्ष तथा y-अक्ष लिया गया है जिनका उभयनिष्ठ बिन्दु O मूलबिन्दु है।



टिप्पणी

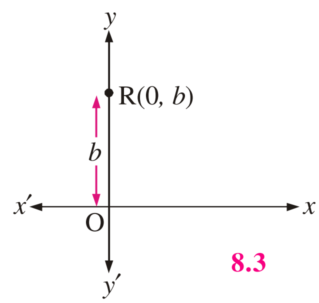
मान लीजिए कि P कोई बिन्दु है जिसके निर्देशांक (a,b) हैं। हम कहते हैं कि सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ को बिन्दु P (a , b) द्वारा निरूपित किया जाता है, जैसा कि चित्रा 8.1 में दर्शाया गया है।



8.2

यदि $b = 0$ हो, तो z एक वास्तविक संख्या होगी तथा सम्मिश्र संख्या $z = a + 0i$ को निरूपित करने वाला बिन्दु (a, 0) द्वारा निर्दिष्ट किया जायेगा। यह बिन्दु (a, 0) x-अक्ष पर स्थित है।

इसलिए XOX' को वास्तविक अक्ष कहा जाता है। चित्रा 8.8 में, बिन्दु Q (a, 0) सम्मिश्र संख्या $z = a + 0i$ को निरूपित करता है।



8.3

यदि $a = 0$ हो, तो z एक पूर्णतः काल्पनिक संख्या होगी तथा सम्मिश्र संख्या $z = 0 + bi$ को निरूपित करने वाले बिन्दु को (0, b) से निर्दिष्ट किया जायेगा। बिन्दु (0, b) y-अक्ष पर स्थित है।

इसलिए YOY' को काल्पनिक अक्ष कहा जाता है। चित्रा 8.8 में, R (0,b) सम्मिश्र संख्या $z = 0 + bi$ को निरूपित करता है।

सम्मिश्र संख्याओं को बिन्दुओं के रूप में निरूपित करने वाले दो अक्षों के तल को सम्मिश्र तल अथवा ऑरगंड तल कहा जाता है।

जो आरेख ऑरगंड तल में सम्मिश्र संख्या को निरूपित करता है, उसे ऑरगंड आरेख कहा जाता है।

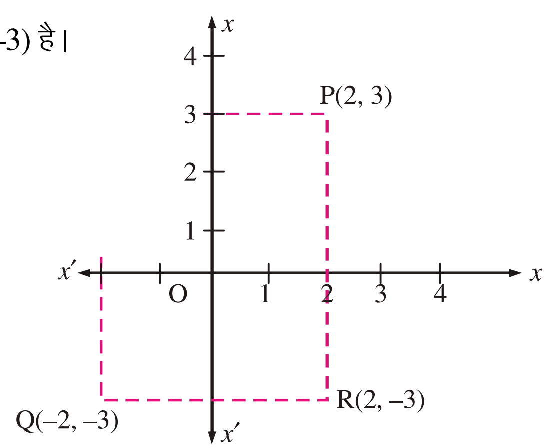
उदाहरण 8.5. सम्मिश्र संख्याओं $2 + 3i$, $-2-3i$ तथा $2-3i$ को एक ही आरगंड ऑरेख में निरूपित कीजिए।

हल:

(a) 2+3i को निरूपित करने वाला बिन्दु P (2, 3) है।

(b) –2–3i को निरूपित करने वाला बिन्दु Q (–2,–3) है।

(c) 2–3i को निरूपित करने वाला बिन्दु R (2, –3) है।



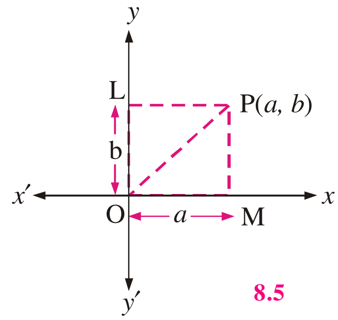
चित्र 8.4

8.5 एक सम्मिश्र संख्या का मापांक

हमने देखा कि किसी भी सम्मिश्र संख्या को आरगंड तल में एक बिन्दु के द्वारा निरूपित किया जा सकता है। उस बिन्दु की मूलबिन्दु से दूरी हम कैसे ज्ञात करेंगे? मान लीजिए कि तल में $a + bi$ को निरूपित करने वाला बिन्दु P(a, b) है। x-अक्ष तथा y-अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM तथा PL खींचिए। मान लीजिए कि $OM = a$ तथा $OL = MP = b$ हमें मूलबिन्दु से P की दूरी ज्ञात करनी है।

$$\therefore OP = \sqrt{OM^2 + MP^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

OP को सम्मिश्र संख्या $a + bi$ का मापांक अथवा निरपेक्ष मान कहा जाता है।



8.5

∴ किसी सम्मिश्र संख्या z, जबकि $z = a + bi, a \in R, b \in R$ है, का मापांक

$|z|$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है तथा $\sqrt{a^2 + b^2}$ के बराबर होता है।

$$\therefore \qquad |z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

8.5.1 मापांक के गुण

(a) $\quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z = a + bi,\ a \in R,\ b \in R$ है। तब, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z| = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $\quad a = 0$ और $b = 0$ (क्योंकि a^2 तथा b^2 दोनों धनात्मक हैं) $\Leftrightarrow z = 0$

(b) $\quad |z| = |\bar{z}|$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z = a + bi$ है। तब, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

अब, $\quad \bar{z} = a - bi \quad \therefore \quad |\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b^2)} = \sqrt{a^2 + b^2}$

इस प्रकार, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |\bar{z}|$ ...(i)

(c) $\quad |z| = |-z|$

उपपत्तिः मान लीजिए कि $z = a + bi$ है। तब $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore \quad -z = -a - bi$ है। तब, $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$

इस प्रकार, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = |-z|$ ...(ii)

उपर्युक्त (i) और (ii) से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$|z| = |-z| = |\bar{z}| \qquad \text{...(iii)}$$

उदाहरण 8.6. यदि $z = 1 + 2i$, तब $z, -z$ तथा $\bar{z}$ के मापांक ज्ञात कीजिए।

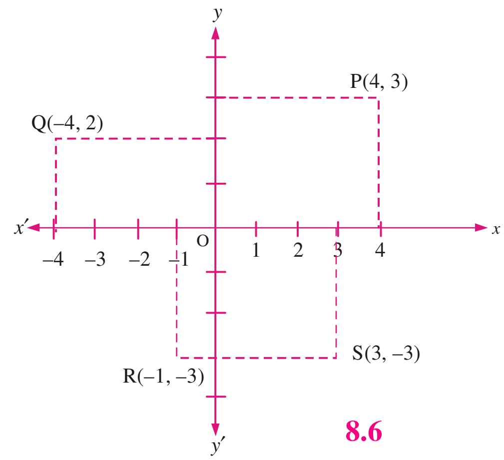
हलः $\quad z = 1 + 2i$ है। तब, $-z = -1 - 2i$ तथा $\bar{z} = 1 - 2i$

$$|z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5},\ |-z| = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$$

तथा $\quad |\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

इस प्रकार, $\quad |z| = |-z| = \sqrt{5} = |\bar{z}|$

उदाहरण 8.7. आरगंड तल (चित्र. 8.6) में दिखाई गई सम्मिश्र संख्याओं के मापांक ज्ञात कीजिए।



8.6

हलः (i) P(4, 3) सम्मिश्र संख्या $z = 4 + 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore$ $|z| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25}$

$|z| = 5$

(ii) Q(– 4, 2) सम्मिश्र संख्या $z = -4 + 2i$ को निरूपित करता है।

$\therefore$ $|z| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20}$

अथवा $|z| = 2\sqrt{5}$

(iii) R (–1, –3) सम्मिश्र संख्या $z = -1 - 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore$ $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9}$

$|z| = \sqrt{10}$

(iv) S(3, –3) सम्मिश्र संख्या $z = 3 - 3i$ को निरूपित करता है।

$\therefore$ $|z| = \sqrt{(3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9}$

$|z| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 8.2

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

   (a) $-2i$ (b) $-5 - 3i$ (c) $-\sqrt{2}$ (d) $(-2 + i)^2$

2. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं को आरगंड तल में निरूपित कीजिए:

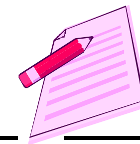
   (a) (i) $2 + 0i$ (ii) $-3 + 0i$ (iii) $0 - 0i$ (iv) $3 - 0i$

   (b) (i) $0 + 2i$ (ii) $0 - 3i$ (iii) $4i$ (iv) $-5i$

   (c) (i) $2 + 5i$ तथा $5 + 2i$ (ii) $3 - 4i$ तथा $-4 + 3i$
   (iii) $-7 + 2i$ तथा $2 - 7i$ (iv) $-2 - 9i$ तथा $-9 - 2i$

   (d) (i) $1 + i$ तथा $-1 - i$ (ii) $6 + 5i$ तथा $-6 - 5i$
   (iii) $-3 + 4i$ तथा $3 - 4i$ (iv) $4 - i$ तथा $-4 + i$

   (e) (i) $1 + i$ तथा $1 - i$ (ii) $-3 + 4i$ तथा $-3 - 4i$
   (iii) $6 - 7i$ तथा $6 + 7i$ (iv) $-5 - i$ तथा $-5 + i$



टिप्पणी

3. (a) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के मापांक ज्ञात कीजिए:

(i) 3 (ii) $(i+1)(2-i)$ (iii) $2-3i$ (iv) $4+\sqrt{5}\,i$

(b) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |\bar{z}|$

(i) $-6+8i$ (ii) $-3-7i$

(c) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |-z|$

(i) $14+i$ (ii) $11-2i$

(d) निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के लिए सत्यापित कीजिए कि $|z| = |-z| = |\bar{z}|$

(i) $2-3i$ (ii) $-6-i$ (iii) $7-2i$

8.6 दो सम्मिश्र संख्याओं की समता

दो सम्मिश्र संख्याएँ बराबर होंगी यदि और केवल यदि उनके वास्तविक भाग तथा काल्पनिक भाग अलग–अलग परस्पर बराबर हों। व्यापक रूप में, $a+bi = c+di$ होगा यदि और केवल यदि $a = c$ तथा $b = d$ हो।

उदाहरण 8.8. x तथा y के किन मानों के लिए, सम्मिश्र संख्याएँ $5x + 6yi$ तथा $10 + 18i$ समान होंगी?

हलः यह दिया है कि $5x + 6y\,i = 10 + 18i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$5x = 10$ अथवा $x = 2$ तथा $6y = 18$ अथवा $y = 3$

$x = 2$ तथा $y = 3$ के लिए दी हुई सम्मिश्र संख्याएँ समान हैं।

8.7 सम्मिश्र संख्याओं का योग

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हैं, तो उनका योग

$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$ द्वारा परिभाषित किया जाता है। उदाहरणार्थ,

यदि $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = -4 + 5i$ तो $z_1 + z_2 = [2 + (-4)] + [3 + 5]i = -2 + 8i$

उदाहरण 8.9. सरल कीजिए:

(i) $(3 + 2i) + (4 - 3i)$ (ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i)$

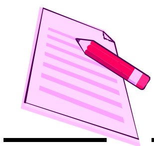
हलः (i) $(3 + 2i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + (2 - 3)i = 7 - i$

(ii) $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = (2 - 3 + 1) + (5 - 7 - 1)\,i = 0 - 3i$

अथवा, $(2 + 5i) + (-3 - 7i) + (1 - i) = -3i$

मॉड्यूल - III

बीजगणित-I



टिप्पणी

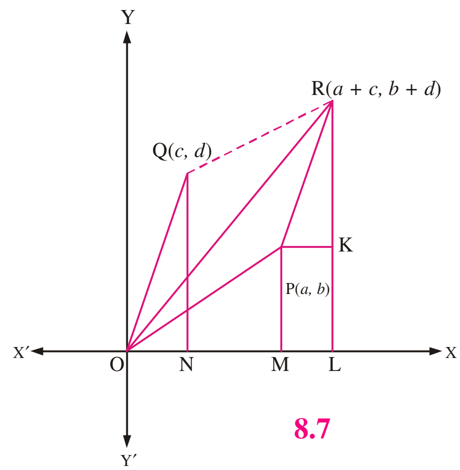
8.9.1 दो सम्मिश्र संख्याओं के योग का ज्यामितीय निरूपण

मान लीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याएँ z_1 तथा z_2 बिन्दुओं P(a, b) तथा Q(c, d) द्वारा निरूपित होती हैं। उसी आरगंड तल में उनका योग $z_1 + z_2$ बिन्दु R (a + c, b + d) द्वारा निरूपित होता है।

OP, OQ, OR, PR तथा QR को मिलाइए।

बिन्दुओं P, Q, R से x-अक्ष पर क्रमशः लम्ब PM, QN, RL खींचिए।

RL पर लम्ब PK खींचिए।



8.7

ΔQON में, ON = c तथा QN = d है।

ΔROL तथा ΔPOM में,

RL = b + d   PM = b

OL = a + c तथा OM = a

साथ ही, PK = ML

$$= OL - OM = a + c - a = c = ON$$

$$RK = RL - KL = RL - PM = b + d - b = d = QN$$

ΔQON तथा ΔRPK में,

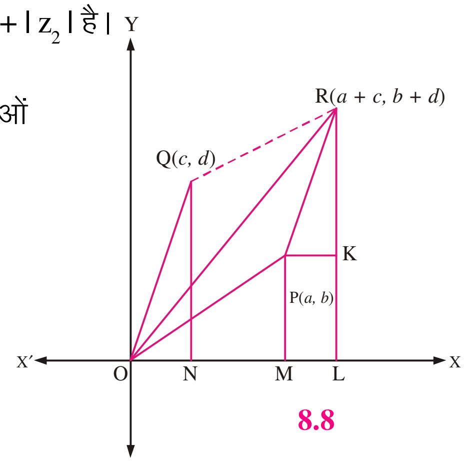
ON = PK, QN = RK तथा $\angle QNO = \angle RKP = 90^\circ$

$\therefore$ $\Delta QON \cong \Delta RPK$

$\therefore$ OQ = PR तथा OQ || PR

$\Rightarrow$ OPRQ एक समान्तर चतुर्भुज है तथा OR उसका विकर्ण है। अतः, हम कह सकते हैं कि सम्मिश्र संख्याओं का योग एक समान्तर चतुर्भुज के विकर्ण द्वारा निरूपित होता है।

उदाहरण 8.10. सिद्ध कीजिए कि $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ है।



8.8

हलः हमने सिद्ध किया है कि दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 तथा z_2 का योग एक समान्तर चतुर्भुज OPRQ (चित्रा 8.11 देखिए) के विकर्ण द्वारा निरूपित होता है।

ΔOPR में, OR $\le$ OP + PR

अथवा, OR $\le$ OP + OQ (क्योंकि OQ = PR)

अथवा, $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

उदाहरण 8.11. यदि $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = 1 + i$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

हल: $z_1 = 2 + 3i$ तथा $z_2 = 1 + i$ क्रमशः बिन्दुओं (2, 3) तथा (1, 1) द्वारा निरूपित किये जाते हैं। उनका योग $(z_1 + z_2)$ बिन्दु (2+1, 3+1), अर्थात् (3, 4) द्वारा निरूपित होगा।

सत्यापन $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} = 3.6$ लगभग $|z_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = 1.41$ लगभग

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \; |z_1| + |z_2| = 3.6 + 1.41 = 5.01$$

$\therefore \quad |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$

8.7.2 सम्मिश्र संख्याओं का घटाना

मान लीजिए कि दो सम्मिश्र संख्याएँ $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ क्रमशः बिन्दुओं (a, b) तथा (c, d) द्वारा निरूपित होती हैं।

$\therefore \quad (z_1) - (z_2) = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

जो बिन्दु $(a - c, b - d)$ को निरूपित करती है।

$\therefore$ अन्तर, अर्थात् $z_1 - z_2$ बिन्दु $(a - c, b - d)$ द्वारा निरूपित होता है। इस प्रकार, एक सम्मिश्र संख्या में से दूसरी संख्या घटाने के लिए, हम संगत वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को अलग – अलग घटाते हैं।

उदाहरण 8.12. $z_1 - z_2$ ज्ञात कीजिए यदि:

$z_1 = 3 - 4i, \quad z_2 = -3 + 7i$

हल: (a) $z_1 - z_2 = (3 - 4i) - (-3 + 7i) = (3 - 4i) + (3 - 7i)$

$$= (3 + 3) + (-4 - 7)i = 6 + (-11i) = 6 - 11i$$

उदाहरण 8.13. $5 + 4i$ प्राप्त करने के लिए, i में कौन–सी संख्या जोड़ी जायेगी?

हल: मान लीजिए कि, $z = a + bi$ को i में जोड़ने से $5 + 4i$ प्राप्त होगी।

$\therefore \quad i + (a + bi) = 5 + 4i$ अथवा, $a + (b + 1)i = 5 + 4i$

वास्तविक एवम् काल्पनिक भागों को समतुल्य करने पर, हमें प्राप्त होता है: $a = 5$ तथा $b + 1 = 4$ अथवा $b = 3$

$\therefore$ i में $z = 5 + 3i$ जोड़ने पर $5 + 4i$ प्राप्त होगी।

8.8 सम्मिश्र संख्याओं के योग के संदर्भ में गुण

1. संवरक गुण: दो सम्मिश्र संख्याओं का योग सदा एक सम्मिश्र संख्या होगी।

मान लीजिए $z_1 = a_1 + b_1 i$ तथा $z_2 = a_2 + b_2 i$, जहां $a_1, b_1, a_2, b_2 \in R$

अब, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ है, जो पुनः एक सम्मिश्र संख्या है।

इससे सम्मिश्र संख्याओं का संवरक गुण सिद्ध हो जाता है।

2. क्रमविनिमेय गुणः यदि z_1 तथा z_2 दो सम्मिश्र संख्याएं हैं, तो $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

मान लीजिए $z_1 = a_1 + b_1i$ तथा $z_2 = a_2 + b_2i$

अब, $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

$= (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)i$ [वास्तविक संख्याओं का क्रमविनिमेय गुण]

$= (a_2 + b_2i) + (a_1 + b_1i) = z_2 + z_1$

अर्थात् $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ अतएव, सम्मिश्र संख्याओं का योग क्रमविनिमेय है।

3. साहचर्य गुण

यदि $z_1 = a_1 + b_1i$, $z_2 = a_2 + b_2i$ तथा $z_3 = a_3 + b_3i$ तीन सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$$

अब, $z_1 + (z_2 + z_3)$

$= (a_1 + b_1i) + \{(a_2 + b_2i) + (a_3 + b_3i)\} = (a_1 + b_1i) + \{(a_2 + a_3) + (b_2 + b_3)i\}$

$= \{a_1+(a_2 + a_3)\} + \{b_1+(b_2 + b_3)\}i = \{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i\} + (a_3 + b_3i)$

$= \{(a_1 + b_1i) + (a_2 + b_2i)\} + (a_3 + b_3i) = (z_1 + z_2)+z_3$

अतएव, सम्मिश्र संख्याओं के योग में साहचर्य गुण लागू होता है।

4. योग के तत्समक (Identity) अवयव का अस्तित्व

यदि $z = a + bi$ कोई सम्मिश्र संख्या है, तो

$$(a + bi) + (0 + 0i) = a + bi$$

अर्थात् $(0 + 0i)$, $a + ib$ योज्य तत्समक है।

5. योज्य व्युत्क्रम (प्रतिलोम) का अस्तित्व

प्रत्येक सम्मिश्र संख्या $a + bi$ के लिए एक ऐसी अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $-a - bi$ का अस्तित्व है, ताकि

$(a + bi) + (-a - bi) = 0 + 0i$ हो। $-a -ib$ को $a + ib$ का योज्य व्युत्व्रफम कहते हैं।

व्यापक रूप में, एक सम्मिश्र संख्या का योज्य प्रतिलोम उसके वास्तविक तथा काल्पनिक भागों के चिन्ह बदलने से प्राप्त होता है।

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. सरल कीजिए: (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\,i\right)$ (b) $\dfrac{2+i}{3}+\dfrac{2-i}{6}$

   (c) $(1+i)-(1-6i)$ (d) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}i\right)-(-2-7i)$

2. यदि $z_1 = (5 + i)$ तथा $z_2 = (6 + 2i)$, तो

   (a) $z_1 + z_2$ ज्ञात कीजिए। (b) $z_2 + z_1$ ज्ञात कीजिए। (c) क्या $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$?

   (d) $z_1 - z_2$ ज्ञात कीजिए। (e) $z_2 - z_1$ ज्ञात कीजिए। (f) क्या $z_1 - z_2 = z_2 - z_1$?

3. यदि $z_1 = (1 + i)$, $z_2 = (1 - i)$ तथा $z_3 = (2 + 3i)$, तो

   (a) $z_1 + (z_2 + z_3)$ ज्ञात कीजिए। (b) $(z_1 + z_2) + z_3$ ज्ञात कीजिए।

   (c) क्या $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$? (d) $z_1 - (z_2 - z_3)$ ज्ञात कीजिए।

   (e) $(z_1 - z_2) - z_3$ ज्ञात कीजिए। (f) क्या $z_1 - (z_2 - z_3) = (z_1 - z_2) - z_3$?

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

   (a) $12 - 7i$ (b) $4 - 3i$

5. $(3 - 2i)$ प्राप्त करने के लिए $(-15 + 4i)$ में क्या जोड़ा जाना चाहिए?

6. दिखाइए कि $\left\{\overline{(3+7i)-(5+2i)}\right\} = \overline{(3+7i)} - \overline{(5+2i)}$

8.9 एक सम्मिश्र संख्या का कोणांक (Argument)

मान लीजिए कि बिन्दु $P(a, b)$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$, $a \in R$, $b \in R$ को निरूपित करता है तथा OP, x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ कोण θ बनाती है।

$PM \perp OX$ खींचिए।

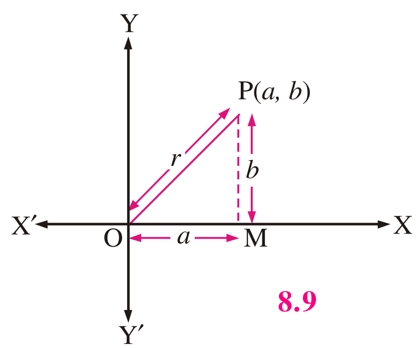
मान लीजिए $OP = r$

समकोण त्रिभुज OMP में, $OM = a$; $MP = b$

$\therefore \quad r\cos\theta = a,\ r\sin\theta = b$

तब $z = a + bi$ को लिख सकते हैं:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{...(i)}$$



8.9

जबकि $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ तथा $\tan\theta = \dfrac{b}{a}$, अथवा $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ है।

(i) को सम्मिश्र संख्या z का ध्रुवीय रूप कहते हैं तथा r और θ को सम्मिश्र संख्या के क्रमशः मापांक तथा कोणांक कहते हैं।

टिप्पणी

8.10 दो सम्मिश्र संख्याओं का गुणन

दो सम्मिश्र संख्याओं को योग तथा गुणा के सामान्य नियमों के अनुसार ही गुणा किया जा सकता है, जैसा कि वास्तविक संख्याओं में किया जाता है।

मान लीजिए $z_1 = (a + bi)$ तथा $z_2 = (c + di)$ तब,

$$z_1.z_2 = (a + bi).(c + di) = a\,(c + di) + bi\,(c + di)$$

या $= ac + adi + bci + bdi^2$ या $= (ac - bd) + (ad + bc)i$ [क्योंकि $i^2 = -1$]

यदि (a + bi) तथा (c + di) दो सम्मिश्र संख्याएं हों, तो उनके गुणनफल को सम्मिश्र संख्या $(ac - bd) + (ad + bc)i$

के रूप में परिभाषित किया जाता है।

उदाहरण 8.14. मान ज्ञात कीजिए: (i) $(1 + 2i)(1 - 3i)$ (ii) $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)$ (iii) $(3 - 2i)^2$

हल: (i) $(1 + 2i)\,(1 - 3i) = \{1 - (-6)\} + (-3 + 2)i = 7 - i$

(ii) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right) = \{3-(-1)\} + \left(-\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)i = 4 + 0i$

(iii) $(3 - 2i)^2 = (3 - 2i)\,(3 - 2i) = (9 - 4) + (-6 - 6)i = 5 - 12i$

8.10.1 सिद्ध कीजिए कि

$$|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$$

मान लीजिए कि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ तथा $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$\therefore \quad |z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$

इसी प्रकार, $|z_2| = r_2$

अब, $z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1).\, r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$= r_1r_2\,[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + (\cos\theta_1\sin\theta_2 + \sin\theta_1\cos\theta_2)i]$

$= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$

[क्योंकि $\cos(\theta_1 + \theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2$ तथा

$\sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$]

$$|z_1.z_2| = r_1r_2\sqrt{\cos^2(\theta_1+\theta_2)+\sin^2(\theta_1+\theta_2)} = r_1r_2$$

$\therefore \quad |z_1.z_2| = r_1r_2 = |z_1|.|z_2|$

तथा z_1z_2 का कोणांक $= \theta_1 + \theta_2$ = z_1 का कोणांक + z_2 का कोणांक

उदाहरण 8.15. सम्मिश्र संख्या (1 + i) (4 – 3i) का मापांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $z = (1 + i)(4 - 3i)$

तब, $|z| = |(1 + i)(4 - 3i)| = |(1 + i)|.|(4 - 3i)|$ [क्योंकि $|z_1z_2| = |z_1|.|z_2|$]

किन्तु $|1 + i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ और $|4 - 3i| = \sqrt{4^2+(-3)^2} = 5$

$\therefore \quad |z| = \sqrt{2}.5 = 5\sqrt{2}$

8.11 दो सम्मिश्र संख्याओं में भाग

सम्मिश्र संख्याओं में भाग के लिए अंश और हर दोनों को हर के संयुग्मी से गुणा किया जाता है। हम इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट करेंगे।

मान लीजिए $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ तब, $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a+bi}{c+di} \qquad (c + di \neq 0)$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$ [अंश और हर को हर के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

इस प्रकार, $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

उदाहरण 8.16. $3 + i$ को $4 - 2i$ से भाग दीजिए।

हल: $\dfrac{3+i}{4-2i} = \dfrac{(3+i)(4+2i)}{(4-2i)(4+2i)}$ [अंश और हर को $(4-2i)$ के संयुग्मी से गुणा करने पर]

$$= \frac{10+10i}{20} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

इस प्रकार, $$\frac{3+i}{4-2i} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

8.11.1 सिद्ध कीजिए कि $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

उपपत्ति: $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$|z_1| = r_1\sqrt{\cos^2\theta_1 + \sin^2\theta_1} = r_1$$

इसी प्रकार, $|z_2| = r_2$

तथा कोणांक $(z_1) = \theta_1$ और कोणांक $(z_2) = \theta_2$

तब, $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\sin\theta_2 + i\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)}{(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)\right]$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

इस प्रकार, $$= \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}\sqrt{\cos^2(\theta_1 - \theta_2) + \sin^2(\theta_1 - \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

$\therefore$ $\dfrac{z_1}{z_2}$ का कोणांक $= \theta_1 - \theta_2 \quad = z_1$ का कोणांक $- z_2$ का कोणांक

उदाहरण 8.17. सम्मिश्र संख्या $\dfrac{2+i}{3-i}$ का मापांक ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $z = \dfrac{2+i}{3-i}$

$$\therefore \quad |z| = \left|\frac{2+i}{3-i}\right| = \frac{|2+i|}{|3-i|} \quad \left(\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \therefore \quad |z| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

8.12 दो सम्मिश्र संख्याओं के गुणन के गुण

1. संवरक गुण

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो उनका गुणनफल z_1z_2 भी एक सम्मिश्र संख्या होती है।

2. क्रमविनिमेय गुण

यदि $z_1 = a + bi$ तथा $z_2 = c + di$ दो सम्मिश्र संख्याएँ हों, तो $z_1z_2 = z_2z_1$

3. साहचर्य गुण

यदि $z_1 = (a + bi)$, $z_2 = c + di$ तथा $z_3 = (e + fi)$ तो $z_1(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_3$

4. गुणन के तत्समक अवयव का अस्तित्वः

प्रत्येक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z_1 = a + bi$ के लिए एक अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $(1 + 0i)$ का अस्तित्व होता है, ताकि $(a + bi).(1 + 0i) = (1 + 0i)\ (a + bi) = a + bi$

मान लीजिए कि $z_1 = x + yi$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ के लिए गुणन का तत्समक अवयव है।

तब $\quad z.z_1 = z$ है। अर्थात् $(a + bi)\ (x + yi) = a + bi$

या $\quad (ax - by) + (ay + bx)i = a + bi$ या $ax - by = a$ तथा $ay + bx = b$

या $\quad x = 1$ और $y = 0$ [समीकरणों को हल करने पर]

अर्थात् $\quad z_1 = x + yi = 1 + 0i$ गुणन के लिए तत्समक अवयव है।

सम्मिश्र संख्या $1 + 0i$ गुणन के लिए तत्समक अवयव है।

5. गुणात्मक व्युत्क्रम (प्रतिलोम) का अस्तित्व

गुणात्मक व्युत्क्रम एक ऐसी सम्मिश्र संख्या है जिसको किसी दी हुई शून्येतर सम्मिश्र संख्या के साथ गुणा करने पर गुणनफल 1 आता है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ के लिए एक ऐसी अद्वितीय सम्मिश्र संख्या $(x + yi)$ का अस्तित्व होता है ताकि उनका गुणनफल $(1 + 0i)$ हो। अर्थात्, $(a + bi)\ (x + yi) = 1 + 0i$ या, $(ax - by) + (bx + ay)i = 1 + 0i$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर, हम प्राप्त करते हैं:

$ax - by = 1$ तथा $bx + ay = 0$

वज्र – गुणन द्वारा, $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{-b} = \dfrac{1}{a^2 + b^2}$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{a}{a^2 + b^2} = \frac{(z)}{|z|^2} \text{ तथा } y = \frac{-b}{a^2 + b^2} = -\frac{(z)}{|z|^2}$$

इस प्रकार एक शून्येतर सम्मिश्र संख्या $z = (a + bi)$ का गुणात्मक प्रतिलोम है:

$$x + yi = \left(\frac{(z)}{|z|^2} - \frac{(z)}{|z|^2} i \right) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

उदाहरण 8. 18. $2-4i$ का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $z=2-4i$

हमें प्राप्त होता है: $\bar{z}=2+4i \qquad |z|^2=\left|2^2+(-4)^2\right|=20$

$\therefore$ वांछित गुणात्मक प्रतिलोम है: $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2} = \dfrac{2+4i}{20} = \dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{5}i$

टिप्पणी

6. गुणन का योग पर वितरण गुण

मान लीजिए $z_1=a_1+b_1i$, $\quad z_2=a_2+b_2i$ तथा $z_3=a_3+b_3i$ तब, $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (a) $(1+2i)(\sqrt{2}-i)$ (b) $(\sqrt{2}+i)^2$

   (c) $(3+i)(1-i)(-1+i)$ (d) $(2+3i) \div (1-2i)$

   (e) $(1+2i) \div (1+i)$ (f) $(1+0i) \div (3+7i)$

2. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

   (a) $3-4i$ (b) $\sqrt{3}+7i$ (c) $\dfrac{3+5i}{2-3i}$

3. यदि $z_1=4+3i$, $\quad z_2=3-2i$ तथा $z_3=i+5$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

   $z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3$

4. यदि $z_1=2+i$, $z_2=-2+i$ तथा $z_3=2-i$ हो, तो सत्यापित कीजिए कि

   $(z_1.z_2)z_3=z_1(z_2.z_3)$

8.13 सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल

मान लीजिए $a+ib$ एक सम्मिश्र संख्या है तथा $x+iy$ उसका वर्गमूल है।

तब $\sqrt{a+ib} = x+iy \Rightarrow a+ib=(x+iy)^2 = x^2-y^2+2ixy$

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

$x^2-y^2=a$ ....(1)

तथा $2xy=b$ ...(2)

बीजगणितीय तत्समक का प्रयोग करने पर :

$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2+4x^2y^2 = (a)^2+(b)^2 = a^2+b^2$$

$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2} \qquad ...(3)$$

समीकरण (1) तथा (3) के अनुसार :

$$2x^2 = \sqrt{a^2+b^2}+a \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)}$$

$$\text{तथा } 2y^2 = \sqrt{a^2+b^2}-a \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)} \qquad ...(4)$$

समीकरण (4) में, इस तरह x तथा y के मान के 4 युग्म पाते हैं और हम x तथा y के वही मान स्वीकार करेंगे जो समीकरण (1) तथा (2) दोनों को सन्तुष्ट करते हों।

समीकरण (2) में यदि 'b' धनात्मक है तब x तथा y दोनों धनात्मक होंगे, अथवा दोनों ऋणात्मक होंगे।

$$\sqrt{a+ib} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

$$\text{तथा } -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} - i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}-a)}$$

यदि b ऋणात्मक है तो x तथा y विपरीत चिन्ह के होंगे, तब

$$\sqrt{a+ib} = -\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2}+a)} + i\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{b^2+b^2}-a)}$$

$$\text{तथा } \sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)}$$

अतः $a + ib$ के दोनों अवसरों पर दो–दो वर्गमूल विपरीत चिन्हों के होंगे।

उदाहरण 8.19. $7 + 24i$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{7+24i} = a+ib$ ...(1)

दोनों ओर वर्ग करने पर, $7 + 24i = a^2 - b^2 + 2\,iab$, प्राप्त होता है।

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों की तुलना करने पर

$a^2 - b^2 = 7$ ...(2)

तथा $2\,ab = 24 \Rightarrow ab = 12$ ....(3)

अतः $(a^2+b^2)^2 = (a^2-b^2)^2 + 4a^2b^2 \Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 49 + 4\times 144$

$\Rightarrow (a^2+b^2)^2 = 625 \Rightarrow a^2 + b^2 = 25$ ...(4)

समीकरण (2) तथा (4), को हल करने पर

$2a^2 = 32 \Rightarrow a^2 = 16 \Rightarrow a = \pm 4$

तथा $2b^2 = 18 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

समीकरण (3), $ab = 12$ धनात्मक है, अतः a तथा b समान चिन्हों के होंगे

यहाँ पर $a = 4,\ b = 3$ अथवा $a = -4,\ b = -3$ होंगे

अतः $7 + 24i$ के दो वर्गमूल $4 + 3i$ तथा $-4 - 3i$ होंगे।

उदाहरण 8.20. '$-i$' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल : माना $\sqrt{-i} = a + ib$

$\Rightarrow \quad -i = a^2 - b^2 + 2\,iab$ ...(1)

वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को बराबर करने पर

$a^2 - b^2 = 0$ ...(2)

तथा $2\,ab = -1 \Rightarrow ab = -\dfrac{1}{2}$ ...(3)

अब, $(a^2 + b^2)^2 = (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 0 + 4\left(\dfrac{1}{4}\right) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ ...(4)

समीकरण (2) तथा (4) द्वारा, $2b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow b = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

तथा $2a^2 = 1 \Rightarrow a^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow a = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

समीकरण (3) के अनुसार : 'a' तथा 'b' को विपरीत चिन्ह का होना चाहिए

अतः '$-i$' के वर्गमूल $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{i}{\sqrt{2}}$ तथा $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{i}{\sqrt{2}}$

देखें आपने कितना सीखा 3.5

निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए :

(*i*) $-21 - 20i$ (ii) $-4 - 3i$ (iii) $-48 - 14i$

आइये दोहराएँ

- $z = a + bi$ मानक रूप में एक सम्मिश्र संख्या है, जिसमें $a, b \in R$ तथा $i = \sqrt{-1}$ है।
- 'i' की कोई भी बड़ी घात चार मानों $i, -1, -i, 1$ में से किसी एक के रूप में व्यक्त की जा सकती है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का संयुग्मी $a - bi$ होता है तथा इसे $\bar{z}$ द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का मापांक (निरपेक्ष मान) $\sqrt{a^2 + b^2}$ होता है; अर्थात्

  $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (a) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$ (b) $|z| = |\bar{z}|$ (c) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$
- सम्मिश्र संख्या $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का ध्रुवीय रूप निरूपित करती है, जहाँ $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ मापांक तथा $\theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{b}{a}\right)$ कोणांक है।
- सम्मिश्र संख्या $z = a + bi$ का गुणात्मक प्रतिलोम $\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ है।

- एक सम्मिश्र संख्या का वर्गमूल सम्मिश्र संख्या होती है।
- एक सम्मिश्र संख्या के दो वर्गमूलों में केवल विपरीत चिन्ह का ही अन्तर होता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=ldjDzriyi28*
- *https://www.youtube.com/watch?v=BvZcjQivfEs*
- *https://www.youtube.com/watch?v=M9071V5gye4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=5MzCm16JN0k*
- *https://www.youtube.com/watch?v=hGGHbSgXXO4*
- *https://www.youtube.com/watch?v=cLQJ8x7fB_s*
- *https://www.youtube.com/watch?v=3s4CIWsLEXk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=ag-VRTxSRHw*

आइए अभ्यास करें

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के वास्तविक तथा काल्पनिक भागों को ज्ञात कीजिए:

   (a) $2+7i$ (b) $3+0i$ (c) $-\frac{1}{2}$

   (d) $5i$ (e) $\frac{1}{2+3i}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

   (a) $\sqrt{-3}.\sqrt{-27}$ (b) $\sqrt{-3}\sqrt{-4}\sqrt{-72}$ (c) $3i^{15}-5i^{8}+1$

3. वह सम्मिश्र संख्याएँ लिखिए जिनके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग क्रमित युग्मों के रूप में दिये गये हैं

   (a) $z(3,-5)$ (b) $z(0\,,-4)$ (c) $z(8,\pi)$

4. निम्नलिखित में से प्रत्येक का संयुग्मी ज्ञात कीजिए:

   (a) $1-2i$ (b) $-1-2i$ (c) $6-\sqrt{2}\,i$

   (d) $4i$ (e) $-4i$

5. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मापांक ज्ञात कीजिए:

   (a) $1-i$ (b) $3+\pi i$ (c) $-\frac{3}{2}i$ (d) $-2+\sqrt{3}i$

6. $7i^{17}-6i^{6}+3i^{3}-2i^{2}+1$ को $a+bi$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

7. x तथा y के मान ज्ञात कीजिए, यदि

(a) $(x-yi)+7-2i=9-i$ (b) $2x+3yi=4-9i$ (c) $x-3yi=7+9i$

8. निम्नलिखित में से प्रत्येक को सरल कीजिए:

(a) $(3+i)-(1-i)+(-1+i)$ (b) $\left(\frac{1}{7}+i\right)-\left(\frac{2}{7}-i\right)+\left(\frac{3}{7}-2i\right)$

9. निम्नलिखित में से प्रत्येक का योज्य प्रतिलोम तथा गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए:

(a) $3-7i$ (b) $11-2i$ (c) $\sqrt{3}+2i$ (d) $1-\sqrt{2}\,i$ (e) $\frac{1+5i}{1-i}$

टिप्पणी

10. निम्नलिखित सम्मिश्र संख्याओं में से प्रत्येक का मापांक ज्ञात कीजिए:

(a) $\frac{1+i}{3-i}$ (b) $\frac{5+2i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}$

(c) $(3+2i)(1-i)$ (d) $(1-3i)(-2i^3+i^2+3)$

11. सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए, सत्यापित कीजिए कि $|z_1z_2|=|z_2||z_1|$:

(a) $z_1 = 3-2i,\ z_2 = 1-5i$

(b) $z_1 = 3-\sqrt{7}\,i,\ z_2 = \sqrt{3}-i$

12. सम्मिश्र संख्याओं के निम्नलिखित युग्मों के लिए सत्यापित कीजिए कि $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$:

(a) $z_1 = 1+3i,\quad z_2 = 2+5i$ (b) $z_1 = -2+5i,\quad z_2 = 3-4i$

13. '$2+3i$' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

14. $-2+2\sqrt{-3}$ का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

15. 'i' का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 8.1

1 (a) $3\sqrt{3}\,i$ (b) $-3i$ (c) $\sqrt{13}\,i$

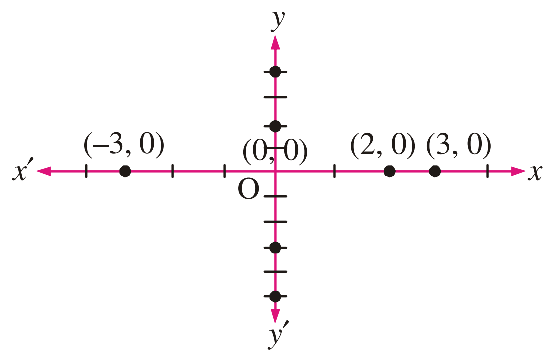
2. (a) $5+0i$ (b) $0-3i$ (c) $0+0i$

3. $12-4i$

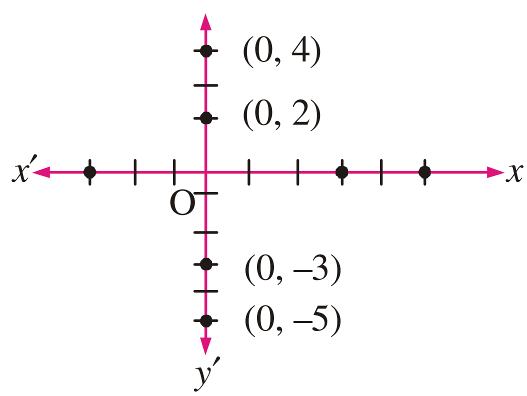
देखें आपने कितना सीखा 8.2

1 (a) 2i (b) – 5 + 3i (c) $-\sqrt{2}$ (d) 3 + 4i

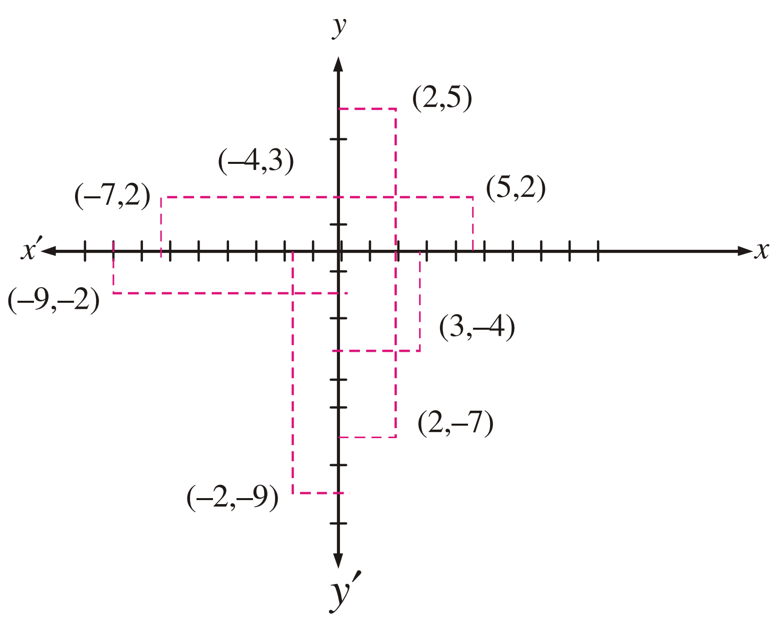
2. **(a)**



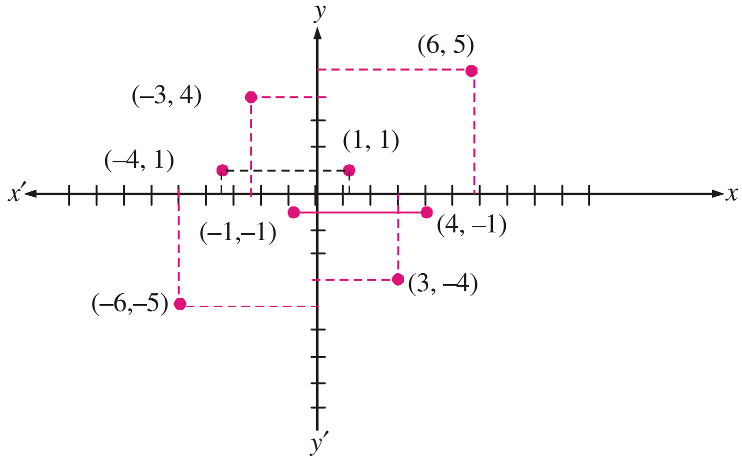
(b)



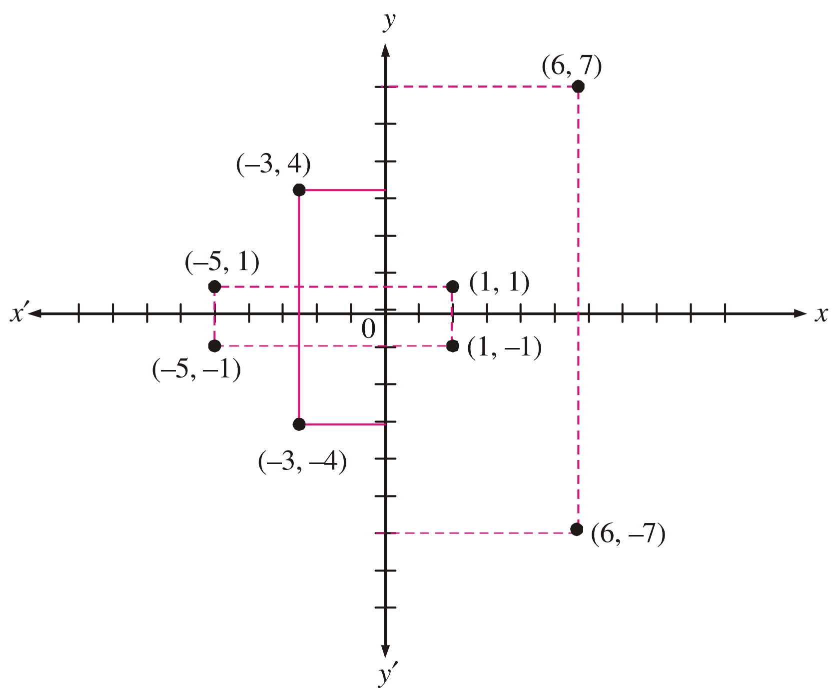
(c)



(d)



(e)



3. (a) (i) 3 (ii) $\sqrt{10}$ (iii) $\sqrt{13}$ (iv) $\sqrt{21}$

देखें आपने कितना सीखा 8.3

1. (a) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)i$ (b) $\frac{1}{6}(6+i)$

(c) 7i (d) $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)+(7-\sqrt{3})$

2. (a) 11 + 3i (b) 11 + 3i
(c) हाँ (d) $-1 - i$
(e) 1 + i (f) नहीं

3. (a) 4 + 3i (b) 4 + 3i
(c) हाँ (d) 2 + 5i
(e) $-2 - i$ (f) नहीं

4. (a) $-12 + 7i$ (b) $-4 + 3i$

5. $18 - 6i$

देखें आपने कितना सीखा 8.4

1. (a) $\left(\sqrt{2}+2\right)+\left(2\sqrt{2}-1\right)i$ (b) $1+2\sqrt{2}\,i$
(c) $-2 + 6i$ (d) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-4+7i)$
(e) $\frac{1}{2}(3+i)$ (f) $\frac{1}{58}(3-7i)$

2. (a) $\frac{1}{25}(3+4i)$ (b) $\frac{1}{52}(\sqrt{3}-7i)$
(c) $\frac{1}{34}(-9-19i)$

देखें आपने कितना सीखा 8.5

(i) $2 - 5i, -2 + 5i$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{2}}i, \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}i$ (iii) $1-7i, -1+7i$

आइए अभ्यास करें

1. (a) 2, 7 (b) 3, 0 (c) $-\frac{1}{2}$, 0 (d) 0, 5
(e) $\frac{2}{\sqrt{13}}, -\frac{3}{\sqrt{13}}$

2. (a) -9 (b) $-12\sqrt{6}\,i$ (c) $-4 - 3i$

3. (a) $3 - 5i$ (b) $0 - 4i$ (c) $8 + \pi i$

4. (a) $1 + 2i$ (b) $-1 + 2i$ (c) $6+\sqrt{2}\,i$

   (d) $-4i$ (e) $4i$

5. (a) $\sqrt{2}$ (b) $\sqrt{9+\pi^2}$ (c) $\frac{3}{2}$ (d) $\sqrt{7}$

6. $9 + 4i$

7. (a) $x = 2,\ y = -1$ (b) $x = 2,\ y = -3$ (c) $x = 7,\ y = -3$

8. (a) $1 + 3i$ (b) $\frac{2}{7} + 0i$

9. (a) $-3 + 7i,\ \frac{1}{58}(3+7i)$

   (b) $-11+2i,\ \frac{1}{125}(-11+2i)$

   (c) $-\sqrt{3}-2i,\ \frac{1}{7}\left(\sqrt{3}-2i\right)$

   (d) $-1+\sqrt{2}\,i,\ \frac{1}{3}(1+\sqrt{2}\,i)$

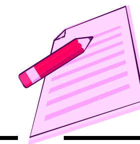
   (e) $2-3i,\ \frac{1}{13}\left(2+3i\right)$

10. (a) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (b) $\frac{1}{5}\sqrt{145}$ (c) $\sqrt{26}$ (d) $4\sqrt{5}$

13. $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{13}+2}{2}}+\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\,i\right)$

14. $1+\sqrt{3}i, -1-\sqrt{3}i$

15. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i, \frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$



9

द्विघात समीकरण एवं रैखिक असमिकाएं

स्मरण कीजिए कि एक बीजीय द्विघाती समीकरण सामान्यत: $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ के रूप में लिखा जाता है।

इसे x में एक द्विघाती समीकरण कहा जाता है। गुणांक 'a' प्रथम एवं मार्ग दर्शक गुणांक है, 'b' दूसरा अथवा मध्य गुणांक तथा 'c' अचर पद (अथवा तीसरा गुणांक) है।

उदाहरणार्थ $7x^2 + 2x + 5 = 0,\ \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 = 0,$

$3x^2 - x = 0,\ x^2 + \frac{1}{2} = 0,\ \sqrt{2}\,x^2 + 7x = 0$ ये सभी द्विघात समीकरण हैं।

कभी–कभी शाब्दिक समस्या को समीकरण में परिवर्तन करना सम्भव नहीं होता है। आइए निम्न स्थिति पर विचार करें।

आलोक 30 रु लेकर पेन्सिलें खरीदने के लिए बाजार जाता है। एक पेन्सिल का मूल्य 2.60 रु. है। यदि x, उस द्वारा खरीदी जाने वाली पेन्सिलों की संख्या को दर्शाता है, तो वह 2.60 x रु खर्च करेगा। यह राशि 30 रु के बराबर नहीं हो सकती क्योंकि x एक प्राकृत संख्या है। इस प्रकार

$$2.60\,x < 30 \qquad \ldots (i)$$

आइए एक और स्थिति पर विचार करें जिस में एक व्यक्ति के पास 50,000 रु. हैं तथा वह कुर्सियों और मेज़ें खरीदना चाहता है। एक मेज़ का मूल्य 550 रु. तथा एक कुर्सी का मूल्य 450 रु. है। माना x कुर्सियों की संख्या तथा y मेज़ों की संख्या, जो वह खरीदता है, को दर्शाते हैं।

उसका कुल मूल्य = (550 x + 450 y)

इस दशा में, हम लिख सकते हैं कि

$$550x + 450y \leq 50{,}000$$

या $$11x + 9y \leq 1000 \qquad \ldots (ii)$$

कथन (i) में असमिका का चिह्न '<' तथा कथन (ii) में दो कथन सम्मिलित हैं $11x+9y < 1000$, $11x+9y = 1000$ जिसमें पहला समीकरण नहीं है।

ऐसे कथन 'असमिका' कहलाते हैं। इस पाठ में हम रैखिक असमिकाओं की चर्चा करेंगे तथा आहार, व्यापार तथा परिवहन सम्बन्धी समस्याओं को आलेखीय विधि से हल करेंगे।

इस पाठ में हम वास्तविक एवं सम्मिश्र गुणांकों वाले द्विघात समीकरणों के हल करने तथा मूल और गुणांकों के मध्य संबंध स्थापित करने के विषय में चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे

- वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरणों को गुणन खंडन द्वारा तथा द्विघात सूत्र का उपयोग करके हल करना
- मूल तथा गुणांकों में संबंध स्थापित करना
- दिये हुए मूलों से एक द्विघात समीकरण बनाना
- रैखिक समीकरण तथा रैखिक असमीकरण में अन्तर करना
- यह कथन कहना कि समतलीय क्षेत्र एक रैखिक असमिका के हल को प्रदर्शित करता है
- दो चरों में रैखिक असमिकाओं को आलेख द्वारा दर्शाने में
- एक असमिका के हल के उचित क्षेत्र को छायांकित करना
- दो चरों में दो या तीन असमिकाओं को आलेखीय विधि द्वारा हल करना

पूर्व ज्ञान

- वास्तविक संख्याएं
- वास्तविक गुणांकों वाले द्विघात समीकरण
- एक या दो चरों में रैखिक समीकरणों के हल
- एक या दो चरों में रैखिक समीकरणों के तल में आलेख
- दो चरों में रैखिक समीकरण निकाय के आलेखीय हल

9.1 द्विघात समीकरण के मूल

किसी समीकरण में, उसे संतुष्ट करने वाला चर के स्थान पर प्रतिस्थापित मान समीकरण का एक मूल (अथवा हल) कहलाता है।

यदि α द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ ... (i)

का एक मूल हो, तो $a\alpha^2+b\alpha+c=0$

दूसरे शब्दों में, $x-\alpha$ द्विघात समीकरण (i) का एक गुणनखंड है।

विशेषतया, द्विघात समीकरण $x^2+x-6=0$ पर विचार कीजिए। ...(ii)

यदि (ii) में हम $x=2$ प्रतिस्थापित करते हैं, तो हमें मिलता है:

बायां पक्ष $=2^2+2-6=0$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

पुनः (ii) में $x=-3$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

बायां पक्ष $=(-3)^2-3-6=0$

$\therefore$ बायां पक्ष = दायां पक्ष

पुनः (ii) में $x=-1$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं:

बायां पक्ष $= (-1)^2 + (-1) - 6 = -6 \neq 0$

$\therefore$ बायां पक्ष $\neq$ दायां पक्ष

$\therefore$ $x = 2$ तथा $x = -3$ ही x के दो ऐसे मान हैं जो द्विघात समीकरण (ii) को सन्तुष्ट करते हैं।

दूसरे कोई मान ऐसे नहीं हैं जो (ii) को सन्तुष्ट करते हों।

$\therefore$ द्विघात समीकरण (ii) के केवल दो मूल $x = 2$ तथा $x = -3$ हैं।

टिप्पणीः *यदि α, β द्विघात समीकरण*

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \qquad ...(A)$$

के दो मूल हों, तो $(x-\alpha)$ तथा $(x-\beta)$ द्विघात समीकरण (A) के गुणनखंड होंगे। दिये हुए द्विघात समीकरण को इन गुणनखंड के पदों में $(x-\alpha)(x-\beta) = 0$ के रूप में लिखा जा सकता है।

9.2 द्विघात समीकरण को गुणन खंडन द्वारा हल करना

याद कीजिए कि आपने $p(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,$ के रूप वाले द्विघात बहुपद के, मध्य पद को तोड़कर उभयनिष्ठ गुणनखंड लेकर, किस प्रकार गुणनखंड किये जाते हैं, यह सीखा था। द्विघात समीकरण को गुणन खंडन द्वारा हल करने में वही विधि अपनाई जाती है।

यदि द्विघात समीकरण

$ax^2 + bx + c = 0$ $\quad a \neq 0$ के बायें पक्ष के दो गुणनखंड $x - \frac{p}{q}$ तथा $x - \frac{r}{s}$ हों, तो

$$\left(x - \frac{p}{q}\right)\left(x - \frac{r}{s}\right) = 0$$

$\therefore$ या तो $x = \frac{p}{q}$ या $x = \frac{r}{s}$ होगा।

$\therefore$ द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $\frac{p}{q}$ तथा $\frac{r}{s}$ होंगे।

उदाहरण 9.1. गुणनखंडन विधि के उपयोग से निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $6x^2 + 5x - 6 = 0$

हलः दिया गया द्विघात समीकरण हैः

$$6x^2 + 5x - 6 = 0 \qquad ...(i)$$

मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैंः

$$6x^2 + 9x - 4x - 6 = 0$$

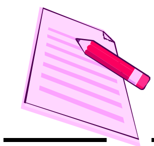
या, $3x(2x + 3) - 2(2x + 3) = 0$

या, $(2x + 3)(3x - 2) = 0$

$\therefore$ या तो $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$

या $\quad 3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

$\therefore$ दिये हुए समीकरण के दो मूल $-\frac{3}{2}$ तथा $\frac{2}{3}$ हैं।



टिप्पणी

उदाहरण 9.2. गुणनखंडन विधि के उपयोग से, निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $3\sqrt{2}\,x^2 + 7x - 3\sqrt{2} = 0$

हल: मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$3\sqrt{2}\,x^2 + 9x - 2x - 3\sqrt{2} = 0$$

या, $3x(\sqrt{2}\,x + 3) - \sqrt{2}(\sqrt{2}\,x + 3) = 0$

या, $(\sqrt{2}\,x + 3)(3x - \sqrt{2}) = 0$

$\therefore$ या तो $\sqrt{2}\,x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

या, $3x - \sqrt{2} = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

$\therefore$ दिए गए द्विघात समीकरण के दो मूल $-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ तथा $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ हैं।

उदाहरण 9.3. गुणनखंडन विधि के उपयोग से निम्नलिखित द्विघात समीकरण को हल कीजिए: $(a+b)^2 x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$

हल: दिया गया द्विघात समीकरण है:

$$(a+b)^2 x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

मध्य पद को तोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$(a+b)^2 x^2 + 3(a^2 - b^2)x + 3(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

या, $(a+b)x\{(a+b)x + 3(a-b)\} + 3(a-b)\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

या, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}\{(a+b)x + 3(a-b)\} = 0$

$\therefore$ या तो $(a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

या, $(a+b)x + 3(a-b) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

दिये गये द्विघात समीकरण के समान मूल $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$ हैं।

वैकल्पिक विधि

दिया गया द्विघात समीकरण है

$$(a+b)^2 x^2 + 6(a^2 - b^2)x + 9(a-b)^2 = 0$$

इसे हम एक अन्य नीचे दिए गए रूप में लिख सकते हैं:

$$\{(a+b)x\}^2 + 2.(a+b)x \,.\, 3(a-b) + \{3(a-b)\}^2 = 0$$

या, $\{(a+b)x + 3(a-b)\}^2 = 0$

या, $x = -\dfrac{3(a-b)}{a+b} = \dfrac{3(b-a)}{a+b}$

$\therefore$ दिये गये द्विघात समीकरण के समान मूल $\dfrac{3(b-a)}{a+b}, \dfrac{3(b-a)}{a+b}$ हैं।

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक को गुणन खंडन विधि द्वारा हल कीजिए:

(i) $\sqrt{3}\, x^2 + 10x + 8\sqrt{3} = 0$ (ii) $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$

(iii) $x^2 + \left(\frac{ab}{c} - \frac{c}{ab}\right) x - 1 = 0$ (iv) $x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 6 = 0$

9.3 द्विघात सूत्र द्वारा द्विघात समीकरण हल करना

एक मानक द्विघात समीकरण

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

को पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल करने को स्मरण कीजिए।

उपर्युक्त द्विघात समीकरण के मूल हैं:

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}, \qquad = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$$

जहां पर $D = b^2 - 4ac$ को द्विघात समीकरण का विविक्तकर (Discriminant) कहा जाता है।

एक द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ के लिए, यदि

(i) **$D>0$, तो समीकरण के दो वास्तविक तथा असमान मूल होंगे।**

(ii) **$D=0$, तो समीकरण के दो वास्तविक तथा समान मूल होंगे तथा दोनों मूल $-\frac{b}{2a}$ के बराबर होंगे।**

(iii) **$D<0$, तो समीकरण के दो सम्मिश्र (काल्पनिक) संयुग्मी मूल होंगे।**

उदाहरण 9.4. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक के मूलों की प्रकृति की जांच कीजिए तथा सूत्र द्वारा सत्यापित कीजिए:

(i) $x^2 + 9x + 10 = 0$ (ii) $9y^2 - 6\sqrt{2}y + 2 = 0$ (iii) $\sqrt{2}\,t^2 - 3t + 3\sqrt{2} = 0$

हल: (i) दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$x^2 + 9x + 10 = 0$$

यहां, $a = 1,\ b = 9$ तथा $c = 10$

$\therefore$ $D = b^2 - 4ac = 81 - 4.1.10 = 41 > 0.$

$\therefore$ समीकरण के दो वास्तविक तथा असमान मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$\therefore$ दो मूल $\dfrac{-9+\sqrt{41}}{2}$ तथा $\dfrac{-9-\sqrt{41}}{2}$ हैं जो वास्तविक तथा असमान हैं।

(ii) दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$9y^2-6\sqrt{2}\,y+2=0$$

यहां, $D=b^2-4ac=(-6\sqrt{2})^2-4.9.2=72-72=0$

$\therefore$ समीकरण के दो वास्तविक तथा बराबर मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$y=\frac{6\sqrt{2}\pm\sqrt{0}}{2.9}=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

$\therefore$ दो बराबर मूल $\dfrac{\sqrt{2}}{3}, \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ हैं।

(iii) दिया हुआ द्विघात समीकरण है: $\sqrt{2}\,t^2-3t+3\sqrt{2}=0$

यहां, $D=(-3)^2-4.\sqrt{2}.3\sqrt{2}=-15<0$

$\therefore$ द्विघात के दो सम्मिश्र संयुग्मी मूल होंगे।

सत्यापन: द्विघात सूत्र से हम प्राप्त करते हैं:

$$t=\frac{3\pm\sqrt{-15}}{2\sqrt{2}}=\frac{3\pm\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}, \text{ जहां } i=\sqrt{-1}$$

$\therefore$ दो सम्मिश्र संयुग्मी मूल $\dfrac{3+\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$ तथा $\dfrac{3-\sqrt{15}\,i}{2\sqrt{2}}$ हैं।

उदाहरण 9.5. सिद्ध कीजिए कि p के सभी वास्तविक मानों के लिए द्विघात समीकरण $x^2+px-1=0$ के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

हल: यहां, $D=p^2+4$, जो p के सभी वास्तविक मानों के लिए धनात्मक है अर्थात् $D>0$ है।

$\therefore$ p के सभी वास्तविक मानों के लिए समीकरण के मूल वास्तविक तथा असमान होंगे।

उदाहरण 9.6. k के किन मानों के लिए द्विघात समीकरण $(4k+1)x^2+(k+1)x+1=0$ के मूल समान होंगे?

हल: दिया हुआ द्विघात समीकरण है: $(4k+1)x^2+(k+1)x+1=0$

यहां, $D=(k+1)^2-4.(4k+1).1$

समान मूलों के लिए $D=0$

$\therefore$ $(k+1)^2-4(4k+1)=0$

$\Rightarrow$ $k^2-14k-3=0$

$\therefore$ $k=\dfrac{14\pm\sqrt{196+12}}{2}$ या, $k=\dfrac{14\pm\sqrt{208}}{2}=7\pm2\sqrt{13}$

अतः $7+2\sqrt{13}, 7-2\sqrt{13}$

k के वांछित मान हैं।

उदाहरण 9.7. सिद्ध कीजिए कि a, b, c, d के सभी वास्तविक मानों के लिए द्विघात समीकरण $x^2(a^2+b^2)+2x(ac+bd)+(c^2+d^2)=0$ के मूल काल्पनिक हैं। किन्तु यदि $ad = bc$ हो, तो मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

हल: दिया हुआ द्विघात समीकरण है:

$$x^2(a^2+b^2)+2x(ac+bd)+(c^2+d^2)=0$$

विविक्तकर $= 4(ac+bd)^2 - 4(a^2+b^2)(c^2+d^2) = 8\,abcd - 4(a^2d^2+b^2c^2)$

$= -4(-2\,abcd + a^2d^2 + b^2c^2)$

$= -4(ad-bc)^2 < 0$, a, b, c, d के सभी वास्तविक मानों के लिए

$\therefore$ दिए हुए समीकरण के मूल काल्पनिक हैं।

वास्तविक तथा समान मूलों के लिए, विविक्तकर शून्य के बराबर होगा।

$\Rightarrow$ $-4(ad-bc)^2 = 0$

या, $ad = bc$

अतएव, यदि $ad=bc$, मूल वास्तविक तथा समान होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 9.2

1. निम्नलिखित द्विघात समीकरणों में से प्रत्येक को द्विघात सूत्र द्वारा हल कीजिए:

   (i) $2x^2-3x+3=0$ (ii) $-x^2+\sqrt{2}x-1=0$

   (iii) $-4x^2+\sqrt{5}x-3=0$ (iv) $3x^2+\sqrt{2}x+5=0$

2. k के किन मानों के लिए समीकरण

   $y^2-2(1+2k)y+3+2k=0$

   के मूल समान होंगे?

3. दर्शाइए कि समीकरण $(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ के मूल सर्वदा वास्तविक होंगे तथा यह तब तक समान नहीं होंगे जब तक कि $a = b = c$ न हो।

9.4 एक द्विघात समीकरण के मूलों और गुणांकों में संबंध

आपने सीखा है कि द्विघात समीकरण

$$ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$$

के मूल $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा $\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ हैं।

मान लीजिए $\alpha = \dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ...(i) तथा $\beta = \dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ... (ii)

(i) और (ii) को जोड़ने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\alpha + \beta = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

$\therefore$ मूलों का योगफल $= -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{b}{a}$ ... (iii)

अब (i) तथा (ii) को परस्पर गुणा करने पर हम प्राप्त करते हैं:

$$\alpha\,\beta = \frac{+b^2 - (b^2 - 4\,ac)}{4a^2} = \frac{4\,ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$\therefore$ मूलों का गुणनफल $= \dfrac{\text{अचर पद}}{x^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{c}{a}$ ...(iv)

(iii) तथा (iv) एक दिए हुए द्विघात समीकरण के मूलों तथा गुणांकों में वांछित संबंध प्रदान करते हैं। ये संबंध, जिस द्विघात समीकरण के मूल दिए हुए हों, उसे ज्ञात करने में सहायता प्रदान करते हैं।

उदाहरण 9.8. यदि α, β समीकरण $3x^2 - 5x + 9 = 0$ के मूल हों, तो

(a) $\alpha^2 + \beta^2$ (b) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: (a) यह दिया है कि α, β द्विघात समीकरण $3x^2 - 5x + 9 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore$ $\alpha + \beta = \dfrac{5}{3}$ ... (i)

तथा $\alpha\beta = \dfrac{9}{3} = 3$ ... (ii)

अब, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 2.3 = -\dfrac{29}{9}$ [(i) तथा (ii) से]

$\therefore$ वांछित मान $-\dfrac{29}{9}$ है।

(b) अब, $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2} = \dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2\beta^2} = \dfrac{\frac{-29}{9}}{9} = -\dfrac{29}{81}$ [(i) तथा (ii) से]

उदाहरण 9.9. यदि समीकरण $3y^2 + 4y + 1 = 0$ के मूल α, β हों, तो एक ऐसा द्विघात समीकरण बनाइए, जिसके मूल α^2, β^2 हैं।

हल: यह दिया है कि α, β द्विघात समीकरण $3y^2 + 4y + 1 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore$ मूलों का योगफल, अर्थात्

$\alpha + \beta = -\dfrac{y \text{ का गुणांक}}{y^2 \text{ का गुणांक}} = -\dfrac{4}{3}$ ... (i)

मूलों का गुणनफल, अर्थात्

$\alpha\,\beta = \dfrac{\text{अचर पद}}{y^2 \text{ का गुणांक}} = \dfrac{1}{3}$ ... (ii)

अब, $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\,\alpha\,\beta = \left(-\dfrac{4}{3}\right)^2 - 2.\dfrac{1}{3}$ [(i) तथा (ii) से]

$$= \frac{16}{9} - \frac{2}{3} = \frac{10}{9}$$

तथा $\alpha^2 \beta^2 = (\alpha\,\beta)^2 = \dfrac{1}{9}$ [(ii) से]

$\therefore$ वांछित द्विघात समीकरण है; $y^2 - (\alpha^2 + \beta^2)y + \alpha^2\beta^2 = 0$

अथवा, $y^2 - \dfrac{10}{9}y + \dfrac{1}{9} = 0$

अथवा, $9y^2 - 10y + 1 = 0$

उदाहरण 9.10. यदि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$ का एक मूल दूसरे का वर्ग हो, तो सिद्ध कीजिए कि $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

हल: मान लीजिए कि समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, α^2 हैं।

$\therefore$ $\alpha + \alpha^2 = -\dfrac{b}{a}$ ... (i)

तथा $\alpha.\alpha^2 = \dfrac{c}{a}$ अर्थात् $\alpha^3 = \dfrac{c}{a}$ . ... (ii)

(i) से हमें मिलता हैं:

$$\alpha\,(\alpha + 1) = -\frac{b}{a}$$

या, $\{\alpha\,(\alpha+1)\}^3 = \left(-\dfrac{b}{a}\right)^3 = -\dfrac{b^3}{a^3}$

या, $\alpha^3\,(\alpha^3 + 3\alpha^2 + 3\alpha + 1) = -\dfrac{b^3}{a^3}$

या, $\dfrac{c}{a}\left\{\dfrac{c}{a} + 3\left(-\dfrac{b}{a}\right) + 1\right\} = -\dfrac{b^3}{a^3}$ ... [(i) तथा (ii) से]

या, $\dfrac{c^2}{a^2} - \dfrac{3\,bc}{a^2} + \dfrac{c}{a} = -\dfrac{b^3}{a^3}$

या, $ac^2 - 3abc + a^2c = -b^3$

या, $b^3 + ac^2 + a^2c = 3abc$

जो वांछित परिणाम है।

उदाहरण 9.11. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिस से समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $m : n$ के अनुपात में हों।

हल: मान लीजिए समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $m\alpha$ तथा $n\alpha$ हैं।

अब, $m\alpha + n\alpha = -\dfrac{b}{a}$ ... (i)

तथा $mn\alpha^2 = \dfrac{c}{a}$ ... (ii)

(i) से हमें मिलता है: $\alpha\,(m+n) = -\dfrac{b}{a}$

या, $\alpha^2 (m+n)^2 = \dfrac{b^2}{a^2}$

या, $\dfrac{c}{a}(m+n)^2 = mn\dfrac{b^2}{a^2}$ [(ii) से]

या, $ac\,(m+n)^2 = mn\,b^2$

जो वांछित प्रतिबन्ध है।

देखें आपने कितना सीखा 9.3

1. यदि समीकरण $ay^2 + by + c = 0$ के मूल α, β हों, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

   (i) $\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ (ii) $\dfrac{1}{\alpha^4} + \dfrac{1}{\beta^4}$

2. यदि समीकरण $5x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूल α, β हों, तो एक द्विघात समीकरण बनाइए जिसके मूल हों:

   (i) α^2, β^2 (ii) $\alpha^3\beta, \alpha\beta^3$

3. यदि समीकरण $ay^2 + by + c = 0$ के मूल 3:4 के अनुपात में हों, तो सिद्ध कीजिए कि $12b^2 = 49\,ac$

4. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे समीकरण $px^2 - qx + p = 0$ का एक मूल दूसरे से 1 अधिक हो।

9.5 एक द्विघात समीकरण का हल जब कि $D < 0$

आइए निम्नलिखित द्विघात समीकरणों पर विचार करें:

(a) t के लिए हल कीजिए:

$t^2 + 3t + 4 = 0$

$$\therefore \quad t = \frac{-3 \pm \sqrt{9-16}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

यहां, $D = -7 < 0$ है।

$\therefore$ मूल हैं: $\dfrac{-3+\sqrt{-7}}{2}$ तथा $\dfrac{-3-\sqrt{-7}}{2}$ या, $\dfrac{-3+\sqrt{7}\,i}{2}$ तथा $\dfrac{-3-\sqrt{7}\,i}{2}$

इस प्रकार, मूल सम्मिश्र तथा संयुग्मी हैं।

(b) y के लिए हल कीजिए: $-3y^2 + \sqrt{5}\,y - 2 = 0$

$\therefore$ $y = \dfrac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{5-4(-3).(-2)}}{2(-3)}$ या, $y = \dfrac{-\sqrt{5} \pm \sqrt{-19}}{-6}$

यहां, $D = -19 < 0$

$\therefore$ मूल हैं: $\dfrac{-\sqrt{5}+\sqrt{19}i}{-6}, \dfrac{-\sqrt{5}-\sqrt{19}i}{-6}$

यहां पर भी मूल सम्मिश्र तथा संयुग्मी हैं।

उपर्युक्त उदाहरणों से हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकालते हैं:

(i) दोनों दशाओं से $D < 0$

(ii) मूल सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी हैं।

क्या यह सर्वदा सत्य है कि सम्मिश्र मूल संयुग्मी जोड़ों में ही होते हैं?

आइए एक द्विघात समीकरण बनाएं जिसके मूल

$2 + 3i$ तथा $4 - 5i$ हों। समीकरण होगा

$\{x-(2+3i)\}\,\{x-(4-5i)\} = 0$

अथवा, $x^2 - (2+3i)x - (4-5i)x + (2+3i)(4-5i) = 0$

अथवा, $x^2 + (-6+2i)x + 23 + 2i = 0$

जो कि सम्मिश्र गुणांकों में एक समीकरण है।

टिप्पणी:* *यदि द्विघात समीकरण के दो सम्मिश्र मूल परस्पर संयुग्मी न हों, तो द्विघात समीकरण सम्मिश्र गुणांकों वाला समीकरण होता है।

9.6 बीजगणित की आधरभूत प्रमेय (सिद्धान्त)

शायद आपकी रूचि ''एक समीकरण के कितने मूल होते हैं'' जानने में हो सकती है।

बीजगणितीय आधारभूत प्रमेय (बिना प्रमाण) के अनुसार ''एक बहुपद समीकरण का कम से कम एक मूल होता है।''

इसी सिद्धान्त के परिणामस्वरूप 'n' घात के एक बहुपद के 'n' ही मूल होंगे।

देखें आपने कितना सीखा 9.4

निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल करें

(1) $-x^2 + x + 2 = 0$

(2) $\sqrt{3}x^2 - \sqrt{2}x + 3\sqrt{3} = 0$

(3) $x^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}x + 1 = 0$

(4) $\sqrt{5}x^2 + x + \sqrt{5} = 0$

(5) $x^2 + 3x + 5 = 0$

9.7 असमिका (असमीकरण)

इस पाठ में हम रैखिक असमिकाओं (असमीकरणों) के बारे में और चर्चा करेंगे तथा दैनिक जीवन में इनके अनुप्रयोग के बारे में अध्ययन करेंगे।

एक कथन जिसमें समानता का चिह्न (=) होता है, उसे समीकरण कहते हैं।

इसी प्रकार एक कथन जिसमें असमिका का चिह्न $<, >, \leq$, या $\geq$ हो, एक असमिका कहलाता है।

असमिकाओं के कुछ उदाहरण हैं :

(i) $2x + 5 > 0$

(ii) $3x - 7 < 0$

(iii) $ax + b \geq 0, a \neq 0$

(iv) $ax + b \leq c, a \neq 0$

(v) $3x + 4y \leq 12$

(vi) $x^2 - 5x + 6 < 0$

(vii) $ax + by + c \geq 0$

(v) तथा (vii) दो चरों में असमीकरण हैं तथा शेष सभी एक चर में असमीकरण हैं। (i) से (v) तक तथा (vii) रैखिक असमीकरण हैं जबकि (vi) एक द्विघात असमीकरण है।

इस पाठ में हम केवल एक या दो चरों में असमीकरणों के बारे पढ़ेंगे।

9.8 एक या दो चरों में रैखिक असमिकाओं के हल

एक असमिका को हल करने का अर्थ है कि चर (चरों) का मान (के मान) ज्ञात करना, जिन्हें जब असमिका में रखें तो वह सन्तुष्ट हो जाए।

उदाहरणार्थ कथन (i) में असमिका $2.60x<30$ के $x \leq 11$ सभी मान इसके हल हैं! (x पूर्ण संख्या है)

असमिका $2x + 16>0$, जहाँ कि x एक वास्तविक संख्या है, -8 से बड़ी सभी संख्याएँ x का मान हो सकती हैं तथा इसके हल हैं।

दो चरों में रैखिक असमिका $ax + by + c \geq 0$, के लिए हमें x तथा y के मानों के युग्म ज्ञात करने होंगे जिनके लिए असमिका सत्य हो।

आइए निम्न स्थिति पर विचार करें :

अनिल के पास 60 रु. हैं तथा वह एक दुकान से पेन और पेन्सिलें खरीदना चाहता है। एक पेन का मूल्य 5 रु तथा एक पेन्सिल का मूल्य 3 रु है। यदि x पेनों की संख्या, तथा y पेंन्सिलों की संख्या, जो अनिल खरीदता है, को दर्शाता हो, तो हमारे पास असमिका $5x + 3y \leq 60$ है ... (i)

यहाँ पर $x = 6$, $y = 10$ असमिका (i). का एक हल है इस प्रकार $x = 5$, $y = 11$; $x = 4$, $y = 13$; $x = 10$, $y = 3$ असमिका के कुछ हल हैं।

असमिका हल करते समय हम निम्न नियमों का पालन करते हैं :

1. एक असमिका के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ी (या घटाई) जा सकती है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तब $a + c > b + c$ तथा $a - c > b - c$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तब $a + d \leq b + d$ तथा $a - d \leq b - d$

2. असमिका के दोनों पक्षों को एक धनात्मक संख्या से गुणा (या भाग) किया जा सकता है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तथा $c > 0$ तब $ac > bc$ और $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तथा $c > 0$ तब $ac \leq bc$ और $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

3. जब एक असमिका के दोनों पक्षों को एक ऋणात्मक संख्या से गुणा किया जाए तो असमिका का चिह्न बदल जाता है।

   इस प्रकार (i) यदि $a > b$ तथा $d < 0$ हो, तो $ad < bd$ और $\frac{a}{d} < \frac{b}{d}$

   तथा (ii) यदि $a \leq b$ तथा $c < 0$ हो, तो $ac \geq bc$ और $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$

9.9 एक या दो चरों में रैखिक असमिका का आलेखीय निरूपण

अनुच्छेद 9.2 में, पेनों तथा पेन्सिलों के खरीदने की समस्या को असमीकरण में परिवर्तन करने पर, हमें निम्न असमीकरण प्राप्त हुआ।

$5x + 3y \leq 60$ .... (i)

यह ध्यान रखते हुए कि x तथा y पूर्ण संख्याएँ हैं, आइए इस असमिका के सभी हल ज्ञात करें।

आरम्भ करने के लिए, माना $x = 0$.

$\therefore\ 3y \leq 60$ या $y \leq 20$,

अर्थात् $x = 0$ के संगत y के मान केवल 0,1,2,3............, 20 हो सकते हैं। इस प्रकार $x = 0$ के साथ हल हैं।

(0,0), (0,1), (0,2) ......(0, 20)

इसी प्रकार असमीकरण के अन्य हल हैं जब x = 1,2, ...12

(1,0) (1,1) (1,2) ...... (1,18)

(2,0) (2,1) (2,2) ...... (2,16)

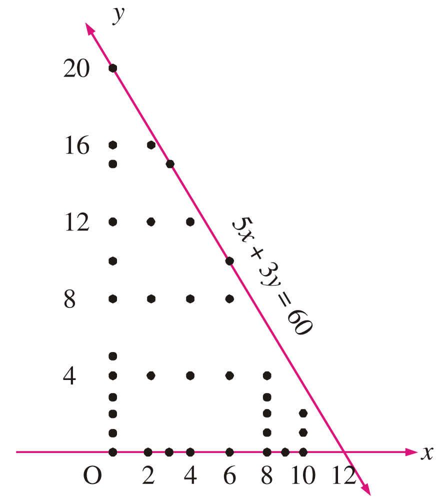
....

....

टिप्पणी

(10,0) (10,1) (10,2), (10,3)
(11,0) (11,1)
(12,0)

आप देख सकते हैं कि उपरोक्त क्रमित युग्मों में से कुछ युग्म (0,20), (3, 15), (6, 10), (9, 5), (12,0) समीकरण $5x + 3y = 60$ को सन्तुष्ट करते हैं जो कि दिए गए असमिका का भाग है तथा शेष सम्भावित हल, रेखा $5x + 3y = 60$ द्वारा xy - तल को दो भागों में विभाजित **अर्ध समतलों में से किसी एक** में स्थित हैं।



चित्र 9.1

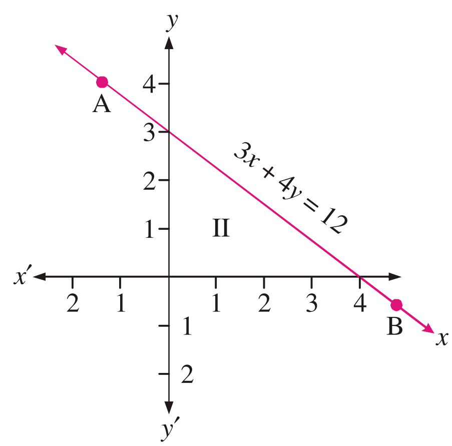
यदि हम x तथा y के प्रान्त का, पूर्ण संख्या से वास्तविक संख्याओं में विस्तार कर दें, तो असमिका $5x + 3y \leq 60$ उन दो अर्ध समतलों में से एक अर्धसमतल को, निर्धारित करेगा, जिनमें रेखा $5x + 3y = 60$, xy- तल को विभाजित करती है।

अतः हम इसे व्यापक परिणाम के रूप में इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

यदि a, b, c वास्तविक संख्याएँ हैं तब $ax + by + c = 0$ दो चरों x तथा y में एक समीकरण कहलाता है जबकि $ax + by + c \leq 0$ या $ax + by + c \geq 0$, $ax + by + c > 0$ तथा $ax + by + c < 0$ दो चरों में रैखिक असमिकाएँ कहलाती हैं।

समीकरण $ax + by + c = 0$ एक सरल रेखा है जा xy समतल को दो अर्धसमतलों में विभाजित करती है जिन्हें $ax + by + c \geq 0$ तथा $ax + by + c \leq 0$ दर्शाते हैं।

उदाहरणार्थ रेखा AB $3x + 4y - 12 = 0$, निर्देशाँक समतल को दो अर्धसमतलीय क्षेत्रों में विभाजित करती है।



चित्र 9.2

(i) रेखा AB से ऊपर का अर्धसमतल I

(ii) रेखा AB के नीचे का अर्धसमतल II एक क्षेत्र $3x + 4y - 12 \leq 0$ ...(i) को तथा दूसरा क्षेत्र $3x + 4y - 12 \geq 0$. ... (ii) को प्रदर्शित करेगा।

असमिका (i) के संगत अर्धसमतल की पहचान करने के लिए हम एक स्वेच्छ बिन्दु, अधिकतर मूल बिन्दु यदि यह रेखा AB पर न हो, लेते हैं। यदि बिन्दु असमिका (i) को सन्तुष्ट करता है, तब वह अर्धसमतल जिसमें स्वेच्छ बिन्दु है, अभीष्ट अर्धसमतल है। इस दशा में, मूल बिन्दु को स्वैच्छिक बिन्दु लेकर,

$0+0-12 \leq 0$ अर्थात् $-12 \leq 0$

इस प्रकार मूलबिन्दु असमीकरण $3x + 4y - 12 \leq 0$ को सन्तुष्ट करता है। अब मूल बिन्दु अर्धसमतल II में स्थित है। अतः असमिका $3x + 4y - 12 \leq 0$ अर्धसमतल II को दर्शाती है तथा $3x + 4y - 12 \geq 0$ अर्धसमतल I को दर्शाएगी।

उदाहरण 9.12. असमिका $x + 2y \geq 5$ द्वारा निर्धारित क्षेत्र आलेख में दर्शाइए।

हल : पहले हम संगत समीकरण $x + 2y \geq 5$ लेकर इसका आलेख खींचेंगे।

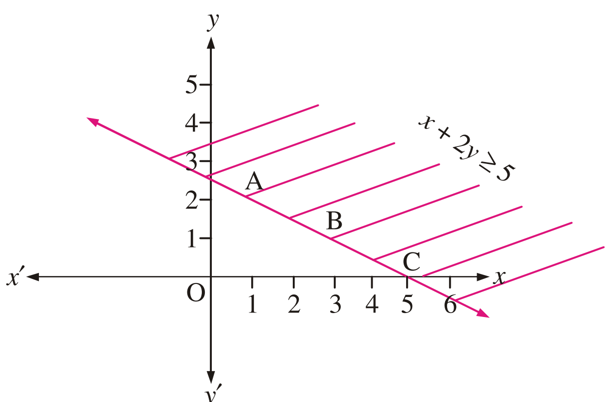
x	1	3	5
y	2	1	0

क्योंकि (0,0) रेखा AB पर नहीं है, इस लिए हम (0,0) को स्वेच्छ बिन्दु मान सकते हैं।

$\because$ $0 + 0 \geq 5$ सत्य नहीं है।

$\therefore$ अभीष्ट अर्धसमतल वह है जिसमें मूलबिन्दु नहीं है।

अभीष्ट अर्धसमतल को चित्र 9.3 में छायांकित किया गया है।



चित्र 9.3

अन्य उदाहरण लेने से पहले, हम निम्न को परिभाषित करते हैं :

(i) **संवृत अर्धसमतल** : एक अर्धसमतल को संवृत अर्धसमतल कहा जाता है कि उस रेखा के सारे बिन्दु, जो दो अर्धसमतलों को अलग करती है, असमीकरण के हल में सम्मिलित हैं। उदाहरण 6.1 में अर्धसमतल संवृत अर्धसमतल है।

(ii) **विवृत (खुला) अर्धसमतल** : $x\,y$ समतल में एक अर्धसमतल को विकृत अर्धसमतल कहा जाता है यदि अर्धसमतलों को अलग करने वाली रेखा के बिन्दुओं को अर्धसमतल में सम्मिलित न किया जाए।

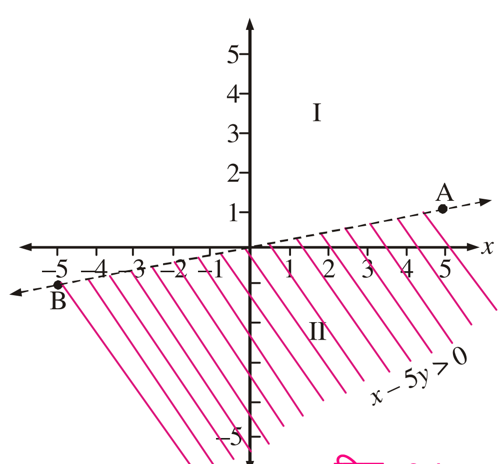
उदाहरण 9.13. असमिका $x - 5y > 0$ का आलेख खींचिए।

हल : दी गई असमिका है: $x - 5y > 0$

संगत समीकरण है : $x - 5y = 0$

हम निम्न सारणी बनाते हैं :

x	0	5	–5
y	0	1	–1



चित्र 9.4

टिप्पणी

रेखा AOB, xy समतल को दो अर्धसमतलों I तथा II में विभाजित करती है। क्योंकि रेखा AOB मूल बिन्दु से गुजरती है हम कोई अन्य बिन्दु, माना (3,4) स्वेच्छ बिन्दु लेते हैं। आइए देखें कि क्या यह असमीकरण $x - 5y > 0$ संतुष्ट करता है।

अब $3 - 5\ (4) > 0$ या $3 - 20 > 0$, या $-17 > 0$, जो कि सत्य नहीं है।

$\therefore$ अभीष्ट अर्धसमतल II है।

क्योंकि असमिका पूर्ण असमिका $x - 5y > 0$ है

$\therefore$ रेखा AOB आलेख का भाग नहीं है

अतः इस रेखा को बिन्दुदार रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

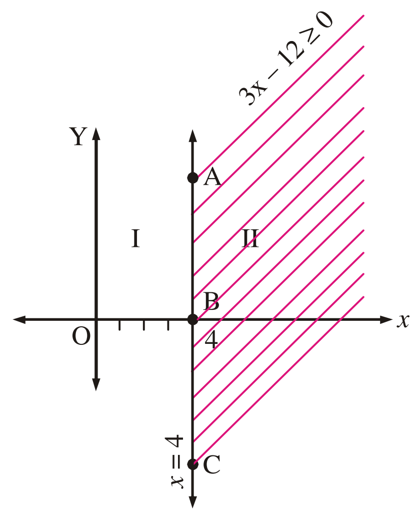
अतः दी गई असमिका का आलेख रेखा AOB को छोड़कर छायांकित क्षेत्र है।

उदाहरण 9.14

असमिका $3x - 12 \geq 0$ को आलेख द्वारा निरूपित कीजिए।

हल : दी गई असमिका $3x - 12 \geq 0$ है। इसके संगत समीकरण $3x-12 = 0$ या $x - 4 = 0$ या $x = 4$ है जिसे xy तल में रेखा ABC द्वारा दर्शाया गया है। (चित्र 9.5).

(0,0) को स्वैच्छिक बिन्दु लेकर, हम देख सकते हैं कि $0 \neq 4$ अतः अर्धसमतल II असमिका $3x - 12 \geq 0$ को दर्शाता है।



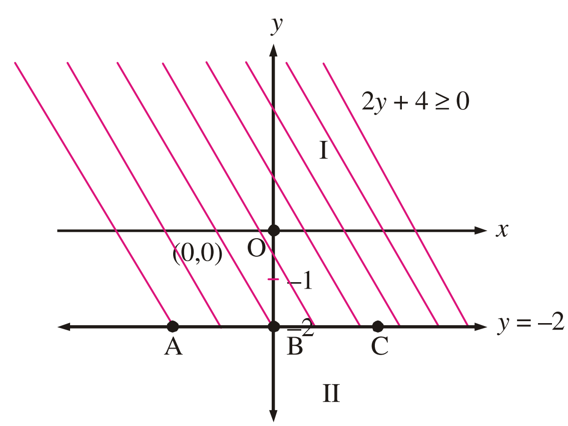
चित्र 9.5

उदाहरण 9.15. असमिका $2y + 4 \geq 0$ को आलेखीय विधि द्वारा हल कीजिए।

हल : असमिका $2y + 4 \geq 0$ के संगत समीकरण $2y + 4 = 0$ या $y = -2$ है।

रेखा ABC समीकरण $y = -2$ को दर्शाती है तथा xy समतल को दो अर्धसमतलों में विभाजित करती है।

$2y + 4 \geq 0$ अर्धसमतल I को दर्शाती है!



चित्र 9.6

देखें आपने कितना सीखा 9.5

द्विविम तल में निम्नलिखित असमिकाओं में से प्रत्येक के हल आलेखीय विधि से दर्शाइए :

1.	$2x + y \geq 8$	2.	$x - 2y \leq 0$
3.	$3x + 6 \geq 0$	4.	$8 - 2y \geq 2$
5.	$3y \geq 6 - 2x$	6.	$3x \geq 0$
7.	$y \leq 4$	8.	$y > 2x - 8$

9. $-y < x - 5$ 10. $2y \leq 8 - 4x$

9.10 दो चरों में रैखिक असमिका निकाय के आलेखीय हल

आप पहले ही जानते हैं कि दो चरों में रैखिक समीकरण निकाय को कैसे हल किया जाता है।

अब आप दो चरों में रैखिक असमिका को आलेख द्वारा हल करना सीख चुके हैं। अब हम युगपत रैखिक असमिका निकाय को हल करने की विधि पर चर्चा करेंगे। युगपत रैखिक असमिका निकाय के हल का अर्थ सभी क्रमित (x, y) ज्ञात करना है, जिनके लिए निकाय की प्रत्येक रैखिक असमिका संतुष्ट हो।

रैखिक असमिका निकाय का या तो कोई भी हल नहीं होगा या उसके ऐसे अनन्त हल होंगे, जो रैखिक समीकरणों की संगत रेखाओं से सम्बन्धित सीमित या असीमित क्षेत्र दर्शाता है।

इस विधि को स्पष्ट करने के लिए हम निम्न उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 9.16. आलेखीय विधि से निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए:

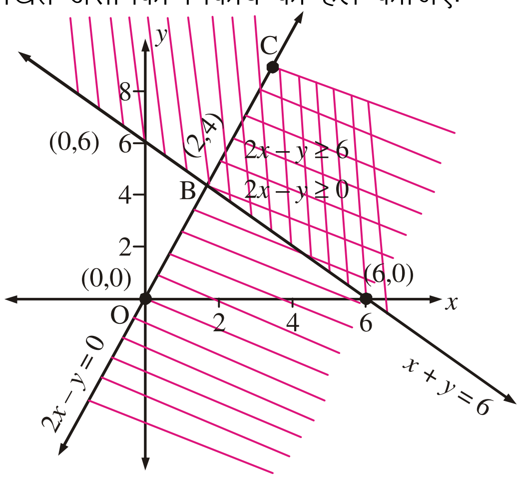
$$x + y \geq 6, \qquad 2x - y \geq 0.$$

हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

$x + y \geq 6$ ..... (i)

तथा $2x - y \geq 0$ ..... (ii)

हम रेखाओं $x + y = 6$ तथा $2x - y = 0$ के आलेख खींचते हैं (चित्र. 9.7)



चित्र 9.7

असमिका (i) रेखा $x + y = 6$ के ऊपर छायांकित क्षेत्र को निरूपित करती है तथा असमिका (ii) रेखा $2x - y = 0$ के दाईं ओर के क्षेत्र को निरूपित करती है।

चित्र 9.7 में, दोहरा छायांकित उभयनिष्ठ क्षेत्र दिए गए असमिका निकाय का हल है।

उदाहरण 9.17. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$x + y \leq 5, \qquad 4x + y \geq 4, \qquad x + 5y \geq 5, \qquad x \leq 4, \;\; y \leq 3.$$

हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

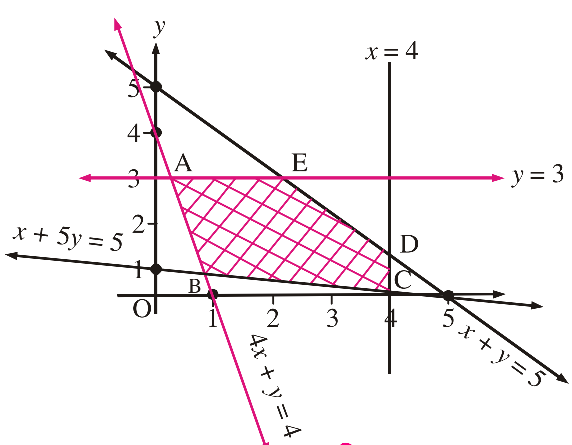
$x + y \leq 5$ ..... (i)

$4x + y \geq 4$ ..... (ii)

$x + 5y \geq 5$ ..... (iii)

$x \leq 4$ ..... (iv)

तथा $y \leq 3$ ..... (v)



चित्र 9.8

हम रेखाओं $x + y = 5$, $4x + y = 4$, $x + 5y = 5$, $x = 4$ तथा $y = 3$ के आलेख खींचते हैं (चित्र. 6.8)

असमिका (i) रेखा $x + y = 5$ के नीचे के क्षेत्र को निरूपित करती है। असमिका (ii) समीकरण 4x + y = 4 के दाईं ओर के क्षेत्र को निरूपित करती है। समीकरण $x + 5y = 5$ के ऊपर के क्षेत्र को असमिका (iii). निरूपित करती है। इसी प्रकार (iv) तथा (v) के क्षेत्रों को छायांकित कर हम उभयनिष्ठ क्षेत्र **ABCDE** प्राप्त करते हैं (चित्र 9.8)। इस क्षेत्र के सारे बिन्दु दिए गए समीकरण निकाय के हल को संतुष्ट करते हैं तथा इसलिए दिए गए निकाय के हल को प्रदर्शित करते हैं।

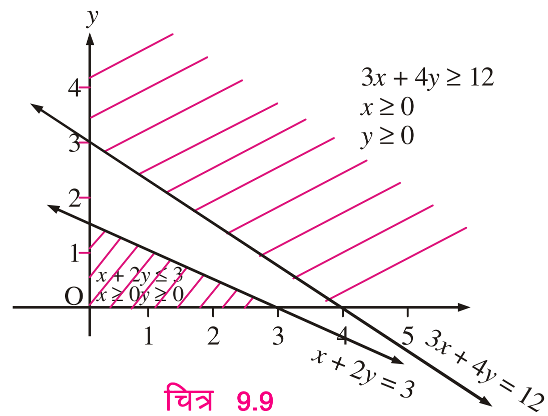
उदाहरण 9.18. आलेखीय विधि से निम्नलिखित असमिका निकाय को हल कीजिए :

$x + 2y \le 3,\ 3x + 4y \ge 12,\ x \ge 0,\ y \ge 0.$

हल : हम असमिकाओं $x + 2y \le 3$, $3x + 4y \ge 12, x \ge 0, y \ge 0$ के संगत क्षेत्रों को छायांकित कर इनके आलेख को दिखाते हैं।

हम पाते है कि कोई उभयनिष्ठ क्षेत्र नहीं है।

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दिए गए रैखिक असमिका निकाय का कोई हल नहीं है।



चित्र 9.9

उदाहरण 9.19. निम्नलिखित रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

$$x - y < 2,\ 2x + y < 6;\ x \ge 0,\ y \ge 0.$$

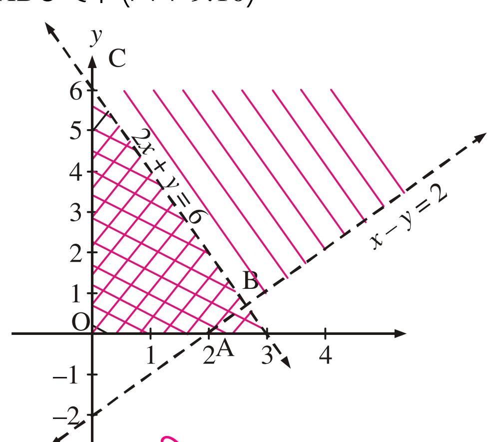
हल : दी गई असमिकाएँ हैं :

$x - y < 2$ ... (i)

$2x + y < 6$ ... (ii)

$x \ge 0\ ;\ y \ge 0$ ... (iii)

असमिकाओं $x - y < 2$, $2x + y < 6$, $x \ge 0$ तथा $y \ge 0$ को ग्राफ पर निरूपित करने के बाद हम पाते हैं कि उभयनिष्ठ क्षेत्र $OABC$ है। (चित्र 9.10)



चित्र 9.10

देखें आपने कितना सीखा 9.6

निम्नलिखित में प्रत्येक दो चरों में रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

1. $x \geq 3,\ y \geq 1.$
2. $y \geq 2x, y \leq 2.$
3. $2x + y - 3 \geq 0, x - 2y + 1 \leq 0.$
4. $3x + 4y \leq 12, 4x + 3y \leq 12,\ x \geq 0,\ y \geq 0$
5. $2x + 3y \geq 3, 3x + 4y \leq 18,\ 7x - 4y + 14 \geq 0,\ x - 6y \leq 3,\ x \geq 0, y \geq 0$
6. $x + y \geq 9, 3x + y \geq 12, x \geq 0,\ y \geq 0$
7. $x + y \geq 1; 2x + 3y \leq 6, x \geq 0, y \geq 0.$
8. $x + 3y \geq 10; x + 2y \leq 3, x - 2y \leq 2, x \geq 0 ; y \geq 0$

आइये दोहराएँ

- यदि D < 0, तो द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल सम्मिश्र तथा परस्पर संयुग्मी होते हैं।
- यदि द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल α, β हों, तो $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ तथा

  $\alpha\,\beta = \dfrac{c}{a}$
- यदि α तथा β किसी द्विघात समीकरण के मूल हैं तो वह द्विघात समीकरण होगाः

  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$
- एक समीकरण के मूलों की अध्कितम संख्या, उस समीकरण की घात के बराबर होता है।
- एक कथन जिसमें चिह्न $<, >, \leq, \geq$, एक असमिका कहलाता है।
- समीकरण $ax + by + c = 0$ एक सरल रेखा है जो xy तल को दो अर्धतलों में विभाजित करता है जो कि $ax + by + c \geq 0$ तथा $ax + by + c \leq 0$ द्वारा निरूपित होते हैं।
- रैखिक असमिका निकाय के हल का अर्थ है कि सभी क्रमित युग्म (x, y) ज्ञात करना जो निकाय की प्रत्येक रैखिक असमिका को सन्तुष्ट करते हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=lSwG-S7tLFo*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Tq0mCZxjKXk*
- *https://www.youtube.com/watch?v=rwTwKsxkTRI*
- *https://www.youtube.com/watch?v=5jSuC-sxe74*
- *https://www.youtube.com/watch?v=gmONf1mcEXA*

आइए अभ्यास करें

1. यदि $a \neq b$, तो दर्शाइये कि समीकरण

   $2(a^2 + b^2)x^2 + 2(a + b)x + 1 = 0$ के मूल काल्पनिक होंगे।

2. यदि समीकरण $ax^2 + b(2x + 1) = 0$ के मूल काल्पनिक हों, तो दर्शाइये कि समीकरण

   $bx^2 + (b - c)x = c + a - b$ के मूल सर्वदा वास्तविक होंगे।

3. यदि समीकरण $2x^2 - 6x + 5 = 0$ के मूल α, β हों, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल हैं:

   (i) $\dfrac{\alpha}{\beta}, \dfrac{\beta}{\alpha}$ (ii) $\alpha + \dfrac{1}{\beta}, \beta + \dfrac{1}{\alpha}$ (iii) $\alpha^2 + \beta^2, \dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$

4. $x \geq -2$ 5. $y \leq 2.$ 6. $x < 3$ 7. $y \geq -3$

8. $5 - 3y \geq -4$ 9. $2x - 5 \leq 3.$ 10. $3x - 2y \leq 12$ 11. $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{5} \geq 1.$

12. $2x - 3y \geq 0$ 13. $x + 2y \leq 0.$

निम्नलिखित दो चरों में रैखिक असमिका निकाय को आलेखीय विधि से हल कीजिए :

14. $-1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 4.$

15. $2x + 3y \leq 6,\ 3x + 2y \leq 6.$

16. $6x + 5y \leq 150,$

    $x + 4y \leq 80$

    $x \leq 15, x \geq 0, y \geq 0.$

17. $3x + 2y \leq 24, x + 2y \leq 16$

    $x + y \leq 10, x \geq 0, y \geq 0$

18. $x + y \geq 3,\ 7x + 6y \leq 42$

    $x \leq 5, \quad y \leq 4$

    $x \geq 0, \quad y \geq 0$

19. $\dfrac{3(x-2)}{5} \leq \dfrac{5(2-x)}{3}$

20. $37 - (3x + 5) \geq 9x - 8(x - 3)$

21. $\dfrac{(2x-1)}{3} \geq \dfrac{(3x-2)}{4} - \dfrac{(2-x)}{5}$ 22. $5x + 1 > -24,\ 5x - 1 < 24$

23. $3x - 7 > 2(x - 6),\ 6 - x > 11 - 2x$

24. $5(2x - 7) - 3\,(2x + 3) \leq 0,\ 2x + 19 \leq 6x + 47$

25. 8% बोरिक अम्ल के एक विलयन में 2% बोरिक अम्ल को मिलाकर अम्लीय मात्रा को कम किया गया। प्राप्त मिश्रण में बोरिक अम्ल 2% से अधिक तथा 4% से कम होना चाहिए। यदि हमारे पास 8% बोरिक अम्ल का 640 लीटर विलयन हो तो उसमें कितने लीटर 2% बोरिक अम्ल का विलयन मिलाना होगा?

26. 45% अम्लीय मात्रा के 1125 लीटर विलयन में कितने लीटर पानी मिलाएं कि प्राप्त विलयन में अम्ल की मात्रा 25% से अधिक तथा 30% से कम हो?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 9.1

1. (i) $-2\sqrt{3},\ \dfrac{-4}{\sqrt{3}}$ (ii) $a - \sqrt{b},\ a + \sqrt{b}$

   (iii) $-\dfrac{ab}{c},\ \dfrac{c}{ab}$ (iv) $3\sqrt{2},\ \sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 9.2

1. (i) $\dfrac{3 \pm \sqrt{15}\,i}{4}$ (ii) $\dfrac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

   (iii) $\dfrac{\sqrt{5} \pm \sqrt{43}\,i}{8}$ (iv) $\dfrac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{58}\,i}{6}$

2. $-1,\ \dfrac{1}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 9.3

1. (i) $\dfrac{b^2 - 2ac}{c^2}$ (ii) $\dfrac{(b^2 - 2ac)^2 - 2a^2c^2}{c^4}$

2. (i) $25x^2 - 6x + 9 = 0$ (ii) $625x^2 - 90x + 81 = 0$

4. $q^2 - 5p^2 = 0$

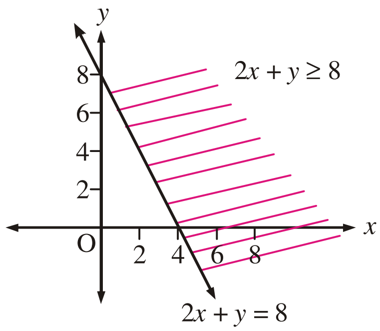
देखें आपने कितना सीखा 9.4

1. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$ 2. $\dfrac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}i}{2}$ 3. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2\sqrt{2}}$

4. $\dfrac{-1 \pm \sqrt{19}i}{2}$ 5. $\dfrac{-3 \pm \sqrt{11}i}{2}$

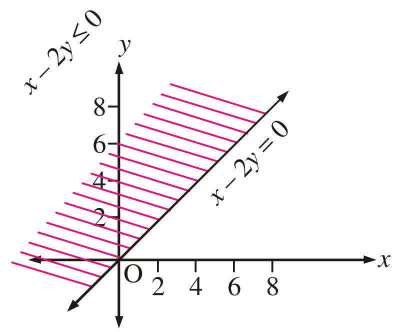
देखें आपने कितना सीखा 9.5

1.



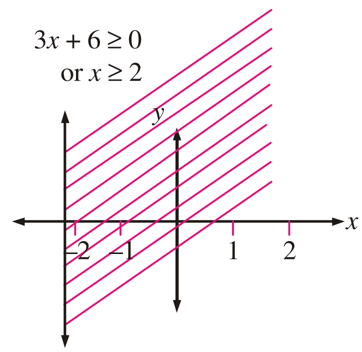
चित्र 9.11

2.



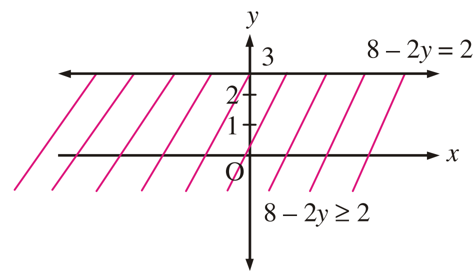
चित्र 9.12

3.



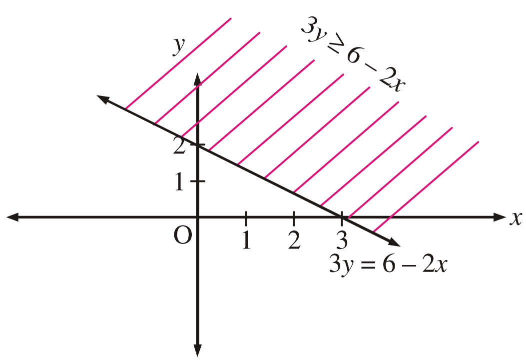
चित्र 9.13

4.



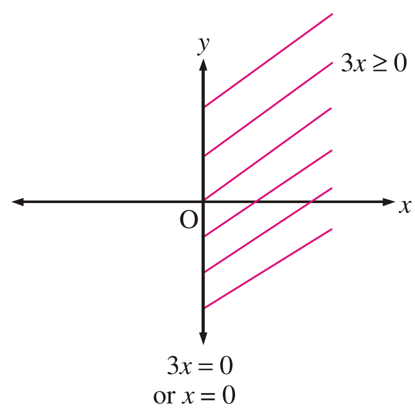
चित्र 9.14

5.



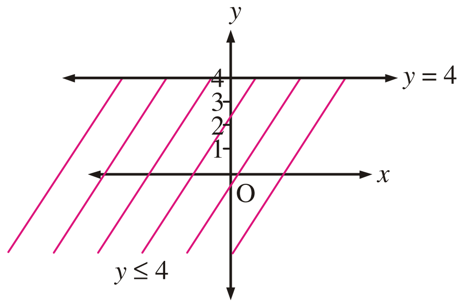
चित्र 9.15

6.



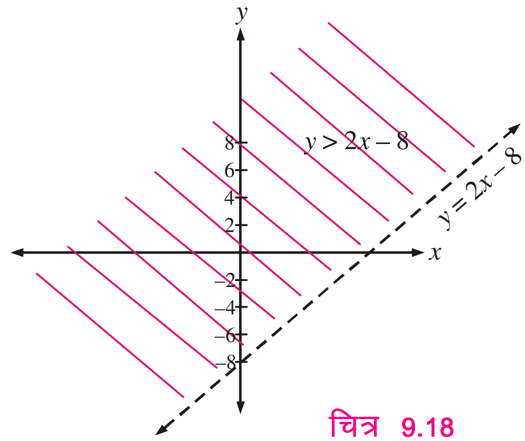
चित्र 9.16

7.



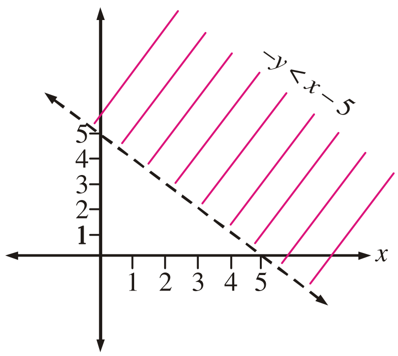
चित्र 9.17

8.



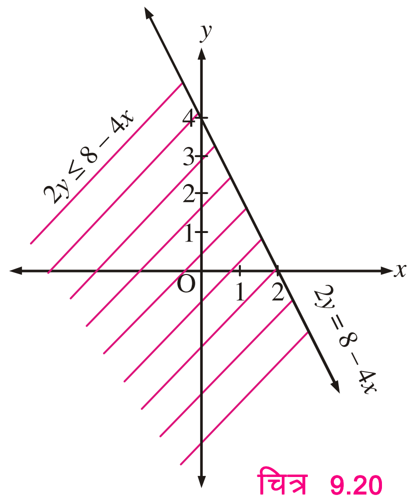
चित्र 9.18

9.



चित्र 9.19

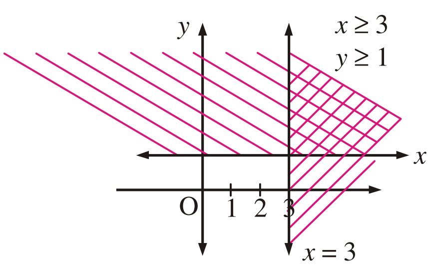
10.



चित्र 9.20

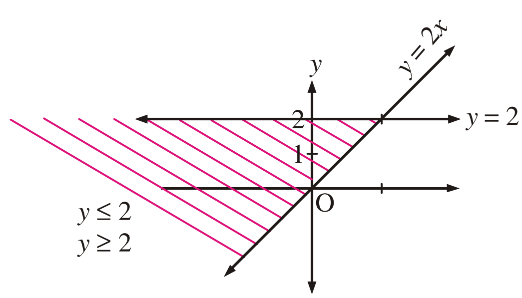
देखें आपने कितना सीखा 9.6

1.



चित्र 9.21

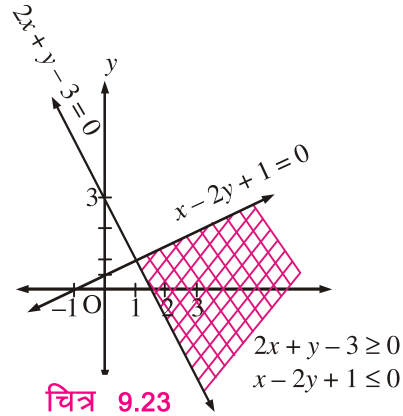
2.



चित्र 9.22

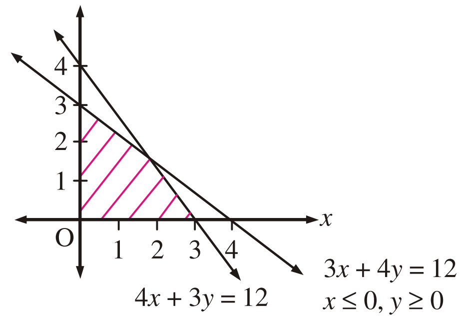
टिप्पणी

3.



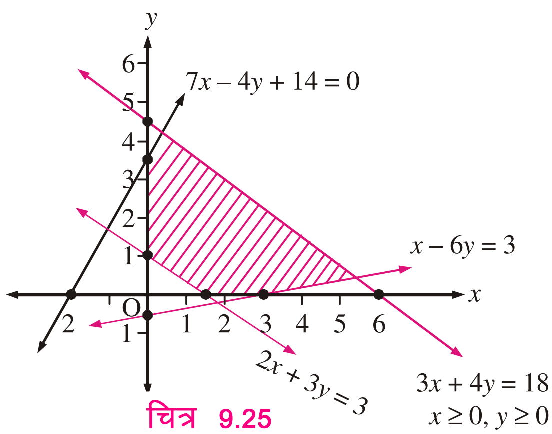
चित्र 9.23

4.



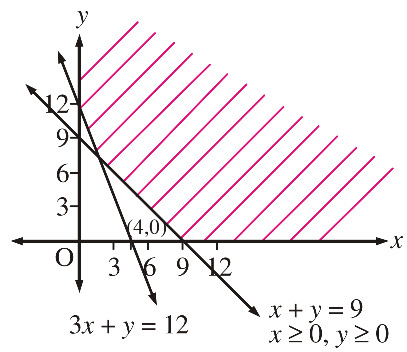
चित्र 9.24

5.



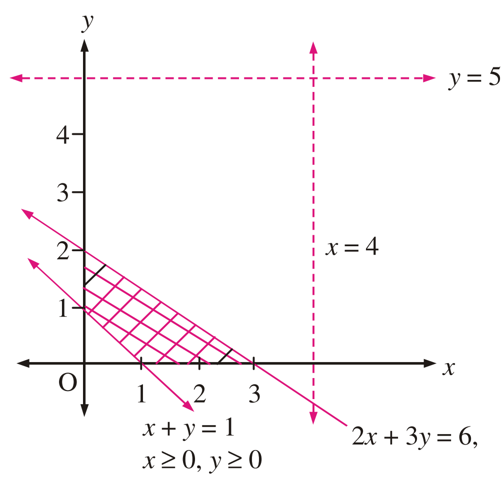
चित्र 9.25

6.



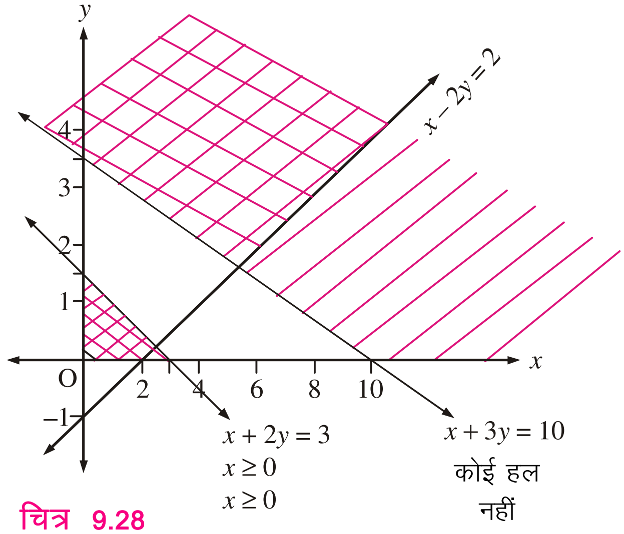
चित्र 9.26

7 .



चित्र 9.27

8.

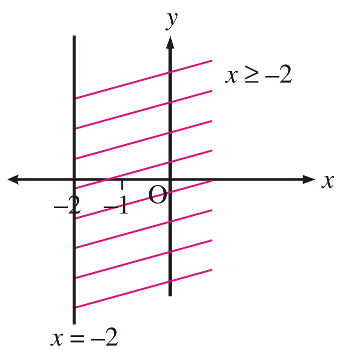


चित्र 9.28

आइए अभ्यास करें

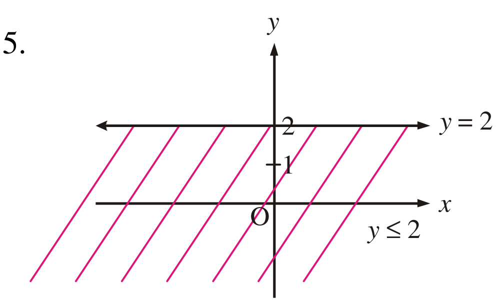
3. (i) $5x^2 - 8x + 5 = 0$ (ii) $10x^2 - 42x + 49 = 0$ (iii) $25x^2 - 116x + 64 = 0$

4.



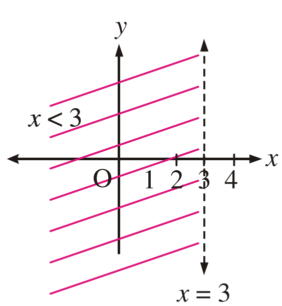
चित्र 9.29

5.



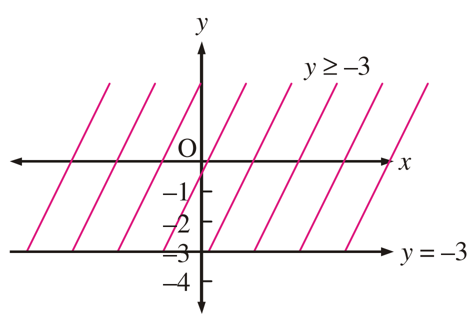
चित्र 9.30

6.



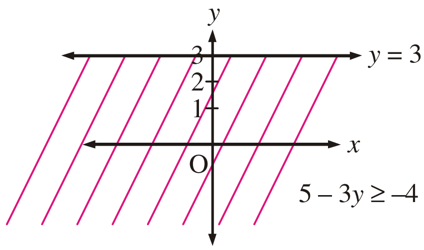
चित्र 9.31

7.



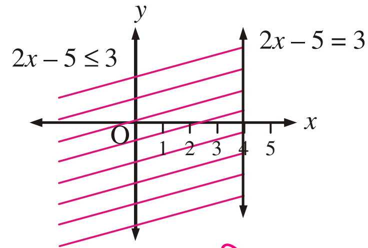
चित्र 9.32

8.



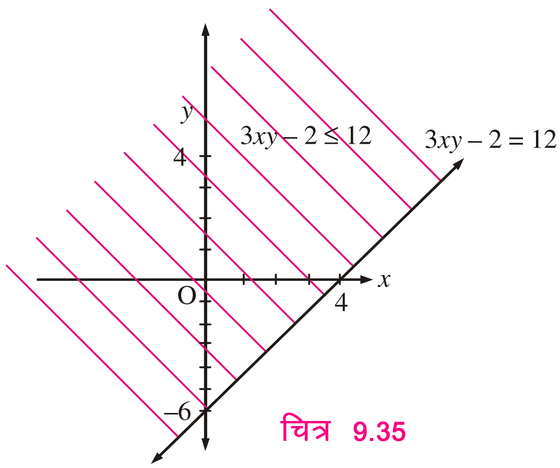
चित्र 9.33

9.



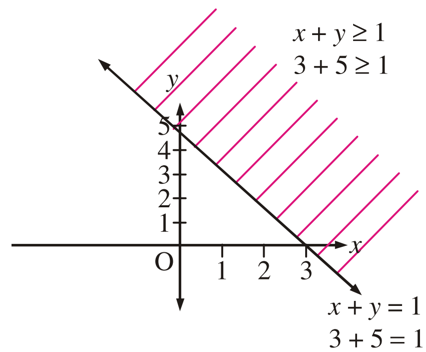
चित्र 9.34

10.



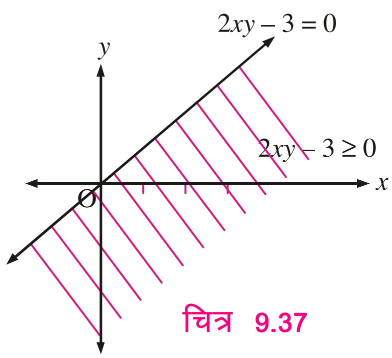
चित्र 9.35

11.



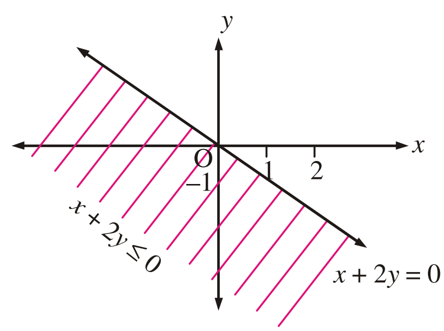
चित्र 9.36

12.



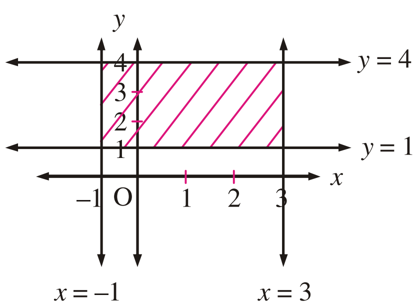
चित्र 9.37

13.



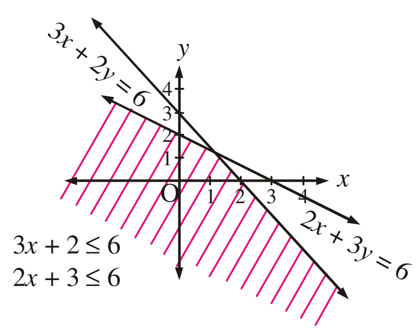
चित्र 9.38

14.



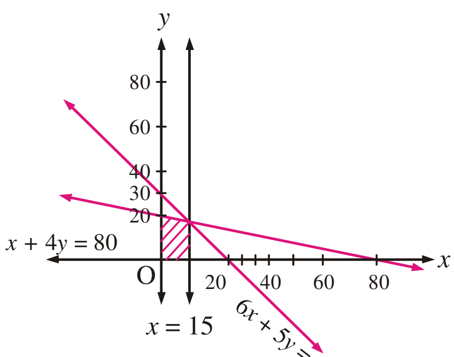
चित्र 9.39

15.



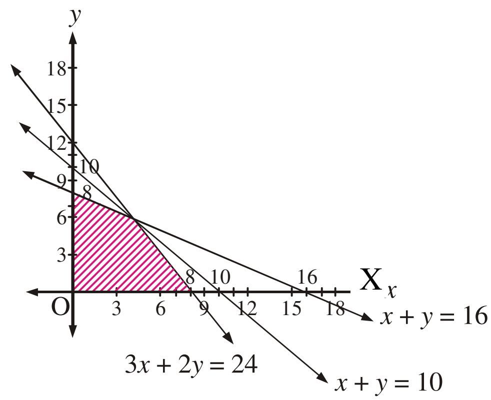
चित्र 9.40

16.



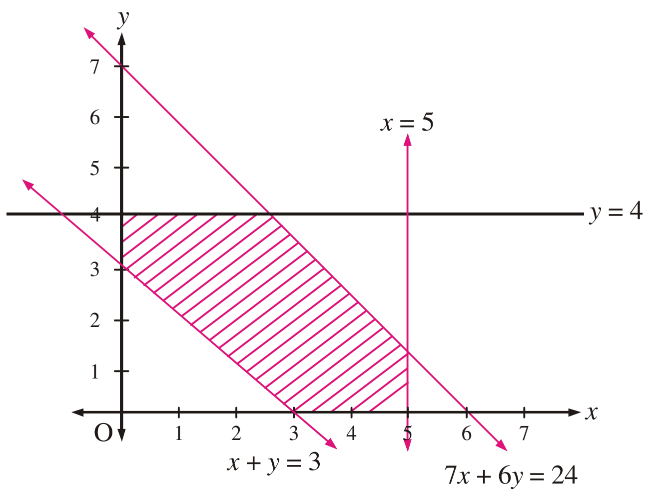
चित्र 9.41

17.



चित्र 9.42

18.



चित्र 9.43

19. $(-\infty, 2)$

20. $(-\infty, 2)$

21. $(-\infty, 2)$

22. $(-5, 5)$

23. $(5, \infty)$

24. $(-7, 11)$

25. 320 लीटर से अधिक तथा 1280 लीटर से कम

26. 562.5 लीटर से अधिक तथा 900 लीटर से कम

10

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

आप अपने दैनिक जीवन में परिस्थिति के अनुसार विविध प्रकार के तर्कों, का प्रयोग करते हैं। उदाहरणार्थ, यदि आप को यह ज्ञात हुआ हो कि आप के मित्र के यहाँ सन्तान पैदा हुई, तो आप जानना चाहेंगे कि वह पुत्री है अथवा पुत्र। यहाँ आप एक विशेष स्थिति के लिए सामान्य सिद्धान्तों का उपयोग करेंगे। इस प्रकार का तर्क निगमन तर्क का उदाहरण है।

आइए, अब हम एक दूसरी स्थिति पर विचार करें। जब आप अपने आसपास देखते हैं तो ज्ञात होता है कि विद्यार्थी नियमित रूप से पढ़ते हैं, वे परीक्षा में अच्छा करते हैं। आप इससे सामान्य नियम (विचारधारा) (गलत या सही) बना सकते हैं कि ''जो भी नियमित रूप से पढ़ेगा, परीक्षा में अच्छा करेगा।'' इस में आप अनेक विशिष्ट उदाहरणों द्वारा सामान्य नियम बिनाएँगे। ऐसा तर्क आगमनिक (inductive) कहलाता हैं, जो तर्क की एक ऐसी प्रक्रिया है, जिसमें अनेक विशिष्ट स्थितियों के व्यक्तिगत प्रेक्षणों तथा विचारों द्वारा व्यापक नियमों का पता लगाया जाता है। ऐसे तर्क का उपयोग विज्ञान तथा गणित में किया जाता है।

गणितीय आगमन इस प्रक्रिया का और अधिक यथार्थ रूप है। ऐसी यथार्थता की आवश्यकता होती है, क्योंकि कोई कथन गणित के अनुसार तभी सत्य माना जाता है जब प्रत्येक स्थिति में, जिसके संदर्भ में वह है, उस की सत्यता दर्शाई जा सके। इस पाठ में हम सर्वप्रथम कथन से आपका परिचय करवायेंगे और उसके पश्चात् गणितीय आगमन के सिद्धान्त से परिचित होकर इसकी सहायता से विभिन्न गणितीय कथनों को सिद्ध करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे:

- यह बता पाना कि दिया हुआ वाक्या कथन है अथवा नहीं हैं।
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त का कथन देना
- कथन $P(n)$ को $n = 1$ के लिए सत्यापित करना
- यदि कथन $P(k)$ सत्य हो, तो कथन $P(k+1)$ को सत्यापित करना
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा कुछ गणितीय कथनों को सिद्ध करना

पूर्व ज्ञानः

- संख्या निकाय
- संख्याओं तथा व्यजकों पर चार मूल–भूत संक्रियाएँ।

10.1 कथन क्या है?

आप अपने दैनिक व्यवहार में बहुत सी बातें वाक्यों के रूप में करते हैं। इन वाक्यों में से वे, जो या तो सत्य या असत्य होते हैं, उन्हें **कथन** या **साध्य** कहते हैं। उदाहरणार्थ,

''मैं बीस वर्ष का हूँ,'' और यदि $x = 3$, तो $x^2 = 9$'' कथन हैं; परन्तु ''आप कब जाएँगे?'' तथा ''कितना आश्चर्यजनक!'' कथन नहीं हैं।

ध्यान दीजिए कि कथन एक निश्चित वाक्य होता है, जो या तो सत्य होता है या असत्य, दोनों एक साथ नहीं। उदाहरणार्थ '$x - 5 = 7$' कथन नहीं है क्योंकि हम नहीं जानते कि x का मान क्या है। यदि $x = 12$ है तो यह सत्य है परन्तु यदि $x = 5$ है, तो यह असत्य है। अतः '$x - 5 = 7$' को गणितज्ञों ने कथन नहीं माना।

परन्तु ''$x - 5 = 7 \Rightarrow x = 12$'' तथा सभी वास्तविक x के लिए $x - 5 = 7$ दोनों कथन हैं। इनमें से प्रथम सत्य तथा द्वितीय असत्य है।

उदाहरण 10.1. निम्नलिखित में से कौन से वाक्य कथन हैं?

(i) भारत का राष्ट्रपति कभी महिला नहीं रही।

(ii) 5 सम संख्या है।

(iii) $x^n > 1$

(iv) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

हल : (i) और (ii) कथन हैं (i) सत्य है और (ii) असत्य है। (iii) कथन नहीं है क्योंकि जब तक x और y के मानों का परास ज्ञात नहीं है, हम उस की सत्यता या असत्यता निर्धारित नहीं कर सकते।

अब (iv) को देखिए। प्रथम दृष्टि में यह कथन नहीं लगेगा, जिस आधार पर (iii) नहीं है। परन्तु ध्यान से (iv) को देखिए। a तथा b के सभी मानों के लिए यह सत्य है। यह एक सर्वसमिका है। यद्यपि यहाँ a और b के मानों का परास नहीं दिया गया है, तब भी (iv) एक कथन है।

कुछ कथन, जैसा एक नीचे दिया गया है, सामान्यतः प्राकृत संख्याओं के लिए हैं। आइए नीचे दिए गए कथन पर विचार करें।

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

यह प्राकृत संख्या n से सम्बद्ध है। हम इस कथन को P (n) कहेंगे। (यहाँ P साध्य को सूचित करता है।)

तब P (1) होगा : $1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$

इसी प्रकार P (2) होगा : $1 + 2 = \dfrac{2(2+1)}{2}$ इत्यादि

आपको इस संकेत चिह्न से भलीभाँति अभ्यस्त कराने के लिए हम कुछ और उदाहरणों पर विचार करते हैं:

उदाहरण 10.2. यदि P (n) '$2^n > n-1$' को व्यक्त करता है तो P (1), P (k) तथा P (k+1) लिखिए जहाँ $k \in N$ ।

हल : n के स्थान पर क्रमशः 1, k तथा $k + 1$, रखने पर हम प्राप्त करते हैं :

$P(1): 2^1 > 2 - 1$, अर्थात् $2 > 1$

$P(k): 2^k > k - 1$

$P(k+1): 2^{k+1} > (k+1) - 1$, अर्थात् $2^{k+1} > k$

उदाहरण 10. 3. यदि P (n) नीचे लिखा कथन है :

'$1 + 4 + 7 + (3n - 2) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$',

तो $P(1)$, $P(k)$ और $P(k+1)$ लिखिए।

हल : $P(1)$ लिखने के लिए, $P(n)$ के बायें पक्ष में जब n के स्थान पर 1 लिखते हैं तो अन्तिम पद $3 \times 1 - 2$, प्राप्त होता है जो पहला पद है, अर्थात् बायें पक्ष में केवल एक पद ही है जो प्रथम पद है।

$P(1)$ का दायाँ पक्ष $= \dfrac{1 \times (3 \times 1 - 1)}{2} = 1$

अतः $P(1)$ '1 = 1' है।

n के स्थान पर 2 रखने पर हम प्राप्त करते हैं,

$P(2): 1 + 4 = \dfrac{2 \times (3 \times 2 - 1)}{2}$, अर्थात् $5 = 5$.

n के स्थान पर क्रमशः k तथा $k + 1$, रखने पर हमे प्राप्त होता है :

$$P(k): 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) = \frac{k(3k-1)}{2}$$

$$P(k+1): 1 + 4 + 7 + ... + (3k - 2) + [3(k+1) - 2] = \frac{(k+1)[3(k+1)-1]}{2}$$

अर्थात् $1 + 4 + 7 + ... + (3k + 1) = \dfrac{(k+1)[(3k+2)}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. निम्नलिखित में से कौन–कौन से कथन हैं?

   (a) $1 + 2 + 4 \quad .... + 2^n > 20$ (b) $1 + 2 + 3 + ... + 10 = 99$

   (c) चेन्नई मुम्बई की तुलना में अधिक सुन्दर है (d) ताजमहल कहाँ है?

   (e) $\dfrac{1}{1 \times 2} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$, $n = 5$ के लिए (f) $\operatorname{cosec}\theta < 1$

2. दिया है कि $P(n) : n^3 + 5n$ का 6 एक गुणनखण्ड है। $P(1), P(2), P(k)$ तथा $P(k+1)$ लिखिए जबकि k एक प्राकृत संख्या है।

3. $P(1), P(k)$ और $P(k+1)$, लिखिए यदि $P(n)$ है :

   (a) $2^n \geq n + 1$ (b) $(1 + x)^n \geq 1 + nx$

   (c) $n(n+1)(n+2)$, 6 से विभाज्य है। (d) $(x^n - y^n)$, $(x - y)$ से विभाज्य है।

   (e) $(ab)^n = a^n b^n$ (f) $\left(\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

4. $P(1), P(2), P(k)$ तथा $P(k+1)$, लिखिए यदि $P(n)$ निम्न है :

   (a) $\dfrac{1}{1 \times 2} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ (b) $1 + 3 + 5 + \ldots\ldots + (2n - 1) = n^2$

   (c) $(1 \times 2) + (2 \times 3) + \ldots. + n(n+1) < n(n+1)^2$

   (d) $\dfrac{1}{1 \times 3} + \dfrac{1}{3 \times 5} + \ldots \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$

ऐसे कथनों, जो उदाहरण 10.2 तथा 10.3 में दिए हुए हैं, की सत्यता अथवा असत्यता की आप जाँच कैसे करेंगे? एक प्रभावशाली विधि गणितीय आगमन है, जिसकी अब हम चर्चा करेंगे।

10.2 गणितीय आगमन का सिद्धान्त

गणितीय आगमन इस प्रक्रिया का और अधिक यथार्थ रूप है। ऐसी यथार्थता की आवश्यकता होती है, क्योंकि कोई कथन गणित के अनुसार तभी सत्य माना जाता है जब प्रत्येक स्थिति में, जिसके संदर्भ में वह है, उस की सत्यता दर्शाई जा सके। निम्नलिखित सिद्धान्त उसके घटित होने की जाँच कराता है।

गणितीय आगमन का सिद्धान्त

मान लीजिए कि $P(n)$ प्राकृत संख्या n से सम्बद्ध कोई कथन है। यदि

(i) यह $n = 1$, के लिए सत्य है, अर्थात् $P(1)$ सत्य है, और

(ii) $P(k)$, $k \geq 1$, को सत्य मानते हुए यह सिद्ध किया जा सकता है कि $P(k+1)$ सत्य है, तब $P(n)$ प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए अवश्य ही सत्य होगा।

नोट कीजिए कि उपर्युक्त प्रतिबंध *(ii)* से अभिप्राय यह नहीं है कि *P(k)* सत्य है। इससे अभिप्राय है कि जब *P(k)* सत्य है तभी *P(k + 1)* सत्य है।

उदाहरणार्थ, आइए विचार करें, कि गणितीय आगमन के सिद्धान्त से $n = 11$ के लिए $P(n)$ के सत्य होने का निष्कर्ष कैसे निकलता है। (i) से $P(1)$ सत्य है। जब $P(1)$ सत्य है तो हम (ii) में $k = 1$ में रख सकते है। अतः $P(1 + 1)$ अर्थात् $P(2)$ सत्य है। $P(2)$ सत्य है तो हम (ii) में $k = 2$ में रख सकते हैं और $P(2 + 1)$ अर्थात् $P(3)$ सत्य है। अब (ii) में $k = 3$ रखने पर हमें $P(4)$ की सत्यता प्राप्त हो जाती है। इस प्रक्रिया को इसी प्रकार चलाते रहने पर हमें $P(11)$ की सत्यता प्राप्त हो जाएगी।

यह स्पष्ट है कि उपर्युक्त तर्क में 11 की कोई विशेष भूमिका नहीं है। हम, इसी प्रकार $P(137)$ को भी सत्य सिद्ध कर सकते हैं। वास्तव में यह स्पष्ट है कि $n > 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

आइए, अब उदाहरणों की सहायता से देखें कि गणितीय आगमन का सिद्धान्त विविध प्रकार के गणितीय कथनों को सिद्ध करने में कैसे सहायक होता है।

उदाहरण 10.4. सिद्ध कीजिए कि

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n}{2}(n+1), \text{ जहाँ } n \text{ प्राकृत संख्या है।}$$

हल : हमें प्राप्त है कि

$$P(n): 1+2+3+\ldots+n=\frac{n}{2}(n+1)$$

अतः $P(1)$ '$1=\frac{1}{2}(1+1)$' है जो सत्य है

अतः $P(1)$ सत्य है

अब हम यह देखेंगे कि जब $P(k)$ सत्य है, तो क्या $P(k+1)$ भी सत्य है।

अतः मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है अर्थात्

$$1+2+3 \ldots+k=\frac{k}{2}(k+1) \qquad \ldots.(i)$$

अब $P(k+1): 1+2+3+\ldots+k+(k+1)=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

यह तभी सत्य होगा यदि बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$P(k+1)$ का बायाँ पक्ष $=(1+2+3 \ldots+k)+(k+1)$

$$=\frac{k}{2}(k+1)+(k+1) \qquad \ldots.[\text{समीकरण (i) से}]$$

$$=(k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right)$$

$$=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$= P(k+1)$ का दायाँ पक्ष

अतः यदि हम $P(k)$ को सत्य मानते हैं तो $P(k+1)$ सत्य प्राप्त हो जाता है। चूंकि $P(1)$ भी सत्य है, अतः गणितीय आगमन के सिद्धान्त के दोनों प्रतिबंध पूरे हो जाते हैं और हम निष्कर्ष निकालते हैं कि दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है। आप देख सकते हैं कि हम ने तीन पदों में परिणाम को सिद्ध किया; आधार पद (अर्थात् (i) की जाँच), दूसरा आगमन पद (अर्थात् (ii) की जाँच) और तीसरा परिणाम पर पहुँचना।

टिप्पणी

उदाहरण 10.5. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $\left(x^{2n-1}+y^{2n-1}\right)$, $(x + y)$ से विभाज्य है; जबकि $x, y \in N$.

हल : आइए देखें कि क्या हम यहाँ आगमन के सिद्धान्त को लगा सकते हैं। हम कथन '$\left(x^{2n-1}+y^{2n-1}\right)$, $(x + y)$', से विभाज्य है,' को $P(n)$ कहेंगे।

तब $P(1)$: '$\left(x^{2-1}+y^{2-1}\right)$, $(x + y)$' से विभाज्य है, जो सत्य है।

अतः $P(1)$ सत्य है।

अब हम मान लेते हैं कि किसी प्राकृत संख्या k के लिए $P(k)$ सत्य है।

अर्थात् $(x^{2k-1}+y^{2k-1})$, $(x + y)$ से विभाज्य है।

इसका अर्थ है कि किसी प्राकृत संख्या t के लिए $x^{2k-1}+y^{2k-1}=(x+y)t$

तब, $x^{2k-1}=(x+y)t-y^{2k-1}$

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि P $(k+1)$ सत्य है।

अर्थात् '$[x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1}]$, $(x+y)$ से विभाज्य है।'

अब

$$\begin{aligned}
x^{2(k+1)-1}+y^{2(k+1)-1} &= x^{2k+1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2k-1+2}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}\cdot x^{2k-1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}\cdot[(x+y)t-y^{2k-1}]+y^{2k+1}\\
&= x^{2}(x+y)t-x^{2}y^{2k-1}+y^{2k+1}\\
&= x^{2}(x+y)t-x^{2}y^{2k-1}+y^{2}y^{2k-1}\\
&= x^{2}(x+y)t-y^{2k-1}(x^{2}-y^{2})\\
&= (x+y)[x^{2}t-(x-y)\,y^{2k-1}]
\end{aligned}$$

जो, $(x + y)$ का गुणज है।

इस प्रकार $P\ (k+1)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है।

उदाहरण 10.6. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए, सिद्ध कीजिए कि $2^n > n$

हल : हमें प्राप्त है $P(n) : 2^n > n$.

अतः $P(1) : 2^1 > 1$, अर्थात् $2 > 1$, जो सत्य है।

हम मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है

अर्थात् $2^k > k$ ... (i)

अब, हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $P(k + 1)$ सत्य है अर्थात् $2^{k+1} > k + 1$.

(i) के दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त होता है

$$2^{k+1} > 2k$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} > k + k \Rightarrow 2^{k+1} > k + 1, \text{ (क्योंकि } k > 1)$$

अतः $P(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सत्य है।

कभी–कभी हमें, ऐसे कथन जो किसी विशेष प्राकृत संख्या, मान लीजिए a, से बड़ी प्राकृत संख्याओं से सम्बद्ध होता है; को सिद्ध करने की आवश्यकता होती है (जैसा नीचे उदाहरण 8.8 में दिया गया है)। सिद्धान्त के कथन में हम $P(1)$ को $P(a + 1)$ द्वारा बदल देते हैं।

उदाहरण 10.7. सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक $n \geq 3$ के लिए $n^2 > 2(n + 1)$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

हल : यहाँ हम $n^2 > 2\,(n + 1)$ कथन को $P\,(n)$ कहेंगे।

क्योंकि हमें दिया हुआ कथन $n \geq 3$ के लिए सिद्ध करना है, प्रथम सम्बन्धित कथन $P(3)$ है। अतः हम देखेंगे कि क्या $P(3)$ सत्य है।

$P(3) : 3^2 > 2 \times 4$ अर्थात् $9 > 8$.

अतः $P\,(3)$ सत्य है।

हम मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है जहाँ $k \geq 3$ अर्थात्

$$k^2 > 2(k + 1) \qquad \text{........ (i)}$$

हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि $P\,(k + 1)$ सत्य है।

$\mathrm{P}\,(k + 1) : (k + 1)^2 > 2(k + 2)$

$\mathrm{P}\,(k + 1)$ का बायाँ पक्ष $= (k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$

$> 2\,(k + 1) + 2k + 1$ ... [(i) से]

$> 3 + 2k + 1$ क्योंकि $2\,(k + 1) > 3 = 2\,(k + 2)$,

इस प्रकार $(k + 1)^2 > 2(k + 2)$

अतः $P(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए गणितीय आगमन के सिद्धान्त से दिया हुआ कथन प्रत्येक प्राकृत संख्या $n \geq 3$ के लिए सत्य है।

उदाहरण 10.8. गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा, सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक प्राकृत संख्या n

के लिए $\left(\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

हल : मान लीजिए कि $P(n) : \left(\dfrac{n^5}{5} + \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{7n}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore P(1) : \left(\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है।

अब, $\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}=\frac{3+5+7}{15}=\frac{15}{15}=1$, जो कि एक प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $P(1)$ सत्य है।

मान लीजिए $P(k)$: $\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)$ एक प्राकृत संख्या है, सत्य है ... (i)

अब $\frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$

$$=\frac{1}{5}\left[k^5+5k^4+10k^3+10k^2+5k+1\right]+\frac{1}{3}\left[k^3+3k^2+3k+1\right]+\left(\frac{7}{15}k+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+\left(k^4+2k^3+3k^2+2k\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}\right)$$

$$=\left(\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}\right)+\left(k^4+2k^3+3k^2+2k\right)+1 \quad ...(ii)$$

[(1) द्वारा]

(i) से, $\frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

साथ ही, $k^4+2k^3+3k^2+2k$ एक प्राकृत संख्या है तथा 1 भी प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ (ii), प्राकृत संख्याओं का योग होने के कारण प्राकृत संख्या है।

$\therefore$ $P(k+1)$ सत्य है यदि $P(k)$ सत्य है।

$\therefore$ $P(n)$ सभी प्राकृत संख्याओं के लिए सत्य है।

अतः $\left(\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\right)$ सभी प्राकृत संख्याओं n के लिए प्राकृत संख्या है।

देखें आपने कितना सीखा 10.2

1. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के उपयोग से निम्नलिखित कथनों को प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सिद्ध कीजिए :

(a) $1^2+2^2+3^2+........+n^2=\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$

(b) $1^3+2^3+3^3+........+n^3=(1+2+.....+n)^2$

(c) $1+3+5+........+(2n-1)=n^2$

(d) $1+4+7+........+(3n-2)=\frac{n}{2}(3n-1)$

2. गणितीय आगमन के सिद्धान्त के उपयोग से निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सिद्ध कीजिए :

(a) $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+....+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

(b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+....+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

(c) $(1\times 2)+(2\times 3)+....+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए सिद्ध कीजिए कि

(a) $n^3+5n,\ 6$ से विभाज्य है। (b) $(x^n-1),\ (x-1)$ से विभाज्य है।

(c) (n^3+2n), 3 से विभाज्य है (d) 4, $(n^4+2n^3+n^2)$ को पूर्णतया विभाजित करता है।

4. प्रत्येक प्राकृत संख्या n के लिए निम्नलिखित असमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

(a) $3^n \geq 2n+1$ (b) $4^{2n} > 15\,n$ (c) $1+2+....+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2$

5. गणितीय आगमन के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए निम्नलिखित कथनों को सिद्ध कीजिए :

(a) $n \geq 5$ के लिए $2^n > n^2$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

(b) $n \geq 2$ के लिए $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+....+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}$ जहाँ n एक प्राकृत संख्या है।

6. सिद्ध कीजिए कि $n(n^2-1)$ संख्या 3 से पूरा विभाजित होगा यदि n,1 से बड़ी प्राकृत संख्या हो।

टिप्पणी: प्राकृत संख्याओं से सम्बद्ध किसी कथन $P(n)$ को सत्य सिद्ध करने के लिए दोनों आधार तथा आगमन पदों का सत्य होना आवश्यक है।

यदि इनमें से एक भी असत्य है, तो उपपत्ति अमान्य है। उदाहरणार्थ यदि $P(n)$: $(a+b)^n \leq a^n+b^n$ है, तब $P(1)$ निश्चित ही सत्य है। परन्तु $P(k)$ की सत्यता का अर्थ यह नहीं है कि $P\,(k+1)$ भी सत्य है। अतः कथन प्रत्येक $n \in N$ के लिए सत्य नहीं है। [उदाहरणार्थ $(2+3)^2 \leq 2^2+3^2$).] आइए, दूसरे उदाहरण पर विचार करें

$P(n): n > \frac{n}{2}+20$ लीजिए।

इस स्थिति में आधार पद $P(1)$ सत्य नहीं है। परन्तु आगमन पद सत्य है। क्योंकि यदि हम $P(k)$ को सत्य मान लें, अर्थात्

$\Rightarrow k > \frac{k}{2}+20$ है, तो

$P\,(k+1) : \Rightarrow k+1>\frac{k}{2}+20+1>\frac{k}{2}+20+\frac{1}{2}=\frac{k+1}{2}+20 \ \Rightarrow P(k+1)$ सत्य है।

आइये दोहराएँ

- ऐसे वाक्य जो या तो सत्य होते हैं या असत्य होते हैं, उन्हें कथन या साध्य कहते हैं।
- आगमन शब्द का अर्थ विशिष्ट स्थितियों या तथ्यों से व्यापीकरण करना है।
- गणितीय आगमन के सिद्धान्त का कथन:

  सभी $n \geq 1$ के लिए, प्राकृत संख्या n से संबंद्ध एक कथन $P(n)$, जहाँ, n एक निश्चित प्राकृत संख्या है, सत्य होग यदि(i) $P(1)$ सत्य हैं। (ii) $K \in N$ के लिए यदि p(k) सत्य है, तो $p(k+1)$ भी सत्य हैं।

सहायक वेबसाइट

- *http://www.bbc.co.uk/education/asguru/maths/13pure/01proof/01proof/05induction/index.shtml*
- *www.mathguru.com/result/principle-of-mathematical-induction.aspx*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_induction*

आइए अभ्यास करें

गणितीय आगमन के सिद्धांत के प्रयोग द्वारा निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए।

1. n अवयवों वाले एक समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या 2^n होती है, जहाँ $n \in N$!
2. $(a + b)^n > a^n + b^n \times n \geq 2$, जहाँ a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं और $n \in N$
3. $a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = \dfrac{a(r^n - 1)}{r-1}$ जहाँ $n \in N,\ r > 1$ और a एक वास्तविक संख्या है। कृ
4. $(x^{2n} - 1), (x+1)$ से विभाज्य है जहाँ $n \in N$
5. $(10^{2n-1} + 1), 11$ का एक गुणज है जहाँ $n \in N$
6. $(4.10^{2n} + a.10^{2n-1} + 5)$, 99 का एक गुणज है जहाँ $n \in N$
7. $(1 + x)^n > 1 + nx$ जहाँ $x > 0$ और $n \in N$
8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \cdots + n.2^n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2$, जहाँ $n \in N$
9. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$, जहाँ $n \in N$
10. $\dfrac{1}{3.5} + \dfrac{2}{5.7} + \dfrac{1}{7.9} + \cdots + \dfrac{1}{(2n+1)\,(2n+3)} = \dfrac{n}{3(2n+3)}$, जहाँ $n \in N$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 10.1

1. (b), (e) एवं (f) कथन हैं। (a) कथन नहीं है, क्योंकि n का परास नहीं दिया है, अतः हम इसके सत्य या असत्य होने का निर्णय लेने की स्थिति में नहीं है। (c) व्यक्तिपरक है और इसीलिए गणितीय कथन नहीं है।(d) एक प्रश्न है न कि कथन।

   ध्यान दीजिए कि (f) व्यापक रूप में असत्य है।

2. P(1) : $1^3 + 5.1$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(2) : $2^3 + 5.2$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(k) : $k^3 + 5k$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

   P(k+1) : $(k + 1)^3 + 5(k + 1)$ का 6 एक गुणनखण्ड है।

3. (a) $P(1) : 2 \geq 2$

   $P(k) : 2^k \geq k + 1$

   $P(k + 1) : 2^{k+1} \geq k + 2$

   (b) $P(1) : 1 + x \geq 1 + x$

   $P(k) : (1 + x)^k \geq 1 + kx$

   $P(k + 1): (1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$

   (c) $P(1)$: 6, 6 से विभाज्य है।

   $P(k) : k(k + 1)(k + 2)$, 6 से विभाज्य है।

   $P(k + 1): (k + 1) (k + 2) (k + 3)$, 6 से विभाज्य है।

   (d) $P(1)$: $(x - y)$, $(x - y)$ से विभाज्य है।

   $P(k)$: $(x^k - y^k)$, $(x - y)$ से विभाज्य है।

   $P(k + 1)$: $(x^{k+1} - y^{k+1})$, $(x - y)$ से विभाज्य है।

   (e) $P(1): ab = ab$

   $P(k): (ab)^k = a^k b^k$

   $P(k+1): (ab)^{k+1} = a^{k+1} . b^{k+1}$

   (f) $P(1) : \frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{7}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

   $P(k): \frac{k^5}{5}+\frac{k^3}{3}+\frac{7k}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

   $P(k + 1): \frac{(k+1)^5}{5}+\frac{(k+1)^3}{3}+\frac{7(k+1)}{15}$ एक प्राकृत संख्या है।

4. (a) $P(1):\quad \dfrac{1}{1\times 2}=\dfrac{1}{2}$

$$P(2):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}=\frac{2}{3}$$

$$P(k):\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

$$P(k+1):\frac{1}{1\times 2}+...+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$$

(b) $P(1):\ 1=1^2$

$$P(2):\ 1+3=2^2$$

$$P(k):\ 1+3+5+...+(2k-1)=k^2$$

$$P(k+1):\ 1+3+5+...+(2k-1)+[2(k+1)-1]=(k+1)^2$$

(c) $P(1):1\times 2<1(2)^2$

$$P(2):(1\times 2)+(2\times 3)<2(3)^2$$

$$P(k):(1\times 2)+(2\times 3)+...+k(k+1)<k(k+1)^2.$$

$$P(k+1):(1\times 2)+(2\times 3)+...+(k+1)(k+2)<(k+1)(k+2)^2$$

(d) $P(1):\ \dfrac{1}{1\times 3}=\dfrac{1}{3}$

$$P(2):\ \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}=\frac{2}{5}$$

$$P(k):\ \frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1}$$

$$P(k+1):\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+...+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}$$

11

क्रमचय तथा संचय

एक दिन मेरी इच्छा रेलगाड़ी से बैंगलोर से इलाहाबाद जाने की हुई। बैंगलोर से इलाहाबाद तक कोई सीधी रेलगाड़ी नहीं है, परन्तु बैंगलोर से इटारसी तथा इटारसी से इलाहाबाद तक की रेलगाड़ियाँ हैं। मैंने रेलवे समय–सारिणी में पाया कि दो गाड़ियाँ बैंगलोर से इटारसी तथा तीन गाड़ियाँ इटारसी से इलाहाबाद तक हैं। अब, मैं बैंगलोर से इलाहाबाद तक कितनी विधियों से यात्रा कर सकता हूँ?

यह एक गणन समस्या है जो गणित की एक शाखा 'संचय विन्यास' के अन्तर्गत आती है।

मान लीजिए आपके पास पाँच मसालों के डिब्बे हैं जिन्हें आप अपनी रसोई के शैल्फ पर क्रम से लगाना चाहते हैं। आप चाहते हैं कि उन डिब्बों में से तीन, जिनका प्रयोग अधिक करते हैं, तक पहुँच आसान हो, बाकी दो तक पहुँच कम हो। इस स्थिती में डिब्बों का क्रम महत्वपूर्ण है। आप इसे कितनी विधियों से कर सकते हैं?

एक दूसरी स्थिति लें। माना आप अपने घर को रंग करवा रहे हैं। यदि एक विशेष रंग अथवा गहरा रंग उपलब्ध नहीं है, तो आप भिन्न–भिन्न रंगों को मिलाकर इस रंग को बना सकते हैं। जब इस प्रकार रंग बनाए जाते हैं, तो इसमें मिलाने के क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता। यह रंगों का संचय या चयन है जो नया रंग निर्धारण करता है न कि मिलाने का क्रम।

इसी तरह का एक अन्य उदाहरण लें। जब आप किसी यात्रा पर जाते हैं, तो आप अपने सारे कपड़े तो साथ नहीं ले जा सकते। हो सकता है आपके पास चार कमीजों और पैंट के जोड़े हों, परन्तु आप केवल 2 जोड़े ले जाना चाहें। ऐसी स्थिति में आपको 4 जोड़ों में से 2 जोड़ों का चयन करना है और ऐसा करने में जोड़ों के चयन के क्रम से कोई अन्तर नहीं पड़ता। इन उदाहरणों में, हमें उन चयनों की संख्या ज्ञात करनी है जिनमें हम ऐसा कर सकते हैं।

इस पाठ में, हम कुछ सरल गणन विधियों की चर्चा करेंगे तथा इनका प्रयोग ऊपर जैसी सरल गणन समस्याओं को हल करने में करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- ज्ञात करना कि दी गई वस्तुओं को कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं
- मूलभूत गणन सिद्धान्त का कथन देना

- n! को परिभाषित करना तथा n के भिन्न–भिन्न मानों के लिए इसका मान ज्ञात करना
- क्रमचय की व्याख्या विन्यास के रूप में करना तथा ${}^nP_r$ का अर्थ लिखना
- ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ का कथन देना तथा इसका प्रयोग प्रश्न हल करने में करना
- सिद्ध करना कि $(i)\ (n+1)\,{}^nP_n = {}^{n+1}P_n \quad (ii)\ {}^nP_{r+1} = (n-r)\,{}^nP_r$
- संचय की वस्तुओं के चुनने के रूप में व्याख्या करना तथा ${}^nC_r$ का अर्थ लिखना
- क्रमचय तथा संचय में अन्तर बताना
- सूत्र ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ की व्युत्पत्ति करना तथा इस परिणाम का प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना
- सम्बन्ध ${}^nP_r = r!\,{}^nC_r$ की व्युत्पत्ति करना
- सूत्र ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ सत्यापित करना और इसकी व्याख्या करना
- सूत्र ${}^nC_r + {}^nC_{n-r} = {}^{n+1}C_r$ की व्युत्पत्ति करना तथा इसे प्रश्नों को हल करने में प्रयोग करना

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय
- चार मूलभूत संक्रियाएँ

11.1 मूलभूत गणन सिद्धान्त

अब हम भूमिका में चर्चित प्रश्न को हल करते हैं। हम बैंगलोर से इटारसी तक की गाड़ियों को t_1, t_2 तथा इटारसी से इलाहाबाद तक की गाड़ियों को T_1, T_2, T_3 से प्रदर्शित करेंगे। मान लीजिए, मैं t_1 से बैंगलोर से इटारसी तक की यात्रा करता हूँ। तब इटारसी से मैं T_1, T_2 या T_3 से यात्रा कर सकता हूँ। अतः संभावनाएँ t_1T_1, t_1T_2 तथा t_1T_3 हैं जहाँ t_1T_1 बैंगलोर से इटारसी तक t_1 से यात्रा तथा इटारसी से इलाहाबाद तक T_1 से यात्रा प्रदर्शित करता है। इसी प्रकार, यदि मैं t_2 से बैंगलोर से इटारसी तक यात्रा करता हूँ, तब संभावनाएँ t_2T_1, t_2T_2 अथवा t_2T_3 बनती हैं। अतएव बैंगलोर से इलाहाबाद तक यात्रा करने की कुल विधियाँ 6 हैं।

यहाँ हमारे पास गाड़ियों की संख्या कम थी और इसीलिए हम सम्भव स्थितियाँ की सूची बना पाए। यदि बैंगलोर से इटारसी तक 10 गाड़ियाँ तथा इटारसी से इलाहाबाद तक 15 गाड़ियाँ होतीं, तब यह कार्य जटिल हो जाता। यहाँ मूलभूत गणन सिद्धान्त या केवल गणन सिद्धान्त प्रयोग में लाया जाता है :

यदि कोई घटना *m* विधियों से घटित हो सकती है तथा इसके किसी एक विधि से घटित होने के पश्चात् एक अन्य घटना *n* विधियों से घटित हो सकती है, तो दोनों घटनाओं के एक साथ घटित होने की कुल विधियाँ $m \times n$ होंगी।

उदाहरण 11.1. 10 से 95 तक 5 के कितने गुणज हैं?

हल : जैसा कि आप जानते हैं कि 5 के गुणज वे पूर्णांक होते हैं जिनका सबसे दायाँ (अर्थात् इकाई का अंक) 0 तथा 5 है।

दायें से प्रथम अंक 2 विधियों से चुना जा सकता है।

द्वितीय अंक 1,2,3,4,5,6,7,8,9 में से कोई एक हो सकता है।

अर्थात् द्वितीय अंक के 9 विकल्प हैं।

$\therefore$ 10 से 95 तक, 5 के गुणजों की संख्या $2 \times 9 = 18$ ।

उदाहरण 11.2. एक नगर में बस मार्ग संख्या के लिए, 100 से छोटी प्राकृत संख्या के साथ A, B, C, D, E तथा F में से कोई अक्षर लिखा जाता है। ऐसे कितने विभिन्न बस मार्ग संभव हैं?

हल : 1 से 99 तक की प्राकृत संख्याओं में से कोई एक संख्या हो सकती है।

संख्या चुनने के 99 विकल्प हैं।

अक्षर 6 विधियों से चुने जा सकते हैं।

$\therefore$ कुल संभव बस मार्गों की संख्या $99 \times 6 = 594$ ।

देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. (a) 3 अंकों वाली कितनी संख्याएँ 5 की गुणज हैं?

   (b) एक सिक्का तीन बार उछाला जाता है। कुल संभव परिणाम कितने हैं?

   (c) यदि आपके पास 3 कमीजें और 4 पैंट हैं और कोई भी कमीज किसी भी पैंट के साथ पहनी जा सकती है। कितनी विधियों से आप कमीज–पैंट पहन सकते हैं?

2. (a) 4 पुरुष तथा 12 महिलाओं से दो रिक्त पद कितनी विधियों से भरे जा सकते हैं, जबकि एक पद पुरुष तथा दूसरा पद महिला द्वारा भरा जाना है?

   (b) एक पर्यटक, जलमार्ग से एक अन्य देश में जाकर वायुमार्ग से वापिस लौटना चाहती है। यदि जाने के लिए 5 भिन्न जलयान तथा वापिस आने के लिए 4 भिन्न वायुयान कंपनियों के विकल्प हैं, तो वह कितनी विधियों से अपनी यात्रा सम्पन्न कर सकती है।

   अब तक हमने गणन सिद्धान्त का प्रयोग दो घटनाओं के लिए किया है। किन्तु इसे 3 या अधिक घटनाओं के लिए भी प्रयोग किया जा सकता है, जैसा कि आप निम्न उदाहरणों में देख सकते हैं:

उदाहरण 11.3. एक प्रश्न पत्र में 3 प्रश्न हैं। यदि इन प्रश्नों के क्रमशः 4,3 तथा 2 हल हों, तो हलों की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर पहले प्रश्न 1 के 4 हल हैं।

दूसरे प्रश्न के 3 हल हैं तथा तीसरे प्रश्न के 2 हल हैं।

$\therefore$ गणन सिद्धान्त द्वारा,

हलों की कुल संख्या = $4 \times 3 \times 2 =$ 24

उदाहरण 11.4. शब्द ROTOR. पर विचार कीजिए। इसे आप चाहें बायें से पढ़ें या दायें से पढ़ें, वही शब्द मिलेगा। ऐसे शब्द को पैलिनड्रोम (*palindrome*) कहा जाता है। 5 अक्षरों के पैलिनड्रोमों की सम्भावित अधिकतम संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि अंग्रेजी वर्णमाला में 26 अक्षर हैं, इसलिए

दायें से प्रथम अक्षर का चयन 26 विधियों से कर सकते हैं।

इस चयन के पश्चात् द्वितीय अक्षर का भी चयन 26 विधियों से किया जा सकता है।

$\therefore$ पहले दो अक्षरों का चयन $26 \times 26 = 676$ विधियों से किया जा सकता है।

प्रथम दो अक्षरों के चयन के बाद तीसरे अक्षर का भी चयन 26 विधियों से किया जा सकता है।

$\therefore$ तीनों अक्षरों के चयन की कुल विधियाँ $676 \times 26 = 17576$

चौथा अक्षर वही है जो दूसरा अक्षर है तथा पाँचवाँ अक्षर वही है जो पहला अक्षर है।

$\therefore$ पाँच अक्षरों वाले पैलिनड्रोमों की अधिकतम सम्भावित संख्या = 17576

टिप्पणी : उदाहरण 11.4 में हमने 5–अक्षर को पैलिनड्रोमों की अधिकतम सम्भावित संख्या ज्ञात की है। यह संख्या 17576 से अधिक नहीं हो सकती। परन्तु इसका अर्थ यह नहीं है कि 17576 पैलिनड्रोम हैं, क्योंकि कुछ चयन *CCCCC* की तरह हैं जो अंग्रेजी भाषा में निरर्थक शब्द माने जाते हैं।

उदाहरण 11.5. अंकों 1,4,7,8 तथा 9 से 3 अंकों वाली कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि अंकों को दोहराया न जाए?

हल : तीन अंकों की संख्या में इकाई, दहाई तथा सैंकड़े के स्थान होते हैं।

दिए गए 5 अंकों में से इकाई का स्थान कोई भी अंक ले सकता है।

ऐसा 5 विधियों से किया जा सकता है। ... (*i*)

इकाई का स्थान भरने के बाद, चार अंक बचते हैं तथा इनमें से कोई एक अंक दहाई का स्थान ले सकता है।

यह 4 विधियों से किया जा सकता है। ... (*ii*)

दहाई का स्थान भरने के बाद, सैकड़े के स्थान पर बचे हुए 3 अंकों में से कोई भी अंक लिया जा सकता है। ऐसा 3 विधियों से किया जा सकता है। ... (*iii*)

$\therefore$ गणन सिद्धान्त से, 3 अंकों वाली संख्याओं की संख्या = $5 \times 4 \times 3 = 60$

आइए अब हम **गणन के व्यापक सिद्धान्त** का कथन दें :

यदि *n* घटनाएँ हैं तथा प्रथम घटना m_1 विधियों से घटित हो सकती है, पहली घटना के घटित होने के पश्चात् दूसरी घटना m_2 विधियों से घटित हो सकती है, दूसरी घटना घटित होने के पश्चात् तीसरी घटना m_3 विधियों से घटित हो सकती है इत्यादि, तो सभी *n* घटनाओं के घटित होने की कुल विधियाँ $m_1 \times m_2 \times \ldots \times m_{n-1} \times m_n$ हैं।

उदाहरण 11.6. मान लीजिए कि आप स्थान *A* से स्थान *B* तक 3 बसों से, स्थान *B* से स्थान *C* तक 4 बसों से, स्थान *C* से स्थान *D* तक 2 बसों से तथा स्थान *D* से स्थान *E* तक 3 बसों से यात्रा कर सकते हैं। कितनी विधियों से आप *A* से *E* तक यात्रा कर सकते हैं?

हल : *A* से *B* तक की बस का चयन 3 प्रकार से किया जा सकता है।

B से *C* तक की बस का चयन 4 प्रकार से किया जा सकता है।

C से D तक की बस का चयन 2 प्रकार से किया जा सकता है।

D से E तक की बस का चयन 3 प्रकार से किया जा सकता है।

A से E तक यात्रा करने की कुल विधियाँ $= 3 \times 4 \times 2 \times 3 = 72$

देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. (a) 6– अक्षर पैलिनड्रोमों की अधिकतम संख्या क्या है?

   (b) 6 अंकों वाली पैलिनड्रोमिक संख्याओं की संख्या क्या है, जिनके प्रथम अंक शून्य नहीं है?

2. (a) एक विद्यालय में 5 अंग्रेजी के अध्यापक, 7 हिन्दी के अध्यापक तथा 3 फ्रेंच भाषा के अध्यापक हैं। एक तीन सदस्यीय समिति का गठन करना है, जिसमें एक अध्यापक प्रत्येक भाषा का होना चाहिए। कितनी विधियों से यह किया जा सकता है?

   (b) एक महाविद्यालय विद्यार्थी संघ के चुनाव में, 4 विद्यार्थी अध्यक्ष, 5 विद्यार्थी उपाध्यक्ष तथा 3 छात्र सचिव पद के प्रत्याशी हैं। सम्भव परिणामों की संख्या ज्ञात कीजिए।

3. (a) अंकों 1,2,5,6,8 से 3 अंकों वाली 600 से बड़ी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, यदि कोई भी अंक 1 से अधिक बार न आए?

   (b) एक व्यक्ति 4 पीरियडों की समय–सारणी बनाना चाहता है। उसे प्रत्येक विषय अंग्रेजी, गणित, अर्थशास्त्र तथा कॉमर्स को एक पीरियड देना है। वह कितनी भिन्न–भिन्न समय–सारणियाँ बना सकता है?

11.2 क्रमचय

मान लीजिए कि आप अपनी पुस्तकों को शैल्फ पर क्रम से लगाना चाहते हैं। यदि आपके पास केवल एक ही पुस्तक है, तो उसको व्यवस्थित करने की एक ही विधि है। यदि आपके पास दो पुस्तकें हैं–एक इतिहास तथा एक भूगोल की, तो आप भूगोल की पुस्तक पहले, फिर इतिहास की GH अथवा इतिहास की पुस्तक पहले, फिर भूगोल की HG रख सकते हैं। दूसरे शब्दों में, दो पुस्तकें दो क्रमों से व्यवस्थित की जा सकती हैं।

अब मान लीजिए कि आप एक गणित की भी पुस्तक और सम्मिलित करना चाहते हैं। इतिहास तथा भूगोल की पुस्तकें दो में से किसी एक विधि जैसे GH के क्रम में व्यवस्थित करने के पश्चात्, आप गणित की पुस्तक निम्न विधियों में से किसी भी एक विधि से रख सकते हैं :

MGH, GMH अथवा GHM। इसी प्रकार, HG के संगत आपके पास पुस्तकों के क्रम की 3 विधियाँ और हैं। अतः गणन के सिद्धान्त से आप गणित, भूगोल और इतिहास की पुस्तकों को $3 \times 2 = 6$ क्रमों में व्यवस्थित कर सकते हैं।

क्रमचय से हमारा तात्पर्य वस्तुओं के एक निश्चित क्रम में किए गए विन्यास से होता है। उपरोक्त उदाहरण में, हम एक पुस्तक, दो पुस्तकों अथवा तीन पुस्तकों की चर्चा कर रहे थे। व्यापक रूप में, यदि आप n वस्तुओं के क्रमचय की संख्या ज्ञात करना चाहते हैं, जहाँ $n \geq 1$, तो इसे आप कैसे कर सकते हैं? हमें देखना है कि क्या इसका उत्तर सम्भव है?

पुस्तकों के सम्बन्ध में जो हमने देखा उसी प्रकार एक वस्तु का क्रमचय 1, दो वस्तुओं के क्रमचय 2×1 तथा तीन वस्तुओं के क्रमचय $3 \times 2 \times 1$ हैं। यह हो सकता है कि n वस्तुओं के क्रमचय

$n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times2\times1$ हैं। वास्तव में, यह ऐसे ही है, जैसा कि आप तब देखेंगे जब हम निम्न परिणाम सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 11.1 n वस्तुओं के कुल क्रमचयों की संख्या $n\,(n-1)$ ....2.1 होती है।

उपपत्ति : पहला स्थान हम n भिन्न विधियों से भर सकते हैं। इसके भरने के पश्चात्, दूसरा स्थान हम शेष $(n–1)$ वस्तुओं से भर सकते हैं तथा यह हम $(n–1)$ विधियों से कर सकते हैं। इसी प्रकार, पहले दो स्थान भरने के बाद तीसरा स्थान $(n–2)$ विधियों से भरा जा सकता है तथा इस प्रकार हम करते जाएँगे। अन्त में अन्तिम स्थान हम शेष बची एक वस्तु से एक विधि से भरेंगे।

गणन सिद्धान्त का प्रयोग करते हुए, क्रमचयों की कुल संख्या हैं:

$$n(n-1)(n-2)\,........\,2.1. \qquad .....(11.1)$$

गुणनफल $n\,(n-1)$ ... 2.1 गणित में प्रायः आता रहता है। अतः इसे एक नाम तथा संकेत देने की आवश्यकता है। सामान्यतः इसे हम $\boldsymbol{n!}$ (अथवा $\underline{|n}$) से व्यक्त करते हैं तथा $\boldsymbol{n}$ 'फैक्टोरियल' पढ़ते हैं।

अतः, $\boldsymbol{n! = n\,(n-1)\,...\,3.2.1}$

इस संकेत से आपको परिचित कराने के लिए, हम एक उदाहरण लेते हैं:

उदाहरण 11.7. मान ज्ञात कीजिए : (a) $3!$ (b) $2!+4!$ (c) $2!\times3!$

हल : (a) $3!=3\times2\times1=6$

(b) $2!=2\times1=2$

$4!=4\times3\times2\times1=24$

$\therefore \quad 2!+4!=2+24=26$

(c) $2!\times3!=2\times6=12$

ध्यान दीजिए कि $n!$ निम्न सम्बन्ध को सन्तुष्ट करता है :

$$n!=n\times(n-1)! \qquad ...\,(11.2)$$

यह इसलिए है, क्योंकि $n\,(n-1)! = n\,[(n-1)\,.\,(n-2)...\,2.1] = n\,.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...2.1 = n!$

निस्सन्देह, उपरोक्त सम्बन्ध केवल $n\geq2$ के लिए ही वैध है क्योंकि अभी तक $0!$ परिभाषित नहीं किया है। आइए देखें कि क्या $0!$ को उपरोक्त सम्बन्ध से मेल खाते हुए परिभाषित कर सकते हैं। वास्तव में, यदि हम $0! = 1$ परिभाषित कर दें, तो $n = 1$ के लिए भी सम्बन्ध **... (11.2)** वैध हो जाएगा।

उदाहरण 11.8. मान लीजिए कि आप अपनी अंग्रेजी, हिन्दी, गणित, इतिहास, भूगोल तथा विज्ञान की पुस्तकों को शैल्फ पर व्यवस्थित करना चाहते हैं। इसे आप कितनी विधियों से कर सकते हैं?

हल : हमें 6 पुस्तकों को व्यवस्थित करना है।

n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या है : $n! = n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,...\,2.1$

$\therefore$ 6 वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या = 6.5.4.3.2.1 = 720

देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. (a) मान ज्ञात कीजिए : (i) $6!$ (ii) $7!$ (iii) $7! + 3!$ (iv) $6! \times 4!$ (v) $\frac{5!}{3!.2!}$

   (b) निम्न में से कौन–कौन से कथन सत्य हैं?

   (i) $2! \times 3! = 6!$ (ii) $2! + 4! = 6!$

   (iii) $3!$, $4!$ को पूरा विभाजित करता है।

   (iv) $4! - 2! = 2!$

2. (a) 5 विद्यार्थी एक शयनागार में ठहरे हैं। कितनी विधियों से आप उनको 5 बिस्तर आवंटित कर सकते हैं?

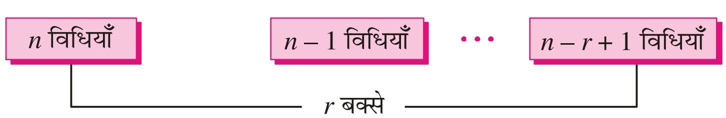
   (b) कितनी विधियों से शब्द 'TRIANGLE' के अक्षर व्यवस्थित किए जा सकते हैं?

   (c) अंकों 1, 2, 3, 4 से चार अंकों की कितनी भिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं, जबकि प्रत्येक संख्या के सभी अंक भिन्न हों?

11.3 n वस्तुओं में से r वस्तुओं का क्रमचय

मान लीजिए कि आपके पास 5 कहानियों की पुस्तकें हैं। आप इन्हें आशा, अख्तर और जसविन्दर में बाँटना चाहते हैं। आप इसे कितनी विधियों से कर सकते हैं? आप पाँच पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक आशा को दे सकते हैं। उसके पश्चात्, शेष चार पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक अख्तर को दे सकते हैं। उसके बाद शेष तीन पुस्तकों में से कोई भी पुस्तक जसविन्दर को दे सकते हैं। अतः, गणन सिद्धान्त से, आप पुस्तकों को $5 \times 4 \times 3 = 60$ विधियों से बाँट सकते हैं।

अधिक व्यापक रूप में मान लीजिए आपको n वस्तुओं में से r वस्तुएँ व्यवस्थित करनी हैं। इसे आप कितनी विधियों से कर सकते हैं? आइए इसे एक भिन्न तरीके से देखें। मान लीजिए कि आपके पास n वस्तुएँ हैं और इनमें से r वस्तुओं को r बक्सों में व्यवस्थित करना है, ताकि एक बक्से में एक वस्तु रहे।



चित्र 11.1

मान लीजिए कि एक बक्सा है। तब, $r = 1$ है। आप n वस्तुओं में से कोई वस्तु इसमें रख सकते हैं। यह n विधियों से किया जा सकता है। यदि दो बक्से हैं, अर्थात् $r = 2$ है, तो आप n वस्तुओं में से कोई एक पहले बक्से में रखकर उसके पश्चात् $(n - 1)$ वस्तुओं में से किसी को दूसरे बक्से में रख सकते हैं। गणन सिद्धान्त से, दोनों बक्से $n(n - 1)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। इसी प्रकार, तीन बक्से $n(n - 1)(n - 2)$ विधियों से भरे जा सकते हैं। व्यापक रूप में, हमारे पास निम्न प्रमेय है :

प्रमेय 11.2 n वस्तुओं में से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $n(n-1)\cdots(n - r + 1)$ होती है।

n वस्तुओं से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या को सामान्यतः ${}^{n}P_{r}$ से व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार, ${}^{n}P_{r} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ ... (11.3)

उपपत्ति : मान लीजिए कि हमें, n भिन्न–भिन्न वस्तुओं में से r वस्तुओं को व्यवस्थित करना है। वास्तव में, ऐसा करना, n वस्तुओं में से एक–एक लेकर r स्थानों के भरने के समान है।

पहला स्थान n भिन्न–भिन्न विधियों से भरा जा सकता है। ऐसा करने के बाद, दूसरे स्थान पर शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से कोई एक वस्तु भरी जा सकती है और यह $(n–1)$ विधियों से हो सकता है। इसी प्रकार, तीसरा स्थान $(n-2)$ विधियों से भरा जा सकता है और इस तरह हम करते रहेंगे जब तक कि अन्तिम स्थान न आ जाए। अब तक हम $r–1$ स्थान भर चुके हैं। अतः हमारे पास $[n-(r-1)]$, अर्थात् $(n-r+1)$ वस्तुएँ हैं और इनमें से किसी से भी rवाँ स्थान भरा जा सकता है। यह $(n-r+1)$ विधियों से किया जा सकता है।

गणन सिद्धान्त द्वारा, n वस्तुओं में से r वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $n(n-1)(n-2)............(n-r+1)$ है।

उदाहरण 11.9. मान ज्ञात कीजिए : (a) ${}^4P_2$ (b) ${}^6P_3$ (c) $\dfrac{{}^4P_3}{{}^3P_2}$ (d) ${}^6P_3 \times {}^5P_2$

हल : (a) ${}^4P_2 = 4(4-1) = 4\times3 = 12.$

(b) ${}^6P_3 = 6(6-1)\ (6-2) = 6\times5\times4 = 120.$

(c) $$\frac{{}^4P_3}{{}^3P_2} = \frac{4(4-1)(4-2)}{3(3-1)} = \frac{4\times3\times2}{3\times2} = 4$$

(d) ${}^6P_3 \times {}^5P_2 = 6\ (6-1)\ (6-2)\times5\ (5-1) = 6\times5\times4\times5\times4 = 2400$

उदाहरण 11.10. यदि आपके पास 6 नववर्ष बधाई पत्र हैं और आप अपने 4 मित्रों को नववर्ष बधाई पत्र भेजना चाहते हैं, तो ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है?

हल : हमें 6 वस्तुओं में से 4 वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है।

यह संख्या ${}^6P_4 = 6(6-1)(6-2)(6-3) = 6.5.4.3 = 360$

अतः, बधाई पत्र 360 विधियों से भेजे जा सकते हैं।

${}^nP_r$, के सूत्र, अर्थात्

${}^nP_r = n\ (n-1)\ ...\ (n-r+1)$ पर विचार कीजिए।

यह $n!$ के गुणनफल में से पदों $n-r, n-r-1,...,2, 1$ को हटाने से प्राप्त किया जा सकता है।

इन पदों का गुणनफल $= (n-r)\ (n-r-1)\ ...2.1 = (n-r)!$

अब $$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)(n-r)...2.1}{(n-r)\ (n-r-1)...2.1} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1) = {}^nP_r$$

अतः, फैक्टोरियल संकेत का प्रयोग करते हुए, हम इसे लिख सकते हैं : $${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} \quad ...\ (11.4)$$

उदाहरण 11.11. ${}^nP_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $r = 0$ है।

सम्बन्ध 11.4 द्वारा $${}^nP_0 = \frac{n!}{n!} = 1$$

उदाहरण 11.12. दर्शाइए कि $(n+1)\,{}^{n}P_{r} = {}^{n+1}P_{r+1}$ होता है।

हल : $(n+1)\,{}^{n}P_{r} = (n+1)\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{(n+1)\,n!}{(n-r)!}$

$= \dfrac{(n+1)!}{[(n+1)-(r+1)]!}$ [$n-r$ को $[(n+1)-(r+1)$ के रूप में लिखने पर]

$= {}^{n+1}P_{r+1}$ (परिभाषा से)

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. (a) मान ज्ञात कीजिए : (i) ${}^{4}P_{2}$ (ii) ${}^{6}P_{3}$ (iii) $\dfrac{{}^{4}P_{3}}{{}^{3}P_{2}}$ (iv) ${}^{6}P_{3}\times{}^{5}P_{2}$ (v) ${}^{n}P_{n}$

   (b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य?

   (i) $6\times{}^{5}P_{2} = {}^{6}P_{2}$ (ii) $4\times{}^{7}P_{3} = {}^{7}P_{4}$

   (iii) ${}^{3}P_{2}\times{}^{4}P_{2} = {}^{12}P_{4}$ (iv) ${}^{3}P_{2}+{}^{4}P_{2} = {}^{7}P_{4}$

2. (a) (i) अंग्रेजीं में 3 अक्षरों से बने शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है, जिनमें कोई स्वर नहीं है।

   (ii) अंग्रेजी में 3 अक्षरों से बने शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है जिनमें केवल 'a' के अतिरिक्त कोई और स्वर नहीं है?

   (b) मान लीजिए कि आपके घर में 2 पलंग और 5 चादरें हैं। आप कितनी तरह से पलंगों पर चादरें बिछा सकते हैं?

   (c) आप दीवाली के 7 कार्डों में से 4 मित्रों को दीवाली पर बधाई भेजना चाहते हैं। आप ऐसा कितनी विधियों से कर सकते हैं?

3. दर्शाइये कि ${}^{n}P_{n-1} = {}^{n}P_{n}$ है।

4. दर्शाइये कि $(n-r)\,{}^{n}P_{r} = {}^{n}P_{r+1}$ है।

11.4 कुछ प्रतिबन्धों के अन्तर्गत क्रमचय

अब हम क्रमचयों से सम्बन्धित कुछ उदाहरण देखेंगे जिनमें कुछ अतिरिक्त प्रतिबन्ध लगे हैं।

उदाहरण 11.13. मान लीजिए कि 7 विद्यार्थी एक शयनागार में ठहरे हैं और उन्हें 7 पलंग आबंटित किए गए हैं। उनमें से प्रवीण, अंजू के निकट के पलंग को नहीं चाहता, क्योंकि अंजू खर्राटे भरती है। आप कितनी विधियों से पलंग आबंटित कर सकते हैं?

हल : मान लीजिए कि पलंगों कि संख्या 1 से 7 तक है।

स्थिति 1 : यदि अंजू को पलंग संख्या 1 दिया गया है, तो प्रवीण को पलंग संख्या 2 नहीं दिया जा सकता। इसलिए प्रवीण को पलंग 5 विधियों से आबंटित किया जा सकता है। प्रवीण के आबंटन के

पश्चात्, शेष 5 पलंगों में से शेष विद्यार्थियों को 5! विधियों से पलंग आबंटित किए जा सकते हैं।

अतः, इस स्थिति में पलंगों के आबंटन की विधियों की संख्या $5 \times 5! = 600$

स्थिति 2 : अंजू को पलंग संख्या 7 दिया गया है। तब प्रवीण को पलंग संख्या 6 नहीं दिया जा सकता है। जैसा कि स्थिति 1 में है, आबंटनों की संख्या $= 600$

स्थिति 3 : अंजू को पलंग संख्या 2,3,4,5 अथवा 6 में से कोई पलंग दिया गया है। तब प्रवीण को उसके बाएँ और दाएँ का पलंग नहीं दिया जा सकता है। उदाहरणार्थ, यदि अंजू को पलंग संख्या 2 दिया गया हो, तो प्रवीण को पलंग संख्या 1 तथा 3 नहीं दिए जा सकते हैं।

अतः, प्रत्येक अवस्था में प्रवीण को 4 विधियों से पलंग दिया जा सकता है।

अतः, इस स्थिति में आबंटनों की संख्या $= 4 \times 5! = 480$

अतः, कुल आबंटनों की संख्या $= (2 \times 600 + 5 \times 480) = (1200 + 2400) = 3600$

उदाहरण 11.14. एक पशु प्रशिक्षक 5 शेर और 4 चीते एक पंक्ति में कितनी विधियों से खड़ा कर सकता है ताकि दो शेर एक साथ न रहें?

हल : उन्हें निम्न विधि से व्यवस्थित करना है :

L	T	L	T	L	T	L	T	L

5 शेर 5 स्थानों, जिन्हें L से दिखाया गया है, में व्यवस्थित करने हैं। यह 5! विधियों से किया जा सकता है।

4 चीते 4 स्थानों, जिन्हें T से दिखाया गया है, में व्यवस्थित करने हैं। यह 4! विधियों से किया जा सकता है।

इसलिए शेर और चीते $5! \times 4!$ विधियों $= 2880$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

उदाहरण 11.15. परियों की कहानियों पर 4 पुस्तकों, 5 उपन्यास और 3 नाटक की पुस्तकों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है कि परियों की कहानी की पुस्तकें एक साथ, उपन्यास एक साथ तथा नाटक एक साथ रहें और क्रम परियों की कहानी, उपन्यास तथा नाटक हो।

हल : परियों की कहानी की 4 पुस्तकें हैं और उन्हें एक साथ रखना है। यह 4! विधियाँ से किया जा सकता है।

इसी प्रकार, 5 उपन्यास हैं। इन्हें 5! विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

साथ ही, 3 नाटक हैं। इन्हें 3! विधियों से रखा जा सकता है।

अतः, गणन के सिद्धान्त से, सबको साथ रखने की कुल विधियों की संख्या $= 4! \times 5! \times 3! = 17280$

उदाहरण 11.16. मान लीजिए कि परियों की कहानी की 4 पुस्तकें, 5 उपन्यास तथा 3 नाटक हैं, जैसा उदाहरण 11.15 में है। उन्हें इस प्रकार व्यवस्थित करना है कि परियों की कहानी की पुस्तकें एक साथ रहें, उपन्यास एक साथ रहें तथा नाटक एक साथ रहें, परन्तु अब हम यह नहीं चाहते कि उनका कोई विशिष्ट क्रम हो। कितनी विधियों से यह किया जा सकता है?

हल : आइए पहले हम परियों की कहानी की पुस्तकों, उपन्यासों तथा नाटकों को एक–एक वस्तु मान लें।

इन तीन वस्तुओं के विन्यास $= 3! = 6$

अब हम इनमें से एक विशिष्ट क्रम माना उपन्यास→परियों की कहानी→नाटक, लेते हैं।

इस क्रम में, एक विषय की पुस्तकें निम्न प्रकार से व्यवस्थित की जा सकती हैं : उपन्यास की 5 पुस्तकें $5! = 120$ विधियों से व्यवस्थित की जा सकती हैं।

परियों की कहानी की 4 पुस्तकों को हम $4! = 24$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं तथा

3 नाटक $3! = 6$ विधियों से व्यवस्थित किए जा सकते हैं।

इस विशिष्ट क्रम में कुल क्रमचयों की संख्या $= 120 \times 24 \times 6 = 17280$

$\therefore$ 6 सम्भावित क्रमों के लिए कुल क्रमचयों की संख्या $= 6 \times 17280 = 103680$

उदाहरण 11.17. कितनी विधियों से 4 लड़कियों तथा 5 लड़कों को एक पंक्ति में खड़ा किया जा सकता है ताकि चारों लड़कियाँ इकट्ठी रहें?

हल : मान लीजिए कि 4 लड़कियों का एक समूह है इस समूह के साथ 5 लड़के मिलकर 6 इकाई बन जाते हैं। इन्हें $6!$ विधियों से खड़ा किया जा सकता है।

परन्तु 4 लड़कियों को आपस में $4!$ विधियों से खड़ा किया जा सकता है।

$\therefore$ कुल क्रमचयों की वाँछित संख्या $= 6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$

उदाहरण 11.18. 'BENGALI' शब्द के अक्षरों को कितने प्रकार से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि स्वर हमेशा इकट्ठे हों?

हल : शब्द 'BENGALI' में 7 अक्षर हैं, जिनमें से 3 स्वर तथा 4 व्यंजन हैं।

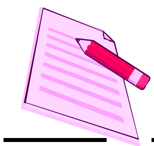
स्वर a, e, i को एक अक्षर मानकर हम $4+1$ अक्षरों को $5!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। जिनमें स्वर सदा इकट्ठे रहेंगे। इन 3 स्वरों को आपस में $3!$ विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं। अतः कुल शब्दों की संख्या $= 5! \times 3! = 120 \times 6 = 720$

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. श्री गुप्ता, श्रीमती गुप्ता अपने चार बच्चों के साथ यात्रा कर रहे हैं। उन्हें दो नीचे की शायिकाएँ, दो बीच की शायिकाएँ तथा दो ऊपर की शायिकाएँ आबंटित की गई हैं। श्री गुप्ता के घुटने का ऑपरेशन हुआ है। इसलिए उन्हें नीचे की शायिका चाहिए। श्रीमती गुप्ता यात्रा के दौरान आराम करना चाहती हैं। इसलिए उन्हें ऊपर की शायिका चाहिए। कितनी विधियों से परिवार द्वारा शायिकाएँ आपस में बाँटी जा सकती हैं?

2. शब्द UNBIASED पर विचार कीजिए। इस शब्द के अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जिनमें कोई दो स्वर एक साथ न रहें?

3. 4 गणित की पुस्तकें, 5 अंग्रेजी की पुस्तकें और 6 विज्ञान की पुस्तकें हैं। इन्हें कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है, यदि एक विषय की पुस्तक साथ रहें और उनका क्रम गणित $\rightarrow$ अंग्रेजी $\rightarrow$ विज्ञान हो?



4. 3 भौतिकी, 4 रसायन, 5 वनस्पति विज्ञान तथा 3 जंतु विज्ञान की पुस्तकें हैं। इन्हें आप कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं, ताकि एक विषय की पुस्तकें सदैव एक साथ रहें?

5. 4 लड़कों और 3 लड़कियों को 7 कुर्सियों पर इस प्रकार बैठाना है कि दो लड़के इकट्ठे न बैठें। ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है?

6. निम्न अवस्थाओं में शब्द 'TENDULKAR' के अक्षरों से कितने क्रमचय बन सकते हैं?

   (i) T से आरम्भ तथा R पर समाप्त (ii) स्वर सदा इकट्ठे रहें (iii) स्वर कभी इकट्ठे न हों

11.5 संचय

आइए भूमिका में वर्णित उदाहरण पर फिर विचार करें। मान लीजिए कि आपके पास कमीज और पैन्ट के 4 सेट (जोड़े) हैं। जब आप यात्रा पर जा रहे हैं, तो दो सेट साथ ले जाना चाहते हैं। यह कार्य कितनी विधियों से किया जा सकता है?

मान लीजिए कि हम सेटों को S_1, S_2, S_3, S_4 से व्यक्त करते हैं। तब दो जोड़ों का चयन निम्न विधियों से किया जा सकता है :

1. $\{S_1, S_2\}$	2. $\{S_1, S_3\}$	3. $\{S_1, S_4\}$
4. $\{S_2, S_3\}$	5. $\{S_2, S_4\}$	6. $\{S_3, S_4\}$

ध्यान से देखें $\{S_1, S_2\}$ वही है, जो $\{S_2, S_1\}$ है। अतः, दो जोड़े जो आप अपने साथ ले जाना चाहते हैं उनके चयन की 6 विधियाँ हैं। निस्सन्देह, यदि आपके पास 10 जोड़े होते और 7 जोड़े ले जाना चाहते, तो जोड़ों की संख्या ऊपर दी गई विधि से ज्ञात करना बहुत कठिन होता।

अब जैसे आप 4 जोड़ों में से 2 जोड़े दो दिन जैसे सोमवार और मंगलवार को पहनने की विधियों की संख्या जानना चाहेंगे, जहाँ पहनने का क्रम भी आपके लिए महत्त्वपूर्ण है। हम पहले ही पढ़ चुके हैं कि यह ${}^4P_2 = 12$ विधियों से किया जा सकता है। परन्तु ध्यान दें 4 सेट में से दो सेट का प्रत्येक चयन आपको पहनने की दो विधियाँ प्रदान करता है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है :

1. $\{S_1,S_2\} \rightarrow$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_2 या सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_1
2. $\{S_1,S_3\} \rightarrow$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_3 या सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_1
3. $\{S_1,S_4\} \rightarrow$ सोमवार को S_1 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_1
4. $\{S_2,S_3\} \rightarrow$ सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_3 या सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_2
5. $\{S_2,S_4\} \rightarrow$ सोमवार को S_2 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_2
6. $\{S_3,S_4\} \rightarrow$ सोमवार को S_3 तथा मंगलवार को S_4 या सोमवार को S_4 तथा मंगलवार को S_3

इस प्रकार, 4 जोड़ों में से 2 के पहनने की विधियाँ 12 हैं।

निम्नलिखित प्रमेय से हम देखते हैं कि यह तर्क व्यापक रूप से भी लागू होता है :

प्रमेय 11.3 मान लीजिए कि $n \geq 1$ एक पूर्णांक है और $r \leq n$ है। पुनः मान लीजिए कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की संख्या ${}^nC_r$ से व्यक्त की जाती है। तब,

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!} \qquad \text{... (11.5)}$$

उपपत्ति : n वस्तुओं में से r वस्तुओं को ^nC_r विधियों से चुन सकते हैं। प्रत्येक चुनी r वस्तुएँ, $r!$ विधियों से व्यवस्थित की जा सकती हैं। अतः, गणन सिद्धान्त से, r वस्तुओं को चुनना तथा चुनी हुई r वस्तुओं को $^nC_r.r!$ विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है। स्पष्टतः यह ^nP_r है।

$$^nP_r = r!.^nC_r \qquad \dots (11.6)$$

दोनों पक्षों को $r!$ से भाग देने पर, हमें प्रमेय में दिया गया परिणाम प्राप्त हो जाता है।

अब हम एक उदाहरण दे रहे हैं, जो आपको ^nC_r से परिचित कराने में सहायक होगा।

उदाहरण 11.19. निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए :

(a) $^5C_2$ (b) $^5C_3$ (c) $^4C_3 + {}^4C_2$ (d) $\dfrac{^6C_3}{^4C_2}$

हल : (a) $^5C_2 = \dfrac{^5P_2}{2!} = \dfrac{5.4}{1.2} = 10$ (b) $^5C_3 = \dfrac{^5P_3}{3!} = \dfrac{5.4.3}{1.2.3} = 10$

(c) $^4C_3 + {}^4C_2 = \dfrac{^4P_3}{3!} + \dfrac{^4P_2}{2!} = \dfrac{4.3.2}{1.2.3} + \dfrac{4.3}{1.2} = 4 + 6 = 10$

(d) $^6C_3 = \dfrac{^6P_3}{3!} = \dfrac{6.5.4}{1.2.3} = 20$ तथा $^4C_2 = \dfrac{4.3}{1.2} = 6$

$\therefore \dfrac{^6C_3}{^4C_2} = \dfrac{20}{6} = \dfrac{10}{3}$

उदाहरण 11.20. समुच्चय $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$ के उन उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 4 अवयव हों।

हल : यहाँ अवयवों को चुनने में क्रम का महत्त्व नहीं है और यह संचय का प्रश्न है।

हमें इस समुच्चय के, जिनमें 11 अवयव हैं, चार अवयवों को चुनने की विधियों की संख्या ज्ञात करनी है। समबन्ध (11.5) से, इसे

$^{11}C_4 = \dfrac{11.10.9.8}{1.2.3.4} = 330$ विधियों से किया जा सकता है।

उदाहरण 11.21. एक वृत्त पर 12 बिन्दु दिए हुए हैं। इन बिन्दुओं का प्रयोग करके कितने चक्रीय चतुर्भुज खींचे जा सकते हैं?

हल : चार बिन्दुओं के किसी भी समुच्चय से हमें एक चक्रीय चतुर्भुज प्राप्त होता है। 12 बिन्दुओं में से 4 बिन्दुओं को चुनने की विधियों की संख्या $^{12}C_4 = 495$ ।

अतः, हम 495 चक्रीय चतुर्भुज खींच सकते हैं।

उदाहरण 11.22. एक बक्से में 5 काले, 3 सफेद और 4 लाल कलम हैं। कितनी विधियों से 2 काले, 2 सफेद, 2 लाल कलम चुने जा सकते हैं?

हल : 5 काले कलमों में से 2 काले कलम चुनने की विधियों की संख्या $= {}^5C_2 = \frac{{}^5P_2}{2!} = \frac{5.4}{1.2} = 10$

3 सफेद कलमों में से 2 सफेद कलम चुनने की विधियों की संख्या $= {}^3C_2 = \frac{{}^3P_2}{2!} = \frac{3.2}{1.2} = 3$

4 लाल कलमों में से 2 लाल कलम चुनने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2 = \frac{{}^4P_2}{2!} = \frac{4.3}{1.2} = 6$

$\therefore$ गणन सिद्धान्त से, 2 काले कलम, 2 सफेद कलमों तथा 2 लाल कलम के चयन करने की $10 \times 3 \times 6 = 180$ विधियाँ हो सकती हैं!

उदाहरण 11.23. एक प्रश्न पत्र, जिसमें 10 प्रश्न हैं, को दो भागों A और B में विभाजित किया गया है। प्रत्येक भाग में 5 प्रश्न हैं। एक परीक्षार्थी को कुल 6 प्रश्न करने हैं, जिनमें कम–से–कम 2 प्रश्न भाग A तथा कम–से–कम 2 प्रश्न भाग B से हों। परीक्षार्थी कितनी विधियों से प्रश्नों का चयन कर सकता है, यदि वह सभी प्रश्नों को समान रूप से सही हल कर सकता हो?

हल : परीक्षार्थी को कुल 6 प्रश्नों का चयन करना है, जिनमें कम–से–कम 2 प्रश्न भाग A से तथा कम–से–कम 2 प्रश्न भाग B से होने चाहिए। वह प्रश्नों को निम्न विधियों से चुन सकता है :

	भाग A	भाग B
(i)	2	4
(ii)	3	3
(iii)	4	2

चयन (i) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या $= {}^5C_2 \times {}^5C_4 = 10 \times 5 = 50$

चयन (ii) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या $= {}^5C_3 \times {}^5C_3 = 10 \times 10 = 100$

चयन (iii) का अनुसरण करने पर, विधियों की संख्या $= {}^5C_4 \times {}^5C_2 = 50$

अतः, चयन की विधियों की कुल संख्या = 50 + 100 + 50 = 200

उदाहरण 11.24. 6 पुरुषों तथा 4 महिलाओं में से 5 व्यक्तियों की एक कमेटी का गठन करना है। यह कितनी विधियों से किया जा सकता है, यदि

(i) कम–से–कम 2 महिलाएँ इसमें सम्मिलित हों?

(ii) अधिक–से–अधिक 2 महिलाएँ इसमें सम्मिलित हों?

हल : (i) जब कम–से–कम 2 महिलाएँ सम्मिलित हों :

(a) 2 महिलाएँ और 3 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2 \times {}^6C_3$

(b) 3 महिलाएँ और 2 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_3 \times {}^6C_2$

(c) 4 महिलाएँ और 1 पुरुष सम्मिलित हो सकते हैं : ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_4 \times {}^6C_1$

$\therefore$ कमेटी बनाने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2 . {}^6C_3 + {}^4C_3 . {}^6C_2 + {}^4C_4 . {}^6C_1 = 4 \times 15 + 1 \times 6 + 6 \times 20 = 60 + 6 + 120 = 186$$

(ii) जब अधिक–से–अधिक 2 महिलाएँ सम्मिलित हों :

(a) 2 महिलाएँ, 3 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_2 . {}^6C_3$

(b) 1 महिला, 4 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^4C_1 . {}^6C_4$

(c) 5 पुरुष हो सकते हैं। ऐसा करने की विधियों की संख्या $= {}^6C_5$

$\therefore$ कमेटी बनाने की विधियों की कुल संख्या

$$= {}^4C_2 . {}^6C_3 + {}^4C_1 . {}^6C_4 + {}^6C_5 = 6 \times 20 + 4 \times 15 + 6 = 120 + 60 + 6 = 186$$

उदाहरण 11.25. भारतीय क्रिकेट टीम में 16 खिलाड़ी हैं। इसमें 2 विकेटकीपर तथा 5 गेंदबाज हैं। एक क्रिकेट एकादश के 11 खिलाड़ी कितनी विधियों से चुने जा सकते हैं, जबकि 1 विकेटकीपर तथा कम–से–कम 4 गेंदबाज चुने जाने हैं?

हल : हम 1 विकेटकीपर तथा 4 गेंदबाज या 1 विकेटकीपर तथा 5 गेंदबाज चुन सकते हैं।

1 विकेटकीपर, 4 गेंदबाज तथा 6 अन्य खिलाड़ियों को चुनने की विधियों की संख्या

$$= {}^2C_1 . {}^5C_4 . {}^9C_6 = 2 \times \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2.1}{4.3.2.1.} \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 5 \times \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2 \times 1} = 840$$

1 विकेटकीपर, 5 गेंदबाज तथा 5 अन्य खिलाड़ियों को चुनने की विधियों की संख्या

$$= {}^2C_1 . {}^5C_5 . {}^9C_5 = 2 \times 1 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 2 \times 1 \times \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 252$$

$\therefore$ टीम चुनने की विधियों की कुल संख्या = 840 + 252 = 1092

देखें आपने कितना सीखा 11.6

1. (a) मान ज्ञात कीजिए :

(i) ${}^{13}C_3$ (ii) ${}^9C_5$ (iii) ${}^8C_2 + {}^8C_3$ (iv) $\dfrac{{}^9C_3}{{}^6C_3}$

(b) जाँच कीजिए कि निम्नलिखित में से कौन से कथन सत्य हैं तथा कौन से कथन असत्य हैं :

(i) ${}^5C_2 = {}^5C_3$ (ii) ${}^4C_3 \times {}^3C_2 = {}^{12}C_6$

(iii) ${}^4C_2 + {}^4C_3 = {}^8C_5$ (iv) ${}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 = {}^{11}C_3$

2. समुच्चय $\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, ..., 23\}$ के उन उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें 3 अवयव हों।

3. 14 बिन्दु एक वृत्त पर स्थित हैं। इन बिन्दुओं का प्रयोग करके कितने पंचभुज खींचे जा सकते हैं?

4. फलों की एक टोकरी में 5 सेब, 7 आलू बुखारे तथा 11 नारंगियाँ हैं। आपको इनमें से 3 फल चुनने हैं। आप कितनी विधियों से अपनी पसन्द बना सकते हैं?

5. एक प्रश्न पत्र, जिसमें 12 प्रश्न हैं, को दो भागों A तथा B में विभाजित किया गया है, जिनमें क्रमशः 5 तथा 7 प्रश्न हैं। एक विद्यार्थी को कुल 6 प्रश्न करने हैं, जिनमें प्रत्येक भाग से कम–से–कम 2 प्रश्न करना आवश्यक है। वह विद्यार्थी कितनी विधियों से प्रश्नों का चयन कर सकता है?

6. 5 पुरुषों तथा 3 महिलाओं मे से 3 व्यक्तियों की एक कमेटी का गठन करना है। यह कितनी विधियों से किया जा सकता है, जबकि इसमें

   (i) ठीक 1 महिला हो? (ii) कम–से–कम 1 महिला हो?

7. एक क्रिकेट टीम में 17 खिलाड़ी हैं, जिनमें 2 विकेटकीपर तथा 4 गेंदबाज हैं। कितनी विधियों से इनमें से 11 खिलाड़ी चुने जा सकते हैं, यदि 1 विकेटकीपर तथा कम–से–कम तीन गेंदबाजों का चयन करना हो?

8. 5 रिक्त स्थानों की भर्ती के लिए 25 उम्मीदवारों ने प्रार्थना पत्र दिए। इन उम्मीदवारों में 7 अनुसूचित जाति तथा 8 अन्य पिछड़ी जाति के उम्मीदवार थे। यदि 2 स्थान अनुसूचित जाति तथा 1 स्थान पिछड़ी जाति के लिए सुरक्षित हों, तो चयन करने की कुल विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

11.6 ${}^nC_r$ के कुछ सरल गुण

इस अनुच्छेद में, हम ${}^nC_r$ के कुछ सरल गुणों को सिद्ध करेंगे जो इसके मानों के अभिकलनों को सरल बनाएँगे। आइए हम प्रमेय 11.3 का अवलोकन करें। सम्बन्ध 11.6 का प्रयोग करके ${}^nC_r$ के सूत्र को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad ....(11.7)$$

उदाहरण 11.26. ${}^nC_0$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $r = 0$ है।

$$\therefore \; {}^nC_0 = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{0!} = 1,$$

क्योंकि हमने $(0! = 1)$ परिभाषित किया है।

प्रमेय 11.3 में दिए गए सूत्र को हमने पिछले अनुच्छेद में प्रयोग किया था। अब हम शीघ्र ही देखेंगे कि समीकरण 11.7 में दिया गया सूत्र ${}^nC_r$ के कुछ गुणों को सिद्ध करने में लाभदायक होगा।

$$ {}^nC_r = {}^nC_{n-r} \qquad ...(11.8)$$

इसका अर्थ यही है कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की विधियों की संख्या वही है, जो n वस्तुओं में से $(n-r)$ वस्तुओं के न चुनने की विधियों की संख्या है। भूमिका में चर्चित उदाहरण का ठीक

यही अर्थ है कि 2 जोड़े वस्त्रों के चुनने की विधियों की संख्या वही है जो $4-2=2$ जोड़े वस्त्रों को न लेने की विधियों की संख्या है। उदाहरण 11.20 में इसका अर्थ है कि 4 अवयवों के उपसमुच्चय के चुनने की विधियों की संख्या वही है जो 8 अवयवों के उपसमुच्चय के न चुनने की है। क्योंकि 4 अवयवों के एक विशेष उपसमुच्चय का चुनना उसके आठ अवयवों वाले पूरक समुच्चय को न चुनने के तुल्य है।

आइए अब इस सम्बन्ध को समीकरण 11.7 का प्रयोग करके सिद्ध करें। इस समीकरण के दायें पक्ष के हर में $r!\,(n-r)!$ है। इससे कोई अन्तर नहीं पड़ता यदि हम r के स्थान पर $n-r$ रख दें जैसाकि नीचे दर्शाया गया है?

$$(n-r)!.[n-(n-r)]! = (n-r)!.r!$$

अंश r से स्वतन्त्र है। इसलिए समीकरण 11.7 में r के स्थान पर $n-r$ रखने पर, हमें परिणाम (11.8) प्राप्त हो जाता है।

सम्बन्ध 11.8 कितना लाभदायक है? उदाहणार्थ इस सूत्र का प्रयोग करके ${}^{100}C_{98}$ को ${}^{100}C_2$ के बराबर प्राप्त करते हैं। द्वितीय मान की गणना प्रथम की तुलना में बहुत सरल है।

उदाहरण 11.27. मान ज्ञात कीजिए :

(a) ${}^{7}C_5$ (c) ${}^{10}C_9$ (b) ${}^{11}C_9$ (d) ${}^{12}C_9$

हल : (a) सम्बन्ध 11.8 से, ${}^{7}C_5 = {}^{7}C_{7-5} = {}^{7}C_2 = \dfrac{7.6}{1.2} = 21$

(b) इसी प्रकार ${}^{10}C_9 = {}^{10}C_{10-9} = {}^{10}C_1 = 10$

(c) ${}^{11}C_9 = {}^{11}C_{11-9} = {}^{11}C_2 = \dfrac{11.10}{1.2} = 55$

(d) ${}^{12}C_{10} = {}^{12}C_{12-10} = {}^{12}C_2 = \dfrac{12.11}{1.2} = 66$

एक बहुत उपयोगी सम्बन्ध, जो ${}^{n}C_r$ द्वारा सन्तुष्ट होता है:

$${}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r = {}^{n}C_r \qquad \text{....(11.9)}$$

$$\begin{aligned}
{}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r &= \frac{(n-1)!}{(n-r)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!r!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!(r-1)!} + \frac{(n-1)!}{r(n-r-1)!(r-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left[\frac{1}{n-r} + \frac{1}{r}\right] \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-r-1)!(r-1)!}\left[\frac{n}{(n-r)r}\right] \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-r)(n-r-1)!r(r-1)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}^{n}C_r
\end{aligned}$$

उदाहरण 11.28. मान ज्ञात कीजिए :

(a) ${}^6C_2+{}^6C_1$ (b) ${}^8C_2+{}^8C_1$ (c) ${}^5C_3+{}^5C_2$ (d) ${}^{10}C_2+{}^{10}C_3$

हल : (a) संबंध (11.9) में, $n = 7$ और $r = 2$। इसलिए, ${}^6C_2+{}^6C_1={}^7C_2=21$

(b) यहाँ पर $n = 9,\ \ r = 2$। $\therefore\ {}^8C_2+{}^8C_1={}^9C_2=36$

(c) यहाँ पर $n = 6,\ \ r = 3$। $\therefore\ {}^5C_3+{}^5C_2={}^6C_3=20$

(d) यहाँ पर $n = 11, r = 3$। $\therefore\ {}^{10}C_2+{}^{10}C_3={}^{11}C_3=165$

यदि ${}^nC_{10}={}^nC_{12}$ हो, तो n ज्ञात कीजिए।

हल : ${}^nC_r={}^nC_{n-r}$ का प्रयोग करते हुए,

$n - 10 = 12$ या $n = 12 + 10 = 22$

देखें आपने कितना सीखा 11.7

1. (a) ${}^nC_{n-1}$ का मान ज्ञात कीजिए। क्या ${}^nC_{n-1}={}^nC_n$? (b) दर्शाइए कि ${}^nC_n={}^nC_0$।
2. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) ${}^9C_5$ (b) ${}^{14}C_{10}$ (c) ${}^{13}C_9$ (d) ${}^{15}C_{12}$
3. मान ज्ञात कीजिए :

   (a) ${}^7C_3+{}^7C_2$ (b) ${}^8C_4+{}^8C_5$ (c) ${}^9C_3+{}^9C_2$ (d) ${}^{12}C_3+{}^{12}C_2$
4. यदि ${}^{10}C_r={}^{10}C_{2r+1}$ हो, तो r का मान ज्ञात कीजिए।
5. यदि ${}^{18}C_r={}^{18}C_{r+2}$ हो, तो ${}^rC_5$ का मान ज्ञात कीजिए।

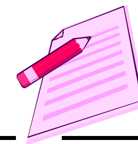
11.7 क्रमचय तथा संचय दोनों से सम्बन्धित समस्याएँ

अभी तक हमने या तो केवल क्रमचय से संबद्ध या केवल संचय से संबद्ध प्रश्नों का अध्ययन किया है। इस अनुच्छेद में, हम कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे, जिनमें दोनों संकल्पनाओं की आवश्यकता होगी।

उदाहरण 11.30. 5 उपन्यास तथा 4 जीवनियाँ दी हुई हैं। एक शैल्फ पर इनमें से 4 उपन्यासों और 2 जीवनियों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है?

हल : 5 में से 4 उपन्यास ${}^5C_4$ विधियों से चुने जा सकते हैं तथा 4 में से 2 जीवनियाँ ${}^4C_2$ विधियों से चुनी जा सकती हैं।

उपन्यासों तथा जीवनियों के चयन की संख्या = ${}^5C_4\times{}^4C_2=5\times6=30$



टिप्पणी

30 विधियों में से किसी एक विधि से 6 पुस्तकों (4 उपन्यास और 2 जीवनियाँ) चुनने के पश्चात्, उन्हें शैल्फ पर $6! = 720$ विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है।

गणन सिद्धान्त से, व्यवस्थाओं की कुल संख्या $= 30 \times 720 = 21600$

उदाहरण 11.31. 5 व्यंजनों तथा 4 स्वरों में से 3 व्यंजनों तथा 2 स्वरों वाले कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

हल : 5 व्यंजनों में से 3 व्यंजन ${}^5C_3$ विधियों से चुने जा सकते हैं तथा 4 स्वरों में से 2 स्वर ${}^4C_2$ विधियों से चुने जा सकते हैं। प्रत्येक चयन के साथ, 5 अक्षरों को व्यवस्थित करने की विधियों की संख्या $= {}^5P_5$ ।

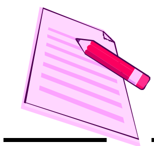
$\therefore$ कुल शब्दों की संख्या $= {}^5C_3 \times {}^4C_2 \times {}^5P_5 = \dfrac{5\times4}{2\times1} \times \dfrac{4\times3}{2\times1} \times 5! = 10\times6\times5\times4\times3\times2\times1 = 7200$

देखें आपने कितना सीखा 11.8

1. गणित की 5 पुस्तकें, भौतिकी की 4 पुस्तकें तथा रसायन की 5 पुस्तकें हैं। इनमें से 4 गणित, 3 भौतिकी तथा 4 रसायन की पुस्तकें आप कितनी विधियों से व्यवस्थित कर सकते हैं यदि
   (a) एक ही विषय की पुस्तकें एक साथ रखी जाएँ, परन्तु एक विषय के अन्दर, इसकी पुस्तकों का क्रम कया है इसका महत्त्व नहीं है?
   (b) पुस्तकों को विषय अनुसार ही रखा जाए तथा विषय के अन्दर पुस्तकों के क्रम का भी महत्त्व है?
2. 9 व्यंजनों तथा 5 स्वरों में से 7 अक्षरों के कितने शब्द बनाए जा सकते हैं, जबकि इनमें से 4 व्यंजन तथा 3 स्वर लेने हैं?
3. आप अपने 6 मित्रों में से कम–से–कम एक मित्र को रात के खाने पर कितनी विधियों से आमन्त्रण दे सकते हैं?
4. एक परीक्षा में एक परीक्षार्थी को 4 भिन्न विषयों में सफल होना है। वह कितनी विधियों से असफल हो सकता है?

आइये दोहराएँ

- **गणन के मूलभूत सिद्धान्त का कथन है :**
  यदि n घटनाएँ हैं और प्रथम घटना m_1 विधियों से घटित हो सकती है, प्रथम घटना के घटित होने के पश्चात् द्वितीय घटना m_2 विधियों से घटित हो सकती है, द्वितीय घटना के घटित होने के पश्चात् तृतीय घटना m_3 विधियों से घटित हो सकती है, इत्यादि, तो सभी घटनाओं के घटित होने की कुल विधियाँ $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \ldots\ldots \times m_{n-1} \times m_n$ होंगी।
- n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या $= n!$
- ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- ${}^nP_n = n!$
- n वस्तुओं में से r वस्तुओं के चुनने की विधियों की संख्या ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$
- ${}^{n-1}C_r + {}^{n-1}C_{r-1} = {}^nC_r$



टिप्पणी

सहायक वेबसाइट

- *www.mathsisfun.com/combinatorics/combinations-permutations.html*
- *https://www.youtube.com/watch?v=M9prgasECts*
- *https://www.youtube.com/watch?v=K6Cmt8CMPaE*

आइए अभ्यास करें

1. एक प्रश्नपत्र में 8 सत्य–असत्य प्रश्न हैं। इनके कितने उत्तर सम्भव हैं?
2. एक पासे के छः फलकों पर 1,2,3,4,5 और 6 लिखा होता है। ऐसे दो पासों को एक साथ उछाला जाता है। वे कितनी विधियों से गिर सकते हैं?
3. एक जलपान गृह में 3 सब्जियाँ, 2 सलाद और 2 प्रकार की ब्रेड हैं। यदि कोई ग्राहक 1 सब्जी, 1 सलाद, 1 ब्रेड खाना चाहता है, तो वह कितनी विधियों से इनका चयन कर सकता है?
4. मान लीजिए कि आप अपनी दीवारों पर कागज लगाना चाहते हैं। दीवार पर चिपकाने के कागज 4 भिन्न रंगों के हैं। उन पर 5 भिन्न रंगों के 7 भिन्न डिज़ाइन (designs) हैं। कितनी विधियों से इन कागजों का चयन किया जा सकता है?
5. 7 विद्यार्थियों को एक पंक्ति में 7 स्थानों पर कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है?
6. *ALTRUISM* शब्द के अक्षरों से 8 अक्षरों वाले कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?
7. यदि आपके घर में 5 खिड़कियाँ और 8 पर्दे हैं, तो आप कितनी विधियों से खिड़कियों पर पर्दे लगा सकते हैं?
8. शब्द *POLICY* के अक्षरों में से तीन अक्षरों को लेकर, अधिकतम कितने शब्द बन सकते हैं?
9. दौड़ की एक प्रतियोगिता में 10 खिलाड़ी भाग ले रहे हैं। तीन पुरस्कार प्रथम, द्वितीय तथा तृतीय दिए जाने हैं। ये पुरस्कार कितनी विधियों से दिए जा सकते हैं?
10. शब्द *ATTAIN* के अक्षरों को कितनी विधियों से व्यवस्थित किया जा सकता है ताकि दोनों T तथा दोनों *A* एक साथ रहें?
11. 12 मित्रों का एक समूह एक प्रीतिभोज में मिलता है। इनमें से प्रत्येक व्यक्ति अन्य सभी से एक बार हाथ मिलाता है। हाथ मिलाने की कुल संख्या ज्ञात कीजिए।
12. मान लीजिए कि आपके पास एक दुकान है, जहाँ टेलीविजन बिकते हैं। आप 5 भिन्न प्रकार के टेलीविजन सेट बेच रहे हैं, परन्तु दिखाने के लिए आपके शोकेस में केवल 3 टेलीविजन सेट रखने का ही स्थान है। दिखाने के लिए आप कितनी विधियों से टेलीविजन सेटों का चयन कर सकते हैं?
13. एक ठेकेदार को 4 बढ़इयों की आवश्यकता है। समान योग्यता वाले पाँच बढ़ई इस काम के लिए आवेदन देते हैं। ठेकेदार कितनी विधियों से बढ़इयों का चुनाव कर सकता है?
14. 13 व्यक्तियों के एक समूह में से 9 सदस्यों की एक समिति कितनी विधियों से बनाई जा सकती है?

15. 15 पुरुषों और 12 महिलाओं के एक समूह में से 3 पुरुष और 2 महिलाएँ चुनकर एक समिति कितनी विधियों से बनाई जा सकती है?

16. 4 ग्रेड (grade) I और 7 ग्रेड II अधिकारियों में से 6 व्यक्ति कितनी विधियों से चुने जा सकते हैं, ताकि प्रत्येक श्रेणी से कम–से–कम दो अधिकारी अवश्य ही लिए जाएँ?

17. 6 लड़कों और 4 लड़कियों में से 5 सदस्यों की एक समिति बनानी है। ऐसा कितनी विधियों से किया जा सकता है, यदि समिति में

    (a) ठीक 2 लड़कियाँ हों? (b) कम–से–कम 2 लड़कियाँ हों?

18. अंग्रेजी वर्णमाला में 5 स्वर और 21 व्यंजन हैं। इस वर्णमाला में से 2 भिन्न स्वर और 2 भिन्न व्यंजन लेकर बनाए जा सकने वाले शब्दों की अधिकतम संख्या क्या है?

19. 5 व्यंजनों और 5 स्वरों में से 3 व्यंजनों और 2 स्वरों का प्रयोग करते हुए, कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?

20. एक विद्यालय के वार्षिक समारोह में एक विविध कार्यक्रम आयोजित किया गया। 3 छोटे नाटक, 6 गायन और 4 नृत्य के कार्यक्रम की योजना बनाई गई। परन्तु समारोह के लिए आमन्त्रित मुख्य अतिथि ने अपने भाषण को समाप्त करने में आशा से बहुत अधिक समय ले लिया। शीघ्र ही समाप्त करने के लिए, यह निर्णय लिया गया कि केवल 2 नाटक, 4 गायन और 3 नृत्य के कार्यक्रम ही किए जाएँ। उन्हें चुनने की कितनी विधियाँ उपलब्ध थीं,

    (a) यदि कार्यक्रम किसी भी क्रम में किए गए?

    (b) यदि एक प्रकार के कार्यक्रम एक ही दौर में किए गए?

    (c) यदि एक प्रकार के कार्यक्रम एक ही दौर में किए गए और साथ–साथ एक प्रकार के कार्यक्रम के प्रदर्शन के क्रम का भी ध्यान रखा गया?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 11.1

1. (a) 180 (b) 8 (c) 12 2. (a) 48 (b) 20

देखें आपने कितना सीखा 11.2

1. (a) 17576 (b) 900 2. (a) 105 (b) 60

3. (a) 24 (b) 24

देखें आपने कितना सीखा 11.3

1. (a) (i) 720 (ii) 5040 (iii) 5046 (iv) 17280 (v) 10

   (b) (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) असत्य

2. (a) 120 (b) 40320 (c) 24

देखें आपने कितना सीखा 11.4

1. (a) (i) 12 (ii) 120 (iii) 4 (iv) 7200 (v) $n!$

(b) (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य

2. (a) (i) 7980 (ii) 9240 (b) 20 (c) 840

देखें आपने कितना सीखा 11.5

1. 96 2. 1152 3. 2073600 4. 2488320

5. 144 6. (i) 5040 (ii) 30240 (iii) 332640

देखें आपने कितना सीखा 11.6

1. (a) (i) 286 (ii) 126 (iii) 84 (iv) $\frac{21}{5}$

(b) (i) सत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य

2. 1771 3. 2002 4. 57750 5. 805

6. (i) 30 (ii) 46 7. 3564 8. 7560

देखें आपने कितना सीखा 11.7

1. (a) n , नहीं

2. (a) 126 (b) 1001 (c) 715 (d) 455

3. (a) 56 (b) 126 (c) 120 (d) 286

4. 3 5. 56

देखें आपने कितना सीखा 11.8

1 (a) 600 (b) 2073600 2. 6350400

3. 63 4. 15

आइए अभ्यास करें

1. 256	2. 36	3. 12	4. 140
5. 5040	6. 40320	7. 6720	8. 120
9. 720	10. 24	11. 66	12. 10
13. 5	14. 715	15. 30030	16. 371
17. (a) 120	(b) 186	18. 50400	19. 12000
20. (a) 65318400	(b) 1080	(c) 311040	

12

द्विपद प्रमेय

मान लीजिए कि आपने कोई धनराशि 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से लाभ के लिए लगाई है और आप परिकलन करना चाहते हैं कि 5 वर्ष बाद आपको मिलने वाले ब्याज की राशि कितनी होगी। अथवा मान लीजिए कि यदि हमें वृद्धि दर ज्ञात है और हम 10 वर्ष बाद देश की जनसंख्या का आकार ज्ञात करना चाहते हैं। एक परिणाम जो इन राशियों को ज्ञात करने में सहायक होगा, वह द्विपद प्रमेय है। जैसा कि आप देखेंगे, यह प्रमेय, किसी वास्तविक द्विपद व्यंजक अर्थात् दो पदों से संम्बद्ध व्यंजक की परिमेय घातांकों के परिकलन में हमारी सहायता करता है।

कुछ परिस्थितियों में द्विपद प्रमेय भारतीय तथा यूनानी गणितज्ञों को 300 ई. पू. में ज्ञात था। प्राकृतिक संख्या घाताकों के परिणाम का श्रेय एक अरब कवि तथा गणितज्ञ उमर खैय्याम (1048-1122 ई.) को जाता है। इससे आगे परिमेय घातांकों के लिए, और अधिक व्यापकीकरण ब्रिटिश गणितज्ञ न्यूटन (1642-1727 ई.) द्वारा किया गया।

गणितीय लाभ के अतिरिक्त, अधिकाधिक व्यापकीकरण का एक अन्य कारण था। यह कारण इसकी बहुत सी उपयोगिताएँ थीं। प्रारम्भ में चर्चित परिस्थितियों के अतिरिक्त द्विपद प्रमेय की अनेक उपयोगितायें प्रायिकता सिद्धान्त, अवकलन गणित तथा संख्याओं $(1.02)^7$ आदि की तरह के सन्निकट मान ज्ञात करने में है।

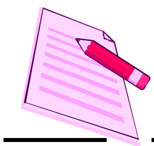
उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- धनात्मक पूर्णांक के लिए द्विपद प्रमेय का वर्णन करना तथा गणितीय आगमन के सिद्धान्त द्वारा इसे सिद्ध करना
- द्विपद प्रमेय के उपयोग से व्यंजक $(x+y)^n$ का n तथा y के भिन्न मानों के लिए, द्विपद प्रसार लिखना
- किसी द्विपद प्रसार का व्यापक तथा मध्य पद लिखना

पूर्व ज्ञान

- संख्या निकाय
- संख्याओं तथा ब्यंजकों पर चार मूल–भूत संक्रियाएँ
- बीजीय व्यंजक तथा उनका सरलीकरण
- घात तथा घातांक



12.1 प्राकृत संख्या घातांक के लिए द्विपद प्रमेय

आपने एक द्विपद का स्वयं उससे अथवा अन्य द्विपद से गुणा अवश्य किया होगा। इस ज्ञान का प्रयोग करते हुए, आइए कुछ प्रसार करें। द्विपद $(x + y)$ पर विचार कीजिए। अब,

$$(x + y)^1 = x + y$$

$$(x + y)^2 = (x + y)(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$$

$$(x + y)^3 = (x + y)(x + y)^2 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^4 = (x + y)(x + y)^3 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$(x + y)^5 = (x + y)(x + y)^4 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$ इत्यादि।

उपरोक्त समीकरणों में से प्रत्येक में, दायाँ पक्ष, बाएँ पक्ष का द्विपद प्रसार कहलाता है।

ध्यान दीजिए कि उपरोक्त प्रसार में से प्रत्येक में, हमने एक द्विपद की घात को प्रसारित रूप में इस प्रकार लिखा है कि उसके पद द्विपद के पहले पद (जो इन उदाहरणों में x है) की घटती हुई घातों के पदों में रहें। यदि आप इन प्रसारों को ध्यानपूर्वक देखें, तो आपके सम्मुख निम्न बातें आएँगी :

1. प्रसार में पदों की संख्या द्विपद के घातांक से एक अधिक है। उदाहरणार्थ, $(x + y)^4$ के प्रसार में पदों की संख्या 5 है।
2. प्रथम पद में x का घातांक द्विपद के घातांक के बराबर है तथा प्रसार के प्रत्येक उत्तरोत्तर पद में यह घातांक 1 कम होता जाता है।
3. प्रथम पद में y का घातांक शून्य है (चूँकि $y^0 = 1$)। दूसरे पद में y का घातांक 1 है। प्रत्येक उत्तरोत्तर पद में यह 1 बढ़ता जाता है, जब तक कि यह द्विपद की घातांक के बराबर नहीं हो जाता। ऐसा प्रसार के अन्तिम पद में होता है।
4. प्रत्येक पद में x और y के घातांकों का योग द्विपद के घातांक के समान होता है। उदाहरणार्थ $(x + y)^5$ के प्रसार में प्रत्येक पद में x और y के घातांकों का योग 5 है।

   यदि हम संचयी गुणांकों का प्रयोग करें, तो प्रसारों को इस प्रकार लिख सकते हैं :

   $(x + y)^3 = {}^3C_0\, x^3 + {}^3C_1 x^2y + {}^3C_2 x\, y^2 + {}^3C_3\, y^3$

   $(x + y)^4 = {}^4C_0 x^4 + {}^4C_1 x^3y + {}^4C_2 x^2y^2 + {}^4C_3 xy^3 + {}^4C_4\, y^4$

   $(x + y)^5 = {}^5C_0 x^5 + {}^5C_1 x^4y + {}^5C_2 x^3y^2 + {}^5C_3 x^2y^3 + {}^5C_4 xy^4 + {}^5C_5\, y^5$, इत्यादि।

   अधिक व्यापक रूप में, $(x + y)^n$ के द्विपद प्रसार को हम निम्न प्रमेय में दिए गए रूप में लिख सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है। यह कथन **प्राकृत संख्या (अथवा धनात्मक पूर्णांकीय) घातांक के लिए द्विपद प्रमेय कहलाता है।**

   प्रमेयः $(x + y)^n = {}^nC_0\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} y^1 + {}^nC_2\, x^{n-2} y^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n \ldots(A)$

   जहाँ $n \in N$ और $x, y \in R$।

उपपत्ति : आइए, इस प्रमेय को गणितीय आगमन के सिद्धान्त से सिद्ध करें। मान लीजिए हम कथन (A) को $P(n)$ से व्यक्त करते हैं। अर्थात्,

$$P(n):\ (x+y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + {}^nC_{n-1}xy^{n-1} + {}^nC_ny^n \quad \ldots(i)$$

आइए, जाँच करें कि $P(1)$ सत्य है अथवा नहीं। (i) से हमें निम्न प्राप्त होता है :

$P(1) : (x+y)^1 = {}^1C_0x + {}^1C_1\,y = 1\times x + 1\times y$

अर्थात्, $(x+y)^1 = x+y$ इस प्रकार, $P(1)$ सत्य है।

अब हम यह मान लेते हैं कि $P(k)$ सत्य है। अर्थात्,

$$P(k): (x+y)^k = {}^kC_0x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}y^2 + {}^kC_3x^{k-3}y^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_k\,y^k \quad \ldots(ii)$$

यह मानते हुए कि $P(k)$ सत्य है, यदि हम सिद्ध कर दें कि $P(k+1)$ भी सत्य है, तो $P(n)$ सभी n के लिए सत्य होगा। अब,

$$(x+y)^{k+1} = (x+y)(x+y)^k = (x+y)({}^kC_0x^k + {}^kC_1x^{k-1}y + {}^kC_2x^{k-2}y^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}xy^{k-1} + {}^kC_ky^k)$$

$$= {}^kC_0x^{k+1} + {}^kC_0x^ky + {}^kC_1x^ky + {}^kC_1x^{k-1}y^2 + {}^kC_2x^{k-1}y^2 + {}^kC_2x^{k-2}y^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}x^2y^{k-1} + {}^kC_{k-1}xy^k + {}^kC_kxy^k + {}^kC_ky^{k+1}$$

अर्थात्, $$(x+y)^{k+1} = {}^kC_0x^{k+1} + ({}^kC_0 + {}^kC_1)x^ky + ({}^kC_1 + {}^kC_2)x^{k-1}y^2 + \ldots + ({}^kC_{k-1} + {}^kC_k)xy^k + {}^kC_ky^{k+1} \quad \ldots(iii)$$

पाठ 11 से, आप जानते हैं कि ${}^kC_0 = 1 = {}^{k+1}C_0$ ....(iv)

और ${}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ साथ ही, ${}^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$

अतः, ${}^kC_0 + {}^kC_1 = {}^{k+1}C_1$ ....(v)

${}^kC_1 + {}^kC_2 = {}^{k+1}C_2$

${}^kC_2 + {}^kC_3 = {}^{k+1}C_3$

....

.... इत्यादि।

(iv) और (v) का प्रयोग करके, हम (iii) को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$(x+y)^{k+1} = {}^{k+1}C_0x^{k+1} + {}^{k+1}C_1x^ky + {}^{k+1}C_2x^{k-1}y^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kxy^k + {}^{k+1}C_{k+1}y^{k+1}$$

जो यह दर्शाता है कि $P(k+1)$ सत्य है।

इस प्रकार हमने दर्शाया कि (i) $P(1)$ सत्य है तथा (ii) यदि $P(k)$ सत्य है, तो $P(k+1)$ भी सत्य है। अतः, गणितीय आगमन के सिद्धांत से, n के किसी भी मान के लिए $P(n)$ सत्य है। अर्थात् हमने किसी भी प्राकृत संख्या घातांक के लिए द्विपद प्रमेय सिद्ध कर दिया है।

ऐसा समझा जाता है कि यह परिणाम अरब के प्रसिद्ध कवि उमर खैय्याम द्वारा सिद्ध किया गया था। यद्यपि उनका यह प्रमाण अभी तक किसी को प्राप्त नहीं हुआ है।

अब हम इस प्रमेय को स्पष्ट करने के लिए कुछ उदाहरण लेंगे।

टिप्पणी

उदाहरण 12.1. $(x+3y)^5$ का द्विपद प्रसार लिखिए।

हल : यहाँ द्विपद का पहला पद x तथा द्वितीय पद $3y$ है। द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(x+3y)^5 = {}^5C_0x^5 + {}^5C_1x^4(3y)^1 + {}^5C_2x^3(3y)^2 + {}^5C_3x^2(3y)^3 + {}^5C_4x(3y)^4 + {}^5C_5(3y)^5$$

$$= 1\times x^5 + 5x^4\times 3y + 10x^3\times(9y^2) + 10x^2\times(27y^3) + 5x\times(81y^4) + 1\times 243y^5$$

$$= x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$$

इस प्रकार, $(x+3y)^5 = x^5 + 15x^4y + 90x^3y^2 + 270x^2y^3 + 405xy^4 + 243y^5$

उदाहरण 12.2. $(1+a)^n$ का a की घातों के पदों में प्रसार कीजिए, जहाँ a एक वास्तविक संख्या है।

हल : द्विपद प्रमेय के कथन में, $x = 1$ तथा $y = a$ लेने पर, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$(1+a)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}a + {}^nC_2(1)^{n-2}a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}(1)a^{n-1} + {}^nC_na^n$$

अर्थात्, $\quad (1+a)^n = 1 + {}^nC_1a + {}^nC_2a^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}a^{n-1} + {}^nC_na^n \qquad \ldots$ (B)

(B) द्विपद प्रमेय के कथन का एक अन्य रूप है।

इस प्रमेय का उपयोग $\left(x+\frac{1}{x}\right)^5, \left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^5, \left(\frac{a}{4}+\frac{2}{a}\right)^5, \left(\frac{2t}{3}-\frac{3}{2t}\right)^6$, इत्यादि प्रकार के व्यंजकों के प्रसारों को प्राप्त करने के लिए भी किया जा सकता है।

आइए, इसे एक उदाहरण से स्पष्ट करें।

उदाहण 12.3. $\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^4$ का प्रसार लिखिए, जहाँ $x, y \neq 0$ है।

हल : हमें निम्न प्राप्त है :

$$\left(\frac{y}{x}+\frac{1}{y}\right)^4 = {}^4C_0\left(\frac{y}{x}\right)^4 + {}^4C_1\left(\frac{y}{x}\right)^3\left(\frac{1}{y}\right) + {}^4C_2\left(\frac{y}{x}\right)^2\left(\frac{1}{y}\right)^2 + {}^4C_3\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{1}{y}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{1}{y}\right)^4$$

$$= 1\times\frac{y^4}{x^4} + 4\times\frac{y^3}{x^3}\times\frac{1}{y} + 6\times\frac{y^2}{x^2}\times\frac{1}{y^2} + 4\times\left(\frac{y}{x}\right)\times\frac{1}{y^3} + 1\times\frac{1}{y^4}$$

$$= \frac{y^4}{x^4} + 4\frac{y^2}{x^3} + \frac{6}{x^2} + \frac{4}{xy^2} + \frac{1}{y^4}$$

उदाहरण 12.4. एक नगर की जनसंख्या 3% वार्षिक की दर से बढ़ती है। 5 वर्ष के बाद कितने प्रतिशत वृद्धि अपेक्षित है? दशमलव के 2 स्थानों तक उत्तर दीजिए।

हल : मान लीजिए कि वर्तमान जनसंख्या a है। 1 वर्ष बाद यह $a+\frac{3}{100}a = a\left(1+\frac{3}{100}\right)$ होगी।

2 वर्ष बाद यह $a\left(1+\frac{3}{100}\right)+\frac{3}{100}\left[a\left(1+\frac{3}{100}\right)\right]=a\left(1+\frac{3}{100}\right)\left(1+\frac{3}{100}\right)=a\left(1+\frac{3}{100}\right)^2$

इसी प्रकार, 5 वर्ष बाद यह $a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5$ होगी। द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए तथा दशमलव के 3 स्थानों से अधिक से सम्बन्धित पदों को छोड़ते हुए, हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$a\left(1+\frac{3}{100}\right)^5 \approx a\left[1+5(0.03)+10(0.03)^2\right] = a\times 1.159$$

इसलिए, 5 वर्षों में वृद्धि $0.159\times 100\% = \frac{159}{1000}\times 100\times\frac{1}{100} = 15.9\%$ होगी।

उदाहरण 12.5. द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए, मान ज्ञात कीजिए: (*i*) 102^4 (*ii*) 97^3

हल :

(*i*) $102^4 = (100+2)^4$

$= {}^4C_0\,(100)^4 + {}^4C_1(100)^3.2 + {}^4C_2(100)^2.2^2 + {}^4C_3\,(100).2^3 + {}^4C_4\,.2^4$

$= 100000000 + 8000000 + 240000 + 3200 + 16 = 108243216$

(*ii*) $(97)^3 = (100-3)^3 = {}^3C_0(100)^3 - {}^3C_1(100)^2.3 + {}^3C_2(100).3^2 - {}^3C_3.3^3$

$= 1000000 - 90000 + 2700 - 27 = 1002700 - 90027 = 912673$

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक का प्रसार लिखिए :

   (a) $(2a+b)^3$ (b) $(x^2-3y)^6$ (c) $(4a-5b)^4$ (d) $(ax+by)^n$

2. निम्नलिखित के प्रसार लिखिए :

   (a) $(1-x)^7$ (b) $\left(1+\frac{x}{y}\right)^7$ (c) $(1+2x)^5$

3. निम्नलिखित के प्रसार लिखिए :

   (a) $\left(\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)^5$ (b) $\left(3x-\frac{5}{x^2}\right)^7$ (c) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^4$ (d) $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)^5$

4. मान लीजिए मैं एक लाख रुपये 18% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से निवेश करता हूँ। 10 वर्ष बाद मुझे कितनी राशि मिलेगी? अपने उत्तर को 2 दशमलव स्थानों तक दीजिए।

5. जीवाणुओं की संख्या 2% प्रति घण्टे की दर से बढ़ती है। यदि प्रातः 9 बजे जीवाणुओं की संख्या 1.5×10^5 हो, तो उसी दिन दोपहर बाद 1 बजे की उनकी संख्या ज्ञात कीजिए।

6. द्विपद प्रमेय द्वारा, निम्नलिखित में से प्रत्येक का मान ज्ञात कीजिए:

(*i*) $(101)^4$ (*ii*) $(99)^4$ (*iii*) $(1.02)^3$ (iv) $(0.98)^3$

12.2 द्विपद प्रसार में व्यापक पद

आइए, $(x + y)^n$ के प्रसार (A) में अर्थात्

$$(x+y)^n = {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + {}^nC_3x^{n-3}y^3 + \ldots + {}^nC_{n-1}xy^{n-1} + {}^nC_ny^n$$

विभिन्न पदों की जाँच करें।

हम देखते हैं कि

${}^nC_0x^n$, अर्थात् ${}^nC_{1-1}x^ny^0$ प्रथम पद है।

${}^nC_1x^{n-1}y$, अर्थात् ${}^nC_{2-1}x^{n-1}y^1$ द्वितीय पद है,

${}^nC_2x^{n-2}y^2$, अर्थात् ${}^nC_{3-1}x^{n-2}y^2$ तृतीय पद है, इत्यादि।

उपरोक्त से, हम व्यापक रूप से यह कह सकते हैं कि

$(r + 1)$वाँ पद ${}^nC_{(r+1)-1}x^{n-r}y^r$, अर्थात् ${}^nC_rx^{n-r}y^r$ होगा।

यदि हम इस पद को T_{r+1} से व्यक्त करें, तो हमें प्राप्त होता है कि $T_{r+1} = {}^nC_rx^{n-r}y^r$

T_{r+1} को सामान्यतः द्विपद प्रसार का **व्यापक पद** कहा जाता है।

अब हम कुछ उदाहरण लेंगे और कुछ प्रसारों के व्यापक पद ज्ञात करेंगे।

उदाहरण 12.6. $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद ज्ञात कीजिए जहाँ, n एक प्राकृत संख्या है। प्रसार के प्रथम पद के लिए अपने उत्तर का सत्यापन कीजिए।

हल : प्रसार का व्यापक पद निम्न से प्राप्त है :

$$T_{r+1} = {}^nC_r(x^2)^{(n-r)}\left(\frac{1}{x}\right)^r = {}^nC_rx^{2n-2r}\frac{1}{x^r} = {}^nC_rx^{2n-3r} \quad \ldots(i)$$

इसलिए, प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद ${}^nC_rx^{2n-3r}$ है।

$\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^n$ का प्रसार करने पर, हम देखते हैं कि प्रथम पद $(x^2)^n$ अथवा x^{2n} है। (*i*) का प्रयोग करते हुए, $r = 0$ रखकर, हम प्रथम पद ज्ञात करते हैं।

चूँकि $T_1 = T_{0+1}$

$$\therefore \quad T_1 = {}^nC_0x^{2n-0} = x^{2n}$$

यह सत्यापित करता है कि T_{r+1} के लिए दिया व्यंजक, $r + 1 = 1$ के लिए सही है।

उदाहरण 12.7. $\left(1-\frac{2}{3}x^3\right)^6$ के प्रसार का पाँचवाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $T_{r+1} = T_5$ जिससे $r+1 = 5$, अर्थात् $r = 4$ प्राप्त होता है।

साथ ही, $n = 6$ और मान लीजिए कि $x = 1$ एवं $y = \frac{-2x^3}{3}$ है।

$$\therefore \quad T_5 = {}^6C_4\left(-\frac{2}{3}x^3\right)^4 = {}^6C_2\left(\frac{16}{81}x^{12}\right) = \frac{6\times5}{2}\times\frac{16}{81}\times x^{12} = \frac{80}{27}x^{12}$$

इस प्रकार, प्रसार में पाँचवाँ पद $\frac{80}{27}x^{12}$ है।

देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. एक प्राकृत संख्या n के लिए, निम्न में से प्रत्येक के प्रसार में $(r+1)$वाँ पद लिखिए :

   (a) $(2x+y)^n$ (b) $(2a^2-1)^n$ (c) $(1-a)^n$ (d) $\left(3+\frac{1}{x^2}\right)^n$

2. निम्न प्रसारों में से प्रत्येक में, निर्दिष्ट पद ज्ञात कीजिए:

   (a) $(1+2y)^8$; छठा पद (b) $(2x+3)^7$; चौथा पद

   (c) $(2a-b)^{11}$; सातवाँ पद (d) $\left(x+\frac{1}{x}\right)^6$; चौथा पद

   (e) $\left(x^3-\frac{1}{x^2}\right)^7$; पाँचवाँ पद

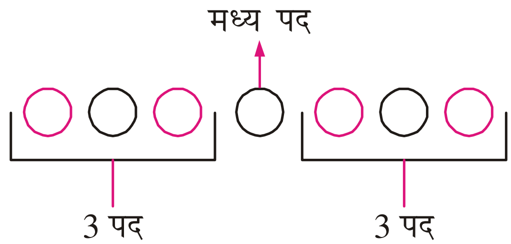
12.3 द्विपद प्रसार में मध्य पद

अब तक आप एक प्रसार के व्यापक पद से परिचित हो चुके हैं। आइए देखें कि **मध्य पद** (अथवा **पदों**) को हम कैसे प्राप्त कर सकते हैं। याद कीजिए कि एक द्विपद प्रसार में पदों की संख्या द्विपद के घातांक से सदैव एक अधिक होती है। इसका अर्थ यह है कि यदि घातांक एक सम संख्या है, तो पदों की संख्या विषम होगी और घातांक यदि एक विषम संख्या हो, तो पदों की संख्या सम होगी।

इस प्रकार, एक द्विपद प्रसार में मध्य पद ज्ञात करते समय, हमारे सामने दो प्रकार की स्थितियाँ आती हैं :

स्थिति 1 : जब n एक सम संख्या है

ऐसी स्थिति का अध्ययन करने के लिए, हम n का विशिष्ट मान, जैसे $n = 6$ लेते हैं। तब प्रसार में पदों की संख्या 7 होगी। चित्र 12.1 से, आप देख सकते हैं कि चौथे पद के दोनों ओर तीन–तीन पद हैं।

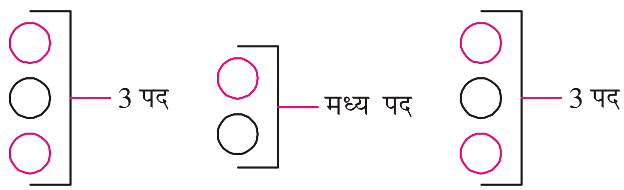


चित्र 12.1

व्यापक रूप में, जब द्विपद का घातांक एक सम संख्या n है, तो $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें पद के दोनों ओर $\frac{n}{2}$ पद हैं। इसलिए, $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वाँ पद मध्य पद है।

स्थिति 2 : जब n एक विषम संख्या है।

आइए, उदाहरणार्थ $n = 7$ लेकर देखते हैं कि इस स्थिति में क्या होता है। प्रसार में पदों की संख्या 8 होगी। चित्र 12.2 को देखिए। क्या इसमें कोई एक मध्य पद पाते है? नहीं। परन्तु हम इसे एक रेखा द्वारा दो समान भागों में विभाजित कर सकते हैं, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। हम विभाजित करने वाली रेखा के प्रत्येक ओर के निकटतम पद को मध्य पद कहते हैं, क्योंकि एक मध्य पद के बायीं ओर तथा दूसरे मध्य पद के दायीं ओर के पदों की संख्या समान है।

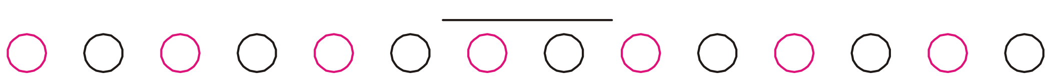


चित्र 12.2

इस प्रकार, इस स्थिति में, दो मध्य पद हैं।

इस प्रकार, मध्य पद चौथे, अर्थात् $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ वें और पाँचवें अर्थात् $\left(\frac{7+3}{2}\right)$ वें पद हैं।

इसी प्रकार यदि $n = 13$ है, तब $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ वाँ और $\left(\frac{13+3}{2}\right)$ वाँ, अर्थात् 7वाँ और 8वाँ दो मध्य पद हैं, जैसा कि चित्र 12.3 में दिखाया गया है।



चित्र 12.3

उपरोक्त से, हम निष्कर्ष निकालते हैं कि जब किसी द्विपद का घातांक n एक विषम प्राकृत संख्या होती है, तो संगत द्विपद प्रसार में $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें तथा $\left(\frac{n+3}{2}\right)$ वें पद उसके दो मध्य पद होते हैं।

आइए अब कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 12.8. $(x^2+y^2)^8$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $n = 8$ (एक सम संख्या) है।

$\therefore \quad \left(\dfrac{8}{2}+1\right)$वाँ अर्थात् 5वाँ पद मध्य पद है।

व्यापक पद $T_{r+1} = {}^8C_r(x^2)^{8-r}y^r$ में $r = 4$ रखने पर,

$$T_5 = {}^8C_4(x^2)^{8-4}(y^2)^4 = 70x^8y^8$$

उदाहरण 12.9. $\left(2x^2+\dfrac{1}{x}\right)^9$ के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ पर $n = 9$ है, जो एक विषम संख्या है।

$\therefore \left(\dfrac{9+1}{2}\right)$ वाँ तथा $\left(\dfrac{9+3}{2}\right)$ वाँ पद मध्य पद हैं,

अर्थात् T_5 तथा T_6 मध्य पद हैं।

T_5 तथा T_6 ज्ञात करने के लिए, व्यापक पद

$T_{r+1} = {}^9C_r(2x^2)^{9-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r$, में $r = 4$ तथा $r = 5$ रखने पर,

$$T_5 = {}^9C_4(2x^2)^{9-4}\left(\frac{1}{x}\right)^4 = \frac{9\times8\times7\times6}{4\times3\times2}\times(32x^{10})\times\left(\frac{1}{x}\right)^4 = 4032\,x^6$$

तथा $T_6 = {}^9C_5\,(2\,x^2)^{9-5}\left(\dfrac{1}{x}\right)^5 = 2016\,x^3$

इस प्रकार, वाँछित दो मध्य पद $4032\,x^6$ तथा $2016\,x^3$ हैं।

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. निम्नलिखित में से प्रत्येक के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(2x+y)^{10}$ (b) $\left(1+\dfrac{2}{3}x^3\right)^8$ (c) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^6$ (d) $\left(1-x^2\right)^{10}$

2. निम्नलिखित में से प्रत्येक के प्रसार में मध्य पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(a+b)^7$ (b) $(2a-b)^9$ (c) $\left(\dfrac{3x}{4}-\dfrac{4y}{3}\right)^7$ (d) $\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)^{11}$

आइये दोहराएँ

- एक प्राकृत संख्या n के लिए, $(x+y)^n = {}^nC_o\, x^n + {}^nC_1\, x^{n-1} y + {}^nC_2\, x^{n-2}\, y^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}\, xy^{n-1} + {}^nC_n\, y^n$

  यह धनात्मक पूर्णांकीय (अथवा प्राकृत संख्या) घातांक के लिए द्विपद प्रमेय कहलाता है।

- धनात्मक पूर्णांकीय घातांक के लिए, द्विपद प्रमेय का एक अन्य रूप इस प्रकार है :
  $(1 + a)^n = {}^nC_o + {}^nC_1\, a + {}^nC_2\, a^2 + \ldots. + {}^nC_{n-1}\, a^{n-1} + {}^nC_n\, a^n$
- $(x + y)^n$ के प्रसार में व्यापक पद ${}^nC_r x^{n-r} y^r$ होता है और $(1 + a)^n$ के प्रसार में यह पद ${}^nC_r a^r$, होता है, जहाँ n एक प्राकृत संख्या है और $0 \le r \le n$ है।
- यदि n एक सम प्राकृत संख्या है, तो $(x + y)^n$ के प्रसार में केवल एक ही मध्य पद होगा। यदि n एक विषम प्राकृत संख्या है, तो इसके प्रसार में दो मध्य पद होंगे।
- व्यापक पद के सूत्र का प्रयोग एक प्रसार में मध्य पद (पदों) और कुछ अन्य विशिष्ट पद ज्ञात करने में किया जा सकता है।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=g0ilZEf1N6A*
- *https://www.youtube.com/watch?v=jH7VVVTEkxs*
- *https://www.youtube.com/watch?v=HXPJLHR4G4s*

आइए अभ्यास करें

1. निम्न में से प्रत्येक का प्रसार लिखिए :

   (a) $(3x + 2y)^5$ (b) $(p - q)^8$ (c) $(1 - x)^8$

   (d) $\left(1+\frac{2}{3}x\right)^6$ (e) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$ (f) $\left(3x-y^2\right)^5$

   (g) $\left(\frac{x^2}{4}+\frac{2}{x}\right)^4$ (h) $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^7$ (i) $\left(x^3+\frac{1}{x^2}\right)^5$ (j) $\left(\frac{1}{x^2}-x^3\right)^4$

2. निम्न में से प्रत्येक के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद लिखिए, जहाँ $n \in N$:

   (a) $(3x - y^2)^n$ (b) $\left(x^3+\frac{1}{x}\right)^n$

3. निम्न प्रसारों में से प्रत्येक में निर्दिष्ट पद ज्ञात कीजिए :

   (a) $(1 - 2x)^7$: तीसरा पद [संकेत : यहाँ $r = 2$] (b) $\left(x+\frac{1}{2x}\right)^6$: मध्य पद (पदों)

(c) $(3x-4y)^6$: चौथा पद (d) $\left(y^2-\frac{1}{y}\right)^{11}$: मध्य पद (पदों)

(e) $(x^3-y^3)^{12}$: चौथा पद (f) $(1-3x^2)^{10}$: मध्य पद (पदों)

(g) $(-3x-4y)^6$: पाँचवाँ पद (h) $(x-2y)^6$ के प्रसार में rवाँ पद

4. यदि x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में, $(1+x)^n$ के प्रसार में T_{r+1}, rवें पद को व्यक्त करता है (जहाँ n एक प्राकृत संख्या है), तो सिद्ध कीजिए कि
$r(r+1)T_{r+2}=(n-r+1)(n-r)x^2\,T_r$ [**संकेत :** $T_r={}^nC_{r-1}\,x^{r-1}$ और $T_{r+2}={}^nC_{r+1}\,x^{r+1}$]

5. x की बढ़ती हुई घातों के क्रम में, $(1+2x)^{10}$ के प्रसार में x^{r-1} का गुणांक k_r है और $k_{r+2}=4k_r$. है। r का मान ज्ञात कीजिए। [**संकेत :** $k_r={}^{10}C_{r-1}\,2^{r-1}$ और $k_{r+2}={}^{10}C_{r+1}2^{r+1}$]

6. $(1+a)^n$ के प्रसार में (जहाँ n एक प्राकृत संख्या है), पाँचवें, छठे और सातवें पदों के गुणांक एक समान्तर श्रेढ़ी में हैं। n ज्ञात कीजिए। [**संकेत :** ${}^nC_5-{}^nC_4={}^nC_6-{}^nC_5$]

7. $(1+y+y^2)^4$ का प्रसार कीजिए। $\left[\quad :(1+y+y^2)^4=\{(1+y)+y^2\}^4\right]$

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 12.1

1. (a) $8a^3+12a^2b+6ab^2+b^3$

(b) $x^{12}-18x^{10}y+135x^8y^2-540x^6y^3+1215x^4y^4-1458x^2y^5+729y^6$

(c) $256a^4-1280a^3b+2400a^2b^2-2000ab^3+625b^4$

(d) $a^nx^n+na^{n-1}x^{n-1}by+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^{n-2}b^2y^2+\ldots+b^ny^n$

2. (a) $1-7x+21x^2-35x^3+35x^4-21x^5+7x^6-x^7$

(b) $1+\frac{7x}{y}+\frac{21x^2}{y^2}+\frac{35x^3}{y^3}+\frac{35x^4}{y^4}+\frac{21x^5}{y^5}+\frac{7x^6}{y^6}+\frac{x^7}{y^7}$

(c) $1+10x+40x^2+80x^3+80x^4+32x^5$

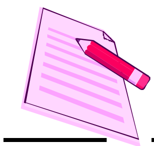
3. (a) $\frac{a^5}{243}+\frac{5a^4b}{162}+\frac{5a^3b^2}{54}+\frac{5a^2b^3}{36}+\frac{5ab^4}{48}+\frac{b^5}{32}$

(b) $2187x^7-25515x^4+127575x-\frac{354375}{x^2}+\frac{590625}{x^5}-\frac{590625}{x^8}+\frac{328125}{x^{11}}-\frac{78125}{x^{14}}$

(c) $x^4+4x^2+6+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$ (d) $\frac{x^5}{y^5}+5\frac{x^3}{y^3}+10\frac{x}{y}+10\frac{y}{x}+5\frac{y^3}{x^3}+\frac{y^5}{x^5}$

4. 4.96 लाख रुपए 5. 162360

6. (i) 104060401 (ii) 96059601 (iii) 1.061208 (iv) 0.941192



देखें आपने कितना सीखा 12.2

1. (a) ${}^nC_r 2^{n-r} x^{n-r} y^r$ (b) ${}^nC_r 2^{n-r} a^{2n-2r} (-1)^r$ (c) ${}^nC_r (-1)^r a^r$

   (d) ${}^nC_r 3^{n-r}.x^{-2r}$

2. (a) $1792y^5$ (b) $15120x^4$ (c) $14784a^5b^6$

   (d) 20 (e) $35x$

देखें आपने कितना सीखा 12.3

1. (a) $8064x^5y^5$ (b) $\frac{1120}{81}x^{12}$ (c) 20 (d) $-252x^{10}$

2. (a) $35a^4b^3, 35a^3b^4$ (b) $4032a^5b^4, -2016a^4b^5$ (c) $\frac{-105}{4}x^4y^3, \frac{140}{3}x^3y^4$

   (d) $\frac{462}{x^4}, \frac{462}{x^7}$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5$

   (b) $p^8 - 8p^7q + 28p^6q^2 - 56p^5q^3 + 70p^4q^4 - 56p^3q^5 + 28p^2q^6 - 8pq^7 + q^8$

   (c) $1 - 8x + 28x^2 - 56x^3 + 70x^4 - 56x^5 + 28x^6 - 8x^7 + x^8$

   (d) $1 + 4x + \frac{20}{3}x^2 + \frac{160}{27}x^3 + \frac{80}{27}x^4 + \frac{64}{81}x^5 + \frac{64}{729}x^6$

   (e) $x^6 + 3x^4 + \frac{15}{4}x^2 + \frac{5}{2} + \frac{15}{16x^2} + \frac{3}{16x^4} + \frac{1}{64x^6}$

   (f) $243x^5 - 405x^4y^2 + 270x^3y^4 - 90x^2y^6 + 15xy^8 - y^{10}$

   (g) $\frac{x^8}{256} + \frac{x^5}{8} + \frac{3}{2}x^2 + \frac{8}{x} + \frac{16}{x^4}$

   (h) $x^{14} - 7x^9 + 21x^4 - \frac{35}{x} + \frac{35}{x^6} - \frac{21}{x^{11}} + \frac{7}{x^{16}} - \frac{1}{x^{21}}$

   (i) $x^{15} + 5x^{10} + 10x^5 + 10 + \frac{5}{x^5} + \frac{1}{x^{10}}$

   (j) $\frac{1}{x^8} - \frac{4}{x^3} + 6x^2 - 4x^7 + x^{12}$

2. (a) $(-1)^r\, {}^nC_r 3^{n-r} x^{n-r} y^{2r}$ (b) ${}^nC_r x^{3n-4r}$

3. (a) $84x^2$ (b) $\frac{5}{2}$ (c) $-34560\, x^3y^3$ (d) $-462y^7, 462y^4$

   (e) $-220x^{27}y^9$ (f) $-61236\, x^{10}$ (g) $34560x^2y^4$

   (h) $(-2)^{r-1}\, {}^6C_{r-1}\, x^{7-r} y^{r-1}$ (i) $-2^{r-2}\, {}^8C_{r-2}\, x^{r-2}$

5. 5 6. 7, 14 7. $1 + 4y + 10y^2 + 16y^3 + 19y^4 + 16y^5 + 10y^6 + 4y^7 + y^8$

13

निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली

आपने सिनेमा हॉल, स्टेडियम, बस या रेल में अपना स्थान ढूँढा होगा। उदाहरणार्थ H-4 का अर्थ है Hवीं पंक्ति में चौथा स्थान। दूसरे शब्दों में H और 4 आपके स्थान के निर्देशांक हैं। इस प्रकार किसी भी स्थिति को ज्यामिति में संख्या तथा वर्णमाला (बीजीय अवधारणा) द्वारा निरूपित किया जाता है। किसी कॉलोनी के चित्र में भी विभिन्न घरों (जो कि एक विशेष अनुक्रम में हों) की तथा सड़कों और पार्कों की स्थिति दिखाई जाती है, अर्थात् बीजीय अवधारणा को ज्यामितीय चित्रें जैसे सरल रेखा, वृत्त और बहुभुज द्वारा निरूपित किया जाता है।

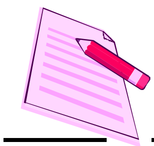
गणित की उस शाखा के अध्ययन, जो ज्यामिति व बीजगणित में परस्पर सम्बन्ध बताती है, को **निर्देशांक ज्यामिति** या कार्तीय ज्यामिति कहते हैं। इसका श्रेय फ्रांस के प्रसिद्ध गणितज्ञ रेने दकोर्त को जाता है।

इस पाठ में हम निर्देशांक ज्यामिति की मौलिकताएँ तथा ज्यामिति में सरल रेखा की धारणा और उसके बीजगणितीय निरूपण में सम्बन्ध के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएँगे :

- निर्देशांकों की कार्तीय प्रणाली को परिभाषित करना, जिनमें मूलबिन्दु, निर्देशांक अक्ष, चतुर्थांश आदि सम्मिलित हैं;
- दूरी सूत्र और विभाजन सूत्र व्युत्पन्न करना;
- दिए हुए शीर्षों से त्रिभुज के क्षेत्रफल का सूत्र व्युत्पन्न करना;
- दिए हुए तीन बिन्दुओं की संरेखता प्रमाणित करना;
- झुकाव तथा रेखा की प्रवणता जैसे पदों की व्याख्या करना;
- दो बिन्दुओं से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता का सूत्र ज्ञात करना;
- दी गई प्रवणता वाली रेखाओं की समान्तरता तथा लम्बवतता के प्रतिबन्ध की व्याख्या करना;
- रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर बने अन्तःखण्डों को ज्ञात करना;
- दो रेखाओं के बीच कोण ज्ञात करना, यदि उनकी प्रवणताएं दी हुई हैं।



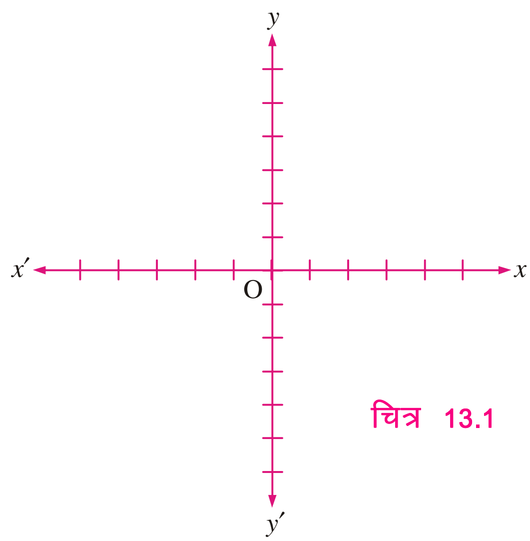
- एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना, यदि मूल बिन्दु को किसी अन्य बिन्दु पर स्थानान्तरित कर दिया जाए।
- किसी वक्र का रूपांतरित समीकरण ज्ञात करना, यदि मूल बिन्दु को किसी अन्य बिन्दु पर स्थानान्तरित कर दिया जाए।

पूर्व ज्ञान

- संख्या पद्धति
- एक निर्देशांक तल में बिन्दुओं को चित्रित करना
- रैखिक समीकरणों का आलेख
- रैखिक समीकरणों के हल

13.1 आयताकार निर्देशांक अक्ष

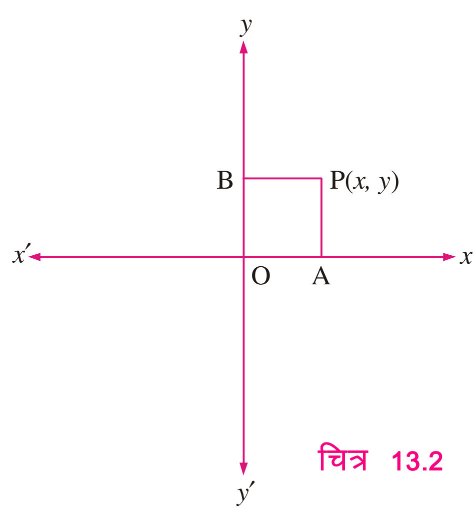
पुनः याद कीजिए कि हम पिछली कक्षाओं में दो परस्पर लम्बवत रेखाओं द्वारा एक तल में एक बिन्दु की स्थिति स्थिर (निश्चित) करना सीख चुके हैं। उस स्थिर (निश्चित) बिन्दु O को, जहाँ ये रेखाएँ एक दूसरे को काटती हैं मूलबिन्दु कहते हैं जैसा चित्र 13.1 में दर्शाया गया है। ये परस्पर लम्बवत रेखाएँ निर्देशांक अक्ष कहलाती हैं। क्षैतिज रेखा XOX' को x- अक्ष या x का अक्ष तथा ऊर्ध्वाधर रेखा YOY' को y- अक्ष या y का अक्ष कहते हैं।



चित्र 13.1

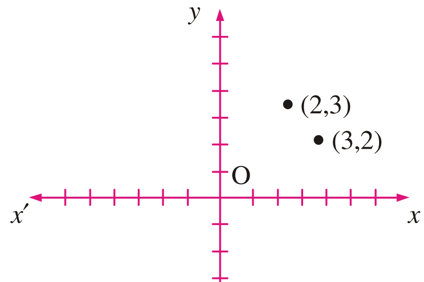
13.1.1 एक बिन्दु के कार्तीय निर्देशांक

एक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करने के लिए हम निम्न विधि का अनुसरण करेंगे। X'OX तथा YOY' को निर्देशांक अक्ष लें। माना इस तल में P कोई बिन्दु है। बिन्दु P से $PA \perp XOX'$ तथा $PB \perp YOY'$ खींचिए। तब दूरी OA = x, x-अक्ष के अनुदिश तथा OB = y, y-अक्ष के अनुदिश लीजिए। इन अक्षों के अनुसार बिन्दु P की स्थिति का पता चलता है। x अक्ष के अनुदिश मापी गई दूरी OA, भुज या x- निर्देशांक तथा y- अक्ष के अनुदिश मापी गई दूरी OB (=PA) बिन्दु P की कोटि या y- निर्देशांक कहलाते हैं। भुज और कोटि एक साथ लेने पर बिन्दु P के निर्देशांक कहलाते हैं। इस प्रकार बिन्दु P के निर्देशांक (x तथा y) हैं, जो तल में एक बिन्दु की स्थिति दर्शाते हैं। ये दो संख्याएँ **क्रमित युग्म** बनाती हैं, क्योंकि यह क्रम जिसमें हम इन पूर्णांकों को लिखते हैं, महत्त्वपूर्ण है।



चित्र 13.2

चित्र 13.3 में आप देख सकते हैं कि युग्म (2, 3) के क्रम की स्थिति (3, 2) से भिन्न है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि *(x, y)* तथा *(y, x)* दो भिन्न प्रकार के जोड़े तल में दो भिन्न प्रकार के बिन्दु दर्शाते हैं।

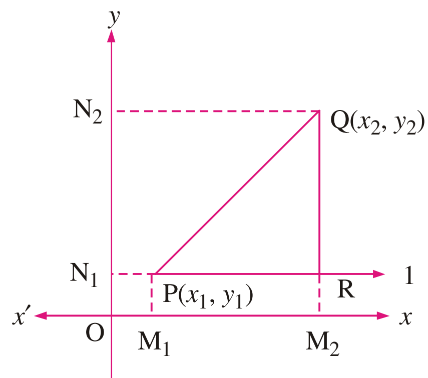


चित्र 13.3

13.1.2 चतुर्थांश

हम जानते हैं कि निर्देशांक अक्ष XOX' तथा YOY' एक तल को चार भागों में बाँटते हैं। ये भाग चतुर्थांश कहलाते हैं, जैसा चित्र 13.4 में दर्शाया गया है। चिह्नों के अनुसार बिन्दु P(*x*, *y*) की स्थिति विभिन्न चतुर्थांशों में, हमें प्राप्त होती है।

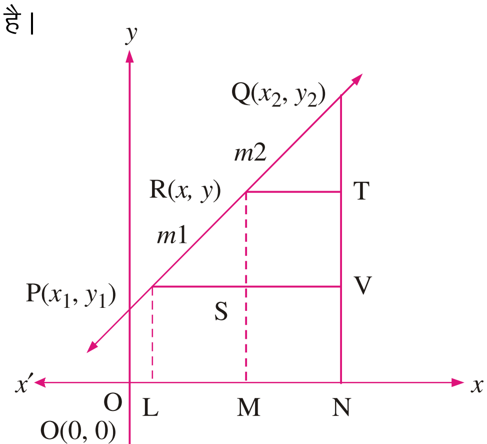
I	प्रथम चतुर्थांश	$x > 0, y > 0$
II	द्वितीय चतुर्थांश	$x < 0, y > 0$
III	तृतीय चतुर्थांश	$x < 0, y < 0$
IV	चतुर्थ चतुर्थांश	$x > 0, y < 0$



चित्र 13.4

13.2 दो बिन्दुओं के बीच की दूरी

याद कीजिए कि आपने दो बिन्दुओं P (x_1, y_1) तथा Q (x_2, y_2) के बीच की दूरी निम्न प्रकार से व्युत्पन्न की है। एक रेखा $l \parallel XX'$ खींचिए जो P से होकर जाए। Q से l पर एक लम्ब खींचिये तथा मानिये कि प्रतिच्छेदी बिंदु R है। ΔPQR एक समकोण त्रिभुज है।



चित्र 13.5

साथ ही, $PR = M_1M_2$

$= OM_2 - OM_1$

$= x_2 - x_1$

और $QR = QM_2 - RM_2$

$= QM_2 - PM_1$

$= ON_2 - ON_1$

$= y_2 - y_1$

अब $PQ^2 = PR^2 + QR^2$ (पाइथागोरस प्रमेय)

$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$\therefore \; PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

टिप्पणी: यह सूत्र सभी चतुर्थांशों के बिन्दुओं के लिए सत्य है। बिन्दु P(x,y) की मूलबिन्दु O(0,0) से दूरी

$$\text{OP} = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ है।}$$

आइए इन सूत्रों को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें।

उदाहरण 13.1. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

(*i*) $A(14,3)$ तथा $B(10,6)$ (*ii*) $M(-1,2)$ तथा $N(0,-6)$

हल :

(*i*) दो बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

यहाँ $x_1 = 14, y_1 = 3, x_2 = 10, y_2 = 6$

$\therefore$ A और B के बीच की दूरी $= \sqrt{(10-14)^2 + (6-3)^2}$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

A और B के बीच की दूरी 5 इकाई है।

(*ii*) यहाँ $x_1 = -1, y_1 = 2, x_2 = 0$ और $y_2 = -6$

M और N के बीच की दूरी $= \sqrt{(0-(-1))^2 + (-6-2)^2} = \sqrt{1+(-8)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

M और N बिन्दुओं के बीच की दूरी $= \sqrt{65}$ इकाई

उदाहरण 13.2. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु P$(-1, -1)$, $Q(2, 3)$ और R $(-2, 6)$ समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल:

$$PQ^2 = (2 + 1)^2 + (3 + 1)^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

$$QR^2 = (-4)^2 + (3)^2 = 16 + 9 = 25$$

और $RP^2 = 1^2 + (-7)^2 = 1 + 49 = 50$

$\therefore$ $PQ^2 + QR^2 = 25+25=50= RP^2$

$\Rightarrow$ ΔPQR एक समकोण Δ है (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

उदाहरण 13.3. दर्शाइये कि बिन्दु A(1, 2), B(4, 5) तथा C(–1, 0) एक सरल रेखा पर स्थित हैं।

हल : यहाँ

$$\text{AB} = \sqrt{(4-1)^2 + (5-2)^2} \text{ इकाई} = \sqrt{18} \text{ इकाई} = 3\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

$$\text{BC} = \sqrt{(-1-4)^2 + (0-5)^2} \text{ इकाई} = \sqrt{50} \text{ इकाई} = 5\sqrt{2} \text{ इकाई}$$

और $AC = \sqrt{(-1-1)^2+(0-2)^2}$ इकाई = $\sqrt{4+4}$ इकाई = $2\sqrt{2}$ इकाई

अब AB + AC = $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{2}\right)$ इकाई $=5\sqrt{2}$ इकाई = BC

अर्थात् BA + AC = BC

अतः A, B, C एक सरल रेखा पर स्थित हैं। दूसरे शब्दों में; A,B,C संरेख हैं।

उदाहरण 13.4. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु (2a, 4a), (2a, 6a) तथा $\left(2a+\sqrt{3}a, 5a\right)$ समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं जिसकी प्रत्येक भुजा 2a है।

हल : माना बिन्दु A (2a, 4a), B (2a, 6a) तथा C $\left(2a+\sqrt{3}a, 5a\right)$ हैं।

$AB = \sqrt{0+(2a)^2}$ = 2a इकाई

$BC = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(-a)^2}$ इकाई $= \sqrt{3a^2+a^2}$ = 2a इकाई

और AC = $\sqrt{(\sqrt{3}a)^2+(+a)^2}$ = 2a इकाई

$\Rightarrow$ AB + BC > AC, BC + AC > AB और

AB + AC > BC और AB = BC = AC = 2a

$\Rightarrow$ A, B, C भुजा 2a वाले समबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

देखें आपने कितना सीखा 13.1

1. निम्नलिखित बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजियेः

   (a) (5, 4) तथा (2, –3) (b) (a, –a) तथा (b, b)

2. सिद्ध कीजिए कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं :

   (a) (4, 4), (3, 5), (–1,–1) (b) (2, 1), (0, 3), (–2, 1)

3. दिखाइये कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह एक त्रिभुज के शीर्ष हैं :

   (a) (3, 3), (–3, 3) तथा (0, 0) (b) (0, a), (a, b) तथा (0, 0) (यदि ab = 0)

4. दिखाइये कि निम्न बिन्दुओं का प्रत्येक समूह संरेख है :

   (a) (3, –6), (2, –4) तथा (– 4, 8) (b) (0,3), (0, – 4) तथा (0, 6)

5. (a) दिखाइये कि बिन्दु (0, –1), (–2, 3), (6, 7) तथा (8, 3) एक आयत के शीर्ष हैं।

   (b) दिखाइये कि बिन्दु (3, –2), (6, 1), (3, 4) तथा (0, 1) एक वर्ग के शीर्ष हैं।

13.3 विभाजन सूत्र

13.3.1 अन्तः विभाजन

माना $P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ रेखा l पर दो दिए गए बिन्दु हैं तथा $R(x, y)$, PQ को $m_1 : m_2$ अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

ज्ञात करना है : बिन्दु R के निर्देशांक x और y

रचना : P, Q और R से XX' पर क्रमशः PL, QN और RM लम्ब खींचिये जो XX' को क्रमशः L, M तथा N पर मिलते हैं। $RT \perp QN$ तथा $PV \perp QN$ खींचिये।

विधि : R रेखाखण्ड PQ को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

$\Rightarrow$ R रेखाखण्ड PQ पर स्थित है और $\dfrac{PR}{RQ} = \dfrac{m_1}{m_2}$

तथा Δ RPS और Δ QRT में,

$\angle RPS = \angle QRT$ (संगत कोण क्योंकि $PS \parallel RT$)

और $\angle RSP = \angle QTR = 90^0$

$\therefore$ $\Delta RPS \sim \Delta QRT$ (कों, कों कों समरूपता)

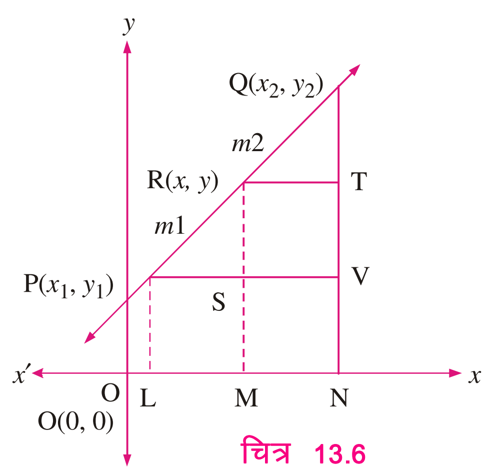
$$\Rightarrow \quad \frac{PR}{RQ} = \frac{RS}{QT} = \frac{PS}{RT} \quad \ldots (i)$$

साथ ही $PS = LM = OM - OL = x - x_1$

$RT = MN = ON - OM = x_2 - x$

$RS = RM - SM = y - y_1$

$QT = QN - TN = y_2 - y$.



चित्र 13.6

समीकरण (i) से हमें प्राप्त होता है:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\Rightarrow m_1(x_2 - x) = m_2(x - x_1)$

और $m_1(y_2 - y) = m_2(y - y_1)$

$\Rightarrow x = \dfrac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ तथा $y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$

इस प्रकार R के निर्देशांक हैं :

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

रेखाखण्ड के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

यदि R, PQ का मध्य बिन्दु है, तो $m_1 = m_2 = 1$ (क्योंकि R, PQ को अनुपात 1:1 में विभाजित करता है)

मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

13.3.2 बाह्य विभाजन

माना R रेखाखण्ड PQ को अनुपात $m_1 : m_2$ में बाह्य विभाजित करता है।

ज्ञात करना है : R के निर्देशांक

रचना : बिन्दु P, Q और R से XX' पर क्रमशः PL, QN और RM लम्ब खींचिये और $PS \perp RM$ तथा $QT \perp RM$ खींचिये।

स्पष्टतः $\Delta RPS \sim \Delta RQT$.

$$\therefore \frac{RP}{RQ} = \frac{PS}{QT} = \frac{RS}{RT}$$

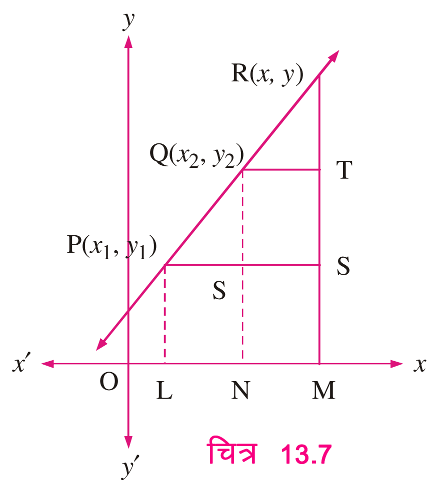
या $$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x - x_2} = \frac{y - y_1}{y - y_2}$$

$$\Rightarrow m_1(x - x_2) = m_2(x - x_1)$$

तथा $$m_1(y - y_2) = m_2(y - y_1)$$

इनसे प्राप्त होता है

$$x = \frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}$$



चित्र 13.7

अतः बाह्य विभाजन के बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right) \text{ हैं।}$$

अब हम कुछ उदाहरण करेंगे।

उदाहरण 13.5. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (4, –2) तथा (–3, 5) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 2:3 के अन्तः व बाह्य अनुपात में विभाजित करता है।

हल : (i) माना $P\ (x, y)$ अन्तः विभाजन का बिन्दु है।

$$\therefore x = \frac{2(-3) + 3(4)}{2 + 3} = \frac{6}{5} \text{ और } y = \frac{2(5) + 3(-2)}{2 + 3} = \frac{4}{5} \ \therefore \left(\frac{6}{5}, \frac{4}{5}\right) \text{ बिन्दु } P \text{ के निर्देशांक हैं।}$$

यदि $Q\ (x', y')$ बाह्य विभाजन का बिन्दु है, तब

$$x' = \frac{(2)(-3)-3(4)}{2-3} = 18 \text{ और } y' = \frac{(2)(5)-3(-2)}{2-3} = -16$$

अतः बाह्य विभाजन के बिन्दु के निर्देशांक (18, –16) हैं।

उदाहरण 13.6. (1,4) और (–3, 16) को मिलाने वाले रेखाखण्ड को बिन्दु (3, –2) किस अनुपात में विभाजित करता है?

हल : माना कि बिन्दु $P(3, -2)$ रेखाखण्ड को $k : 1$ में विभाजित करता है।

तब P के निर्देशांक $\left(\frac{-3k+1}{k+1}, \frac{16k+4}{k+1}\right)$ हैं।

परन्तु P के दिए गए निर्देशांक $(3, -2)$ हैं।

$$\therefore \quad \frac{-3k+1}{k+1} = 3 \Rightarrow -3k+1 = 3k+3 \Rightarrow k = -\frac{1}{3}$$

$\Rightarrow P$, रेखाखण्ड को 1:3 के बाह्य अनुपात में बाँटता है।

उदाहरण 13.7. एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष क्रमशः (1, 4), (–2,1), (0, –1) और (3, 2) हैं। यदि E, F, G, H क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA के मध्य बिन्दु हों, तो सिद्ध कीजिए कि $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

हल : क्योंकि E, F, G, H क्रमशः भुजाओं AB, BC, CD और DA, के मध्य बिन्दु हैं, इसलिए E, F, G, H के निर्देशांक क्रमशः

$$\left(\frac{1-2}{2}, \frac{4+1}{2}\right), \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1-1}{2}\right), \left(\frac{0+3}{2}, \frac{-1+2}{2}\right) \text{ तथा } \left(\frac{1+3}{2}, \frac{4+2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{-1}{2}, \frac{5}{2}\right), F(-1, 0), G\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \text{ तथा } H(2, 3) \text{ अभीष्ट बिन्दु हैं।}$$

तथा विकर्ण EG के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

$$\left(\frac{\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}}{2}, \frac{\frac{5}{2}+\frac{1}{2}}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ हैं।}$$

FH के मध्य बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ हैं।

क्योंकि दोनों विकर्णों के मध्य बिन्दु समान हैं, इसलिए विकर्ण एक–दूसरे को समद्विभाजित करते हैं। अतः $EFGH$ एक समान्तर चतुर्भुज है।

देखें आपने कितना सीखा 13.2

1. उन रेखाखण्डों के मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनके अन्तः बिन्दु नीचे दिए गए हैं :

   (a) (–2, 3) और (3, 5)   (b) (6,0) और (–2,10)

2. उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो $(-5, -2)$ और $(3, 6)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को 3:1 के अनुपात में अन्तः विभाजित करता है।

3. (a) एक समातर चतुर्भुज के तीन शीर्ष $(0,3)$, $(0,6)$ और $(2,9)$ हैं, चौथा शीर्ष ज्ञात कीजिए।

   (b) एक वर्ग के शीर्ष $(4, 0)$, $(-4, 0)$, $(0,-4)$ और $(0, 4)$ हैं। सिद्ध कीजिए कि उसकी भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बना चतुर्भुज भी एक वर्ग होगा।

4. $(2, 3)$ और $(5, -1)$ को मिलाने वाले रेखाखण्ड को तीन भागों में बाँटा गया है। उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो इसे तीन भागों में बाँटते हैं।

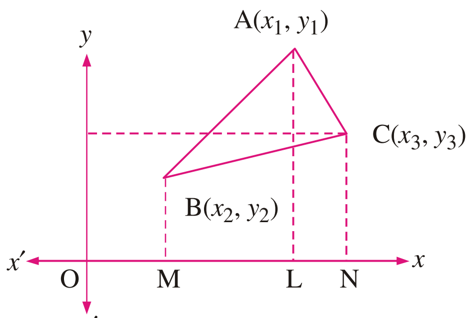
5. दिखाइये कि एक आयत की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं को मिलाने से बनी आकृति एक समचतुर्भुज होती है।

13.4 त्रिभुज का क्षेत्रफल

आइए त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें जिसके शीर्ष

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ हैं।

रचना : XX' पर AL, BM तथा CN लम्ब खींचिये।



चित्र 13.8

Δ ABC का क्षेत्रफल = समलम्ब चतुर्भुज $BMLA$ का क्षेत्रफल+ समलम्ब चतुर्भुज ALNC का क्षेत्रफल – समलम्ब चतुर्भुज BMNC का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}(BM+AL)ML+\frac{1}{2}(AL+CN)LN-\frac{1}{2}(BM+CN)MN$$

$$=\frac{1}{2}(y_2+y_1)(x_1-x_2)+\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_3-x_1)-\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_3-x_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_3y_3)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right]$$

इसे हम सारणिक रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\Delta \text{ ABC का क्षेत्रफल } = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

उदाहरण 13.8. उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $A(3, 4)$, $B(6, -2)$ और $C(-4, -5)$ हैं।

हल : ΔABC का क्षेत्रफल $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 6 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}[3(-2+5)-4(6+4)+1(-30-8)] = \frac{1}{2}[9-40-38] = \frac{-69}{2}$$

क्षेत्रफल धनात्मक होता है।

$$\therefore \Delta ABC = \frac{69}{2} \text{ वर्ग इकाई}$$

उदाहरण 13.9. यदि एक त्रिभुज के शीर्ष (1, k), (4, –3) और (–9, 7) तथा इसका क्षेत्रफल 15 वर्ग इकाई हो, तो k का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ -9 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}[-3-7-k(4+9)+1(28-27)]$$

$$= \frac{1}{2}[-10-13k+1] = \frac{1}{2}[-9-13k]$$

क्योंकि Δ का क्षेत्रफल दिया है 15,

$$\therefore \qquad \frac{-9-13k}{2} = 15$$

या $\qquad -9-13k = 30$

या $\qquad -13k = 39$

या $\qquad k = -3$

देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. निम्नलिखित त्रिभुजों के क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिनके शीर्ष नीचे दिए गए हैं :

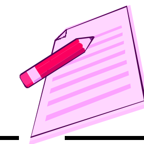
   (1) (0, 5), (5, –5) और (0,0) (b) (2, 3), (–2,–3) और (–2, 3)

   (c) (a, 0), (0, – a) और (0, 0)

2. त्रिभुज A BC का क्षेत्रफल, जिसके शीर्षों के निर्देशांक A (2, –3), B(3, –2) तथा $C\left(\frac{5}{2}, k\right)$ हैं, $\frac{3}{2}$ वर्ग इकाई है। k का मान ज्ञात कीजिये।

3. उस आयत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, 4), (5,– 4), (–5, 4) और (–5, – 4) हैं।

4. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (5, –2), (4, –7), (1, 1) और (3, 4) हैं।



13.5 तीन बिन्दुओं के संरेख होने का प्रतिबन्ध

तीन बिन्दु $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेख होंगे यदि और केवल यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य हो

अर्थात् $\frac{1}{2}[x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3] = 0$

अर्थात् $x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3 = 0$

संक्षेप में इस परिणाम को हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

आइए इसे उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करें :

उदाहरण 13.10. दिखाइये कि बिन्दु $A(a, b+c)$, $B(b, c+a)$ तथा $C(c, a+b)$ संरेख हैं।

हल : ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix}$

$C_1 \to C_1 + C_2$ के प्रयोग से

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore$ दिए गए बिन्दु संरेख हैं।

उदाहरण 13.11. k के किस मान के लिए बिन्दु $(1, 5)$, $(k, 1)$ तथा $(4, 11)$ संरेख हैं?

हल : दिए हुए बिन्दुओं से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ k & 1 & 1 \\ 4 & 11 & 1 \end{vmatrix}$

$\because$

$$= \frac{1}{2}[-10 - 5k + 20 + 11k - 4]$$

$$= \frac{1}{2}[6k + 6] = 3k + 3$$

क्योंकि दिए गये बिन्दु संरेख हैं, इसलिए

$$3k + 3 = 0 \Rightarrow k = -1$$

अतः $k = -1$ के लिए, दिए गये बिन्दु संरेख हैं।

देखें आपने कितना सीखा 13.4

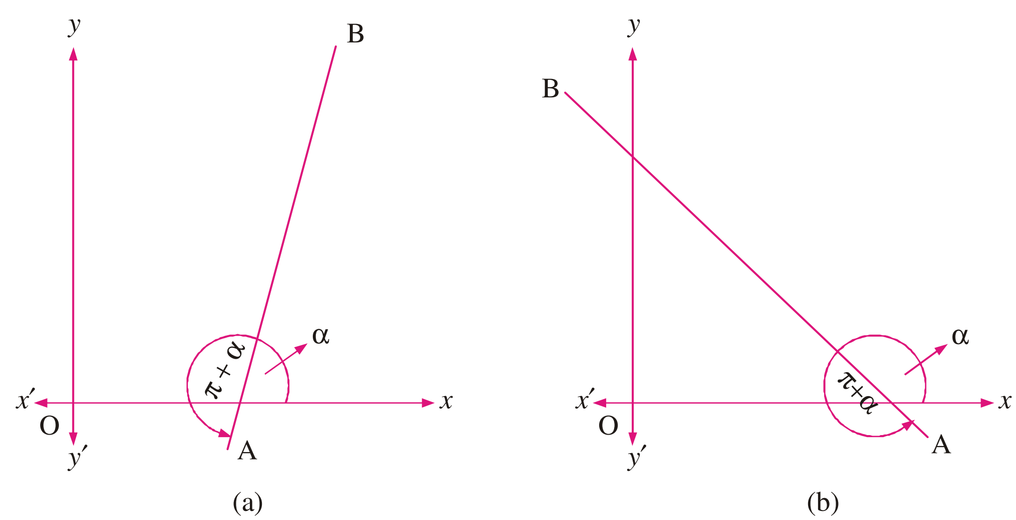
1. दिखाइये कि बिन्दु (–1,–1), (5, 7) और (8, 11) संरेख हैं।
2. दिखाइये कि बिन्दु (3, 1), (5, 3) और (6, 4) संरेख हैं।
3. सिद्ध कीजिये कि बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और (1, 1) संरेख हैं यदि $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$.
4. यदि बिन्दु $(a, b), (a_1, b_1)$ तथा $(a-a_1, b-b_1)$ संरेख हों, तो दिखाइये कि $a_1 b = ab_1$
5. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (5, 7), (k, 5) और (0, 2) संरेख हैं
6. k का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (k, 2–2k), (– k+1, 2k) और (– 4 – k, 6 – 2k) संरेख हैं।

13.6 आनति और रेखा की प्रवणता

चित्र 13.9 देखिए। रेखा AB, x अक्ष के साथ कोण α बनाती है तथा BA कोण $\pi+\alpha$ बनाती है (घड़ी की विपरीत दिशा में मापे जाने पर)

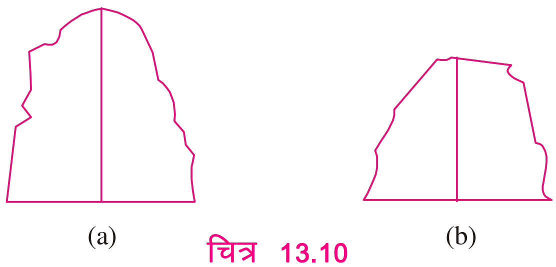
एक दी गई रेखा की आनति (झुकाव) उसके द्वारा धनात्मक अक्ष के साथ बनाए गए कोण से निरूपित की जाती है (घड़ी की विपरात दिशा में मापे जाने पर)

एक विशेष स्थिति में जब रेखा x- अक्ष के समान्तर हो या उसके साथ संपाती हो, तो रेखा की आनति 0^0 परिभाषित की जाती है।



चित्र 13.9

पुनः नीचे दिए गए दो पहाड़ों के चित्र देखिए। यहाँ चित्र 13.10 (a) के पहाड़ की चढ़ाई, चित्र 13.10 (b) के पहाड़ की चढ़ाई से अधिक है।



चित्र 13.10

इसकी ढलान की मात्रा को कैसे मापते हैं? यहाँ हम कह सकते हैं कि पहाड़ (a) की भूमि के साथ आनति पहाड़ (b) की भूमि के साथ आनति से अधिक है।

प्रत्येक दशा में भूतल से शिखर की ऊँचाइयों का अनुपात ज्ञात करने का प्रयास कीजिये।

वास्तव में, आपको पता लगेगा कि स्थिति (a) का अनुपात स्थिति (b) की तुलना में अधिक है। इसका अर्थ है कि हमारा तात्पर्य ऊँचाई और आधार से है और इनका अनुपात कोण के टेन्जैन्ट से सम्बन्धित है। इसलिए गणित में इस अनुपात अर्थात् आनति के टेन्जैन्ट को प्रवणता कहते हैं। हम प्रवणता को एक कोण के टेन्जैन्ट के रूप में परिभाषित करेंगे।

किसी रेखा की प्रवणता उस कोण θ (माना)) का टेन्जैन्ट होता है जो वह रेखा x- अक्ष की धनात्मक दिशा की साथ बनाती है। सामान्यतः इसे संकेत m (= tan θ) से लिखा जाता है।

टिप्पणी: यदि कोई रेखा ***x*–**अक्ष के साथ ***90⁰*** या ***270⁰*** का कोण बनाती है तो उसका ढलान परिभाषित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण 13.12. चित्र 13.9 में रेखाओं *AB* और *BA* की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : रेखा *AB* की प्रवणता $= \tan\alpha$

रेखा *BA* का प्रवणता $= \tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$.

टिप्पणी: इस उदाहरण से स्पष्ट है कि किसी रेखा की प्रवणता उसकी दिशा पर निर्भर नहीं करती।

उदाहरण 13.13. एक रेखा *x*- अक्ष की ऋणात्मक दिशा के साथ 30^0 का कोण बनाती है। उसकी प्रवणता ज्ञात कीजिये।

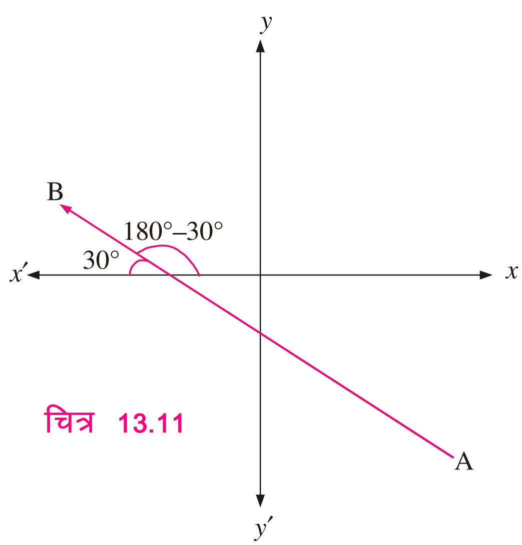
हल :

यहाँ $\theta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$

$\therefore$ $m =$ रेखा की प्रवणता

$= \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$

$= -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$



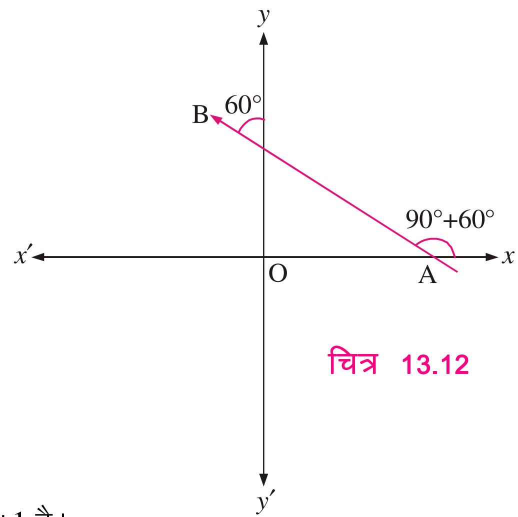
चित्र 13.11

मॉड्यूल - IV

निर्देशांक ज्यामिति

टिप्पणी

उदाहरण 13.14. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ 60° का कोण बनाती है।



चित्र 13.12

हल :

यहाँ $\theta = 90^\circ + 60^\circ$

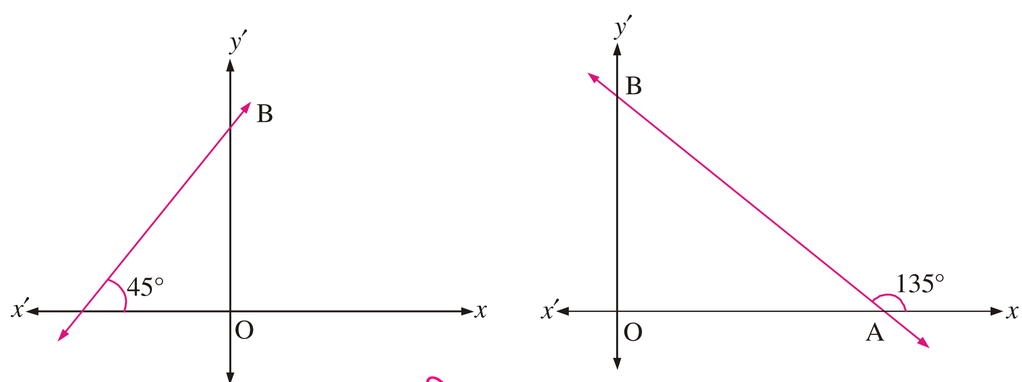
$\therefore$ m = रेखा की प्रवणता

$= \tan(90^\circ + 60^\circ) = -\cot 60^\circ$

$= -\tan 30^\circ = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

उदाहरण 13.15. यदि एक रेखा अक्षों से समान रूप से झुकी हुई है तो दिखाइये कि इसका प्रवणता ± 1 है।

हल : माना कि रेखा AB अक्षों से समान रूप से झुकी हुई है और अक्षों पर बिन्दु A तथा B पर मिलती है जैसा चित्र 13.13 में दर्शाया गया है।



चित्र 13.13

चित्र 13.13(a) में, रेखा AB की आनति = $\angle XAB = 45^0$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता = $\tan 45^\circ = 1$

चित्र 13.13 (b) रेखा AB की आनति = $\angle XAB = 180^0 - 45^0 = 135^0$

$\therefore$ रेखा AB की प्रवणता = $\tan 135^0 = \tan(180^0 - 45^0) = -\tan 45^0 = -1$

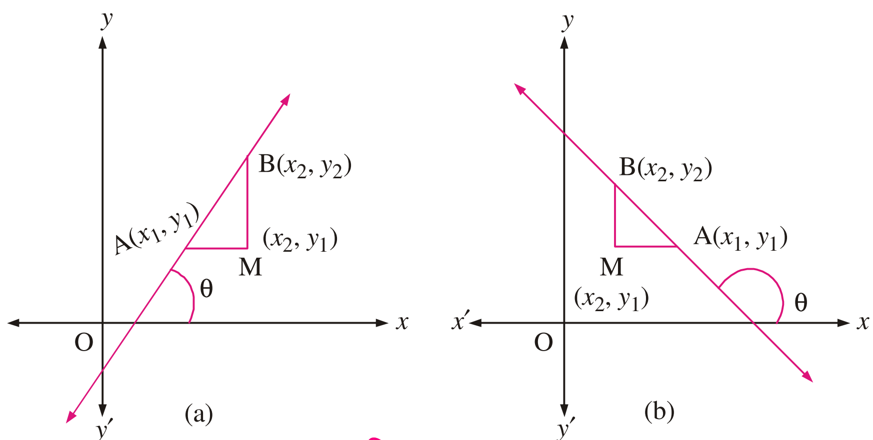
इस प्रकार यदि एक रेखा अक्षों से समान रूप से झुकी होती है तब उस रेखा की प्रवणता ± 1 होगी।

देखें आपने कितना सीखा 13.5

1. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो धनात्मक x- अक्ष के साथ 60^0 (ii) 150^0 का कोण बनाती है।
2. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो धनात्मक x- अक्ष के साथ 30^0 का कोण बनाती है।
3. उस रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिये जो ऋणात्मक x- अक्ष के साथ 60^0 का कोण बनाती है।

13.7 दो भिन्न बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

माना $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ दो भिन्न बिन्दु हैं। A और B से गुज़रती हुई एक रेखा खींचिये और मान लीजिये कि रेखा की आनति θ है। A से होती हुई एक क्षैतिज रेखा तथा B से होती हुई एक ऊर्ध्वाधर रेखा का प्रतिच्छेदन बिन्दु माना M है। तब M के निर्देशांक चित्र 13.14 के अनुसार होंगे।



चित्र 13.14

(A) चित्र 13.14 (a) में आनति कोण MAB न्यूनकोण θ के बराबर है। फलस्वरूप

$$\tan\theta = \tan(\angle MAB) = \frac{MB}{AM} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(B) चित्र 13.14 (b) में आनति कोण अधिक कोण θ है और क्योंकि θ और $\angle MAB$ सम्पूरक हैं, फलस्वरूप

$$\tan\theta = -\tan(\angle MAB) = -\frac{MB}{MA} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

अतः दोनों ही स्थितियों में, रेखा जो $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ से गुज़रती है की प्रवणता

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

टिप्पणी: यदि $x_1 = x_2$ हो, तो m परिभाषित नहीं होता। उस अवस्था में रेखा y- अक्ष के समान्तर होती है।

क्या कोई रेखा ऐसी है जिसकी प्रवणता 1 है? हाँ जब कोई रेखा धनात्मक x- अक्ष से 45° पर झुकी होती है। क्या कोई रेखा ऐसी है जिसकी प्रवणता $\sqrt{3}$ है? हाँ जब कोई रेखा धनात्मक x-अक्ष से 60^0 पर झुकी होती है।

इन प्रश्नों के उत्तर से आप देखेंगे कि प्रत्येक वास्तविक संख्या m के लिए एक रेखा होती है जिसकी प्रवणता m होती है। (क्योंकि हम सदैव एक कोण α ढूँढ़ सकते हैं जिसके लिए $\tan\alpha = m$)।

उदाहरण 13.16. बिन्दु $A(6, 3)$ और $B(4, 10)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से गुजरने वाली रेखा की प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

यहाँ $x_1 = 6,\ y_1 = 3;\ x_2 = 4,\ y_2 = 10.$

अब इन मानों को रखने पर, हम प्रवणता प्राप्त करते हैं $= \dfrac{10-3}{4-6} = -\dfrac{7}{2}$

उदाहरण 13.17. x का मान ज्ञात कीजिए, जिससे कि (3, 6) और (x, 4) से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता 2 हो।

हल: प्रवणता $= \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{4-6}{x-3} = \dfrac{-2}{x-3}$

$\therefore \dfrac{-2}{x-3} = 2$ .... (दिया है)

$\therefore\ 2x - 6 = -2$ या $x = 2$

देखें आपने कितना सीखा 13.6

1. बिन्दु $A(6, 8)$ तथा $B(4, 14)$ से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता क्या होगी?
2. x का मान ज्ञात कीजिए जिससे $A(6,12)$ तथा $B(x, 8)$ से गुज़रने वाली रेखा की प्रवणता 4 हो।
3. y का मान ज्ञात कीजिए जिससे बिन्दु $A(-8, 11)$ तथा $B(2, y)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता $-\dfrac{4}{3}$ हो।
4. त्रिभुज ABC के शीर्ष $A(2, 3)$ $B(0, 4)$ तथा $C(-5, 0)$ हैं। बिन्दु B तथा AC के मध्य बिन्दु से होकर जाने वाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।
5. $A(-2, 7)$, B(1, 0), C(4, 3) तथा D(1, 2) एक चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष हैं। दिखाइये कि

   (i) AB की प्रवणता = CD की प्रवणता (ii) BC की प्रवणता = AD की प्रवणता

13.8 रेखाओं के समान्तरता और लम्बवतता होने का प्रतिबन्ध

13.8.1 समान्तर रेखाओं की प्रवणता

माना l_1, l_2, दो (लम्बवत नहीं) रेखाएँ हैं जिनकी प्रवणता क्रमशः m_1 तथा m_2 है।

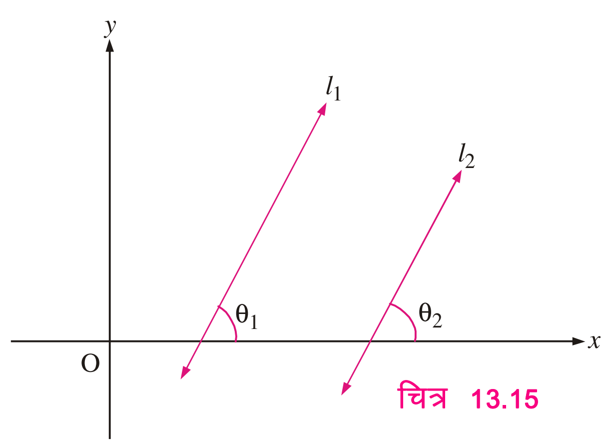
माना θ_1 तथा θ_2 इन रेखाओं की आनति है।

स्थिति I : माना रेखाएँ l_1 तथा l_2 समान्तर हैं,

तब $\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow m_1 = m_2$

इस प्रकार, यदि दो रेखाएँ समान्तर होती हैं तो उनकी प्रवणताएँ समान होती हैं।



चित्र 13.15

स्थिति II : माना रेखाओं l_1, तथा l_2 की प्रवणताएँ समान हैं

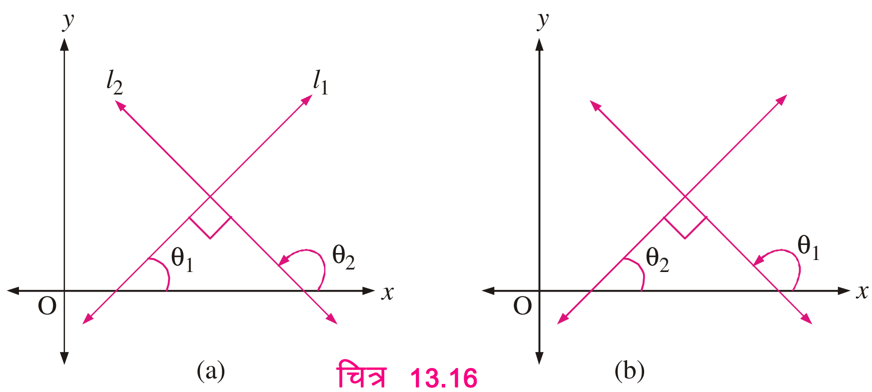
अर्थात् $m_1 = m_2 \Rightarrow \tan\theta_1 = \tan\theta_2$

$\Rightarrow \theta_1 = \theta_2 \ (0^\circ \le \theta \le 180^\circ) \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

अतः दो (लम्बवत नहीं) रेखाएँ समान्तर हैं यदि और केवल यदि $m_1 = m_2$

13.8.2 लम्बवत रेखाओं की प्रवणता

माना l_1 तथा l_2 दो (ऊर्ध्वाधर नहीं) रेखाएँ हैं जिनकी प्रवणता क्रमशः m_1 तथा m_2 है। माना θ_1 तथा θ_2 उनकी आनति हैं।



चित्र 13.16

स्थिति I : माना $l_1 \perp l_2$

$\Rightarrow \theta_2 = 90^0 + \theta_1$ या $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = \tan(90^0 + \theta_1)$ या $\tan\theta_1 = \tan(90^0 + \theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\cot(\theta_1)$ या $\tan\theta_1 = -\cot(\theta_2)$

$\Rightarrow \tan\theta_2 = -\dfrac{1}{\tan\theta_1}$ या $\Rightarrow \tan\theta_1 = -\dfrac{1}{\tan\theta_2}$

$\Rightarrow$ दोनों स्थितियों में, हमें प्राप्त होता है

$$\tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$$

या $\quad m_1.m_2 = -1$

इस प्रकार दो रेखाएँ लम्बवत होंगी यदि उनकी प्रवणताओं का गुणनफल –1 है।

स्थिति II : माना दो रेखाएँ l_1 तथा l_2 इस प्रकार हैं कि उनकी प्रवणताओं का गुणनफल –1 है।

अर्थात् $m_1.m_2 = -1 \Rightarrow \tan\theta_1 \tan\theta_2 = -1$

$$\Rightarrow \tan\theta_1 = -\frac{1}{\tan\theta_2} = -\cot\theta_2 = \tan\left(90^0 + \theta_2\right)$$

$\Rightarrow$ या तो $\theta_1 = 90^0 + \theta_2$ or $\theta_2 = 90^0 + \theta_1$ $\Rightarrow$ दोनों स्थितियों में $l_1 \perp l_2$.

अतः दो रेखाएँ लम्बवत होंगी यदि और केवल यदि $m_1.m_2 = -1$.

उदाहरण 13.18. दिखाइये कि बिन्दुओं A(5,6) तथा B(2,3) से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं C(9,–2) तथा D(6,–5) से होकर जानेवाली रेखा के समांतर है।

हल : रेखा AB की प्रवणता $= \dfrac{3-6}{2-5} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

रेखा CD की प्रवणता $= \dfrac{-5+2}{6-9} = \dfrac{-3}{-3} = 1$

क्योंकि प्रवणताएँ बराबर हैं

$\therefore$ AB $\|$ CD.

उदाहरण 13.19. दिखाइये कि बिन्दुओं A(2,–5) तथा B(–2,5) से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं L(6,3) तथा M(1,1) से होकर जानेवाली रेखा पर लम्ब है।

हल : यहाँ m_1 = AB रेखा की प्रवणता $= \dfrac{5+5}{-2-2} = \dfrac{10}{-4} = \dfrac{-5}{2}$

और m_2 = LM रेखा की प्रवणता $= \dfrac{1-3}{1-6} = \dfrac{2}{5}$

अब $m_1.m_2 = \dfrac{-5}{2} \times \dfrac{2}{5} = -1$

अतः रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हैं।

उदाहरण 13.20. प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके दिखाइये कि बिन्दु A(4,4), B(3,5)

त ৩ ा ा

C (–1, –1) समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं?

हल :रेखा AB की प्रवणता $= m_1 = \dfrac{5-4}{3-4} = -1$

रेखा BC की प्रवणता $= m_2 = \dfrac{-1-5}{-1-3} = \dfrac{3}{2}$

और रेखा AC की प्रवणता $= m_3 = \dfrac{-1-4}{-1-4} = 1$

अब $m_1 \times m_3 = -1$

$\Rightarrow \text{AB} \perp \text{AC}$

$\Rightarrow \Delta ABC$ एक समकोण त्रिभुज है।

अतः A(4,4), B(3,5) तथा C$(-1,-1)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

उदाहरण 13.21. y का मान क्या होगा जिसके लिए बिन्दुओं A$(3, y)$ और B$(2,7)$ से होकर जानेवाली रेखा बिन्दुओं C $(-1, 4)$ तथा D $(0,6)$ से होकर जानेवाली रेखा के लम्बवत है?

हल : रेखा AB की प्रवणता $= m_1 = \dfrac{7-y}{2-3} = y-7$

रेखा CD की प्रवणता $= m_2 = \dfrac{6-4}{0+1} = 2$

क्योंकि रेखाएँ लम्बवत हैं

$\therefore m_1 \times m_2 = -1$ या $(y-7)\times 2 = -1$ या $2y - 14 = -1$ या $2y = 13$ या $y = \dfrac{13}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 13.7

1. दिखाइए कि बिन्दुओं (2,–3) तथा (– 4,1) को मिलाने वाली रेखा

   (i) बिन्दुओं (7,–1) तथा (0,3) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (ii) बिन्दुओं (4,5) तथा (0,–2) को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत है!

2. बिन्दुओं (– 4,1) तथा (2,3) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

3. बिन्दुओं (–5,7) तथा (0,–2) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (1,3) तथा (4, x). को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है, x ज्ञात कीजिए।

4. A(–2,7), B(1,0), C(4,3) तथा D(1,2) एक चतुर्भुज ABCD के शीर्ष हैं। दिखाइये कि ABCD की भुजाएँ समान्तर हैं।

5. रेखा की प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके, दिखाइये कि बिन्दु A(6, – 1), B(5,0) तथा C(2,3) संरेख हैं। [संकेत : AB, BC तथा CA की प्रवणताएँ बराबर होना चाहिएँ]

6. k का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि बिन्दुओं (k, 9) तथा (2,7) को मिलाने वाली रेखा बिन्दुओं (2,–2) तथा (6,4) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर हैं।

7. रेखा की प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके दिखाइये कि बिन्दुओं (– 4,–1), (–2,– 4), (4,0) तथा (2,3) को दिए हुए क्रम में लेने पर यह एक आयत के शीर्ष हैं।

8. त्रिभुज ABC के शीर्ष A(–3,3), B(–1,– 4) तथा C(5,–2). हैं। M तथा N, AB और AC के मध्यबिन्दु हैं। दिखाइये कि MN ∥ BC और MN = $\dfrac{1}{2}$BC.

13.9 एक रेखा द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड

यदि एक रेखा (मूलबिन्दु से होकर नहीं जाती) x-अक्ष को बिन्दु A पर तथा y-अक्ष को बिन्दु B पर मिलती है, जैसा चित्र 13.17 में दर्शाया गया है। तब

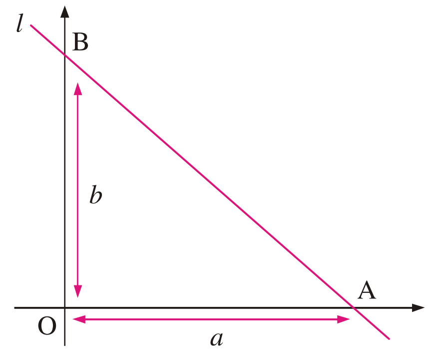
(i) OA, x-अन्तःखण्ड कहलाता है या x-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्तःखण्ड।

(ii) OB, y-अन्तःखण्ड कहलाता है या y-अक्ष पर रेखा द्वारा काटा गया अन्तःखण्ड।

(iii) इस क्रम में OA तथा OB साथ–साथ लेने पर रेखा l द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड कहलाते हैं।

(iv) अक्षों के मध्य रेखा पर कटे अंतःखण्ड को रेखा AB का भाग कहते हैं।

(v) बिन्दु A के निर्देशांक $(a,0)$ तथा बिन्दु B के $(0,b)$ हैं।



चित्र 13.17

एक दिए गए तल में x-अक्ष पर रेखा द्वारा कटे अन्तः खण्ड को ज्ञात करने के लिए हम रेखा के दिये गये समीकरण में $y = 0$ रखते हैं। इस प्रकार प्राप्त x के मान को x अन्तः खण्ड कहते हैं। y-अक्ष पर रेखा का अन्तः खण्ड प्राप्त करने के लिए हम $x = 0$ रखते हैं और इस प्रकार प्राप्त y के मान को y अन्तः खण्ड कहते हैं।

टिप्पणीः 1. एक रेखा जो मूलबिन्दु से होकर जाती है अक्षों पर कोई अंतः खण्ड नहीं बनाती।

2. क्षैतिज रेखा का $\boldsymbol{x}$ अन्तः खण्ड तथा ऊध्वधिर रेखा का $\boldsymbol{y}$ अन्तः खण्ड नहीं होता।

3. सामान्यतया $\boldsymbol{x}$- अक्ष तथा $\boldsymbol{y}$-अक्ष पर कटे अन्तः खण्डों को क्रमशः $\boldsymbol{a}$ तथा $\boldsymbol{b}$ से दर्शाते हैं। परन्तु यदि केवल $\boldsymbol{y}$-अन्तः खण्ड पर विचार करना हो तो इसे $\boldsymbol{c}$ से दर्शाते हैं।

उदाहरण 13.22. एक रेखा का समीकरण $2x+3y=6$ है। इसके x तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिये।

हल : दी गई रेखा का समीकरण है : $2x+3y=6$ ... (i)

(i) में $x = 0$ रखने पर, हमें प्राप्त होता है $y = 2$ इस प्रकार y-अन्तः खण्ड 2 है।

पुनः $y = 0$ समीकरण (i) में रखने पर, हमें प्राप्त होता है $2x = 6 \Rightarrow x = 3$ इस प्रकार x-अन्तः खण्ड 3 है।

देखें आपने कितना सीखा 13.8

1. यदि रेखाओं के समीकरण निम्न हों, तो x तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिये :

(i) $x+3y=6$ (ii) $7x+3y=2$ (iii) $\dfrac{x}{2a}+\dfrac{y}{2b}=1$ (iv) $ax+by=c$

(v) $\dfrac{y}{2}-2x=8$ (vi) $\dfrac{y}{3}-\dfrac{2x}{3}=7$

13.10 दो रेखाओं के बीच का कोण

माना l_1 तथा l_2 ऐसी दो रेखाऐं हैं जो ऊर्ध्वाधर अथवा लम्बवत नहीं हैं तथा जिनकी प्रवणताएँ क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं। मान लीजिए l_1 तथा l_2 द्वारा x-अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बने कोण क्रमशः α_1 तथा α_2 हैं। तब $m_1 = \tan \alpha_1$ तथा $m_2 = \tan \alpha_2$

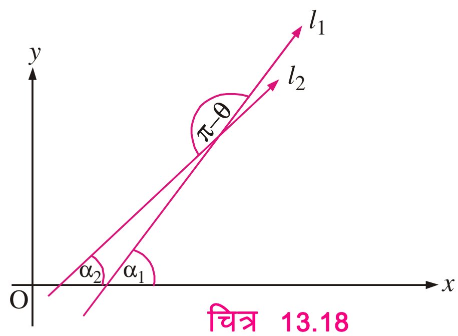
चित्र से, हमें प्राप्त होता है $\alpha_1 = \alpha_2 + \theta$

$\therefore \quad \theta = \alpha_1 - \alpha_2$

$\Rightarrow \quad \tan\theta = \tan(\alpha_1 - \alpha_2)$

अर्थात् $\quad \tan\theta = \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1.\tan\alpha_2}$

अर्थात् $\quad \tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ ...(1)



चित्र 13.18

जैसा कि चित्र से स्पष्ट है कि रेखाओं l_1 तथा l_2 के बीच दो कोण θ तथा $\pi - \theta$ हैं।

हम जानते हैं $\tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$

$\therefore \quad \tan(\pi - \theta) = -\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}\right)$

माना $\quad \pi - \theta = \phi$

$\therefore \quad \tan\phi = -\left(\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}\right)$ ...(2)

- यदि $\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ धनात्मक है तब $\tan\theta$ धनात्मक हैं तथा $\tan\phi$ ऋणात्मक है अर्थात् θ न्यूनकोण है तथा ϕ अधिक कोण है।

- यदि $\dfrac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}$ ऋणात्मक है तब $\tan\theta$ ऋणात्मक है तथा $\tan\phi$ धनात्मक है अर्थात् θ अधिककोण तथा ϕ न्यूनकोण है।

रेखाओं l_1 तथा l_2 जिनकी प्रवणताएँ क्रमशः m_1 तथा m_2 हैं के बीच न्यूनकोण (θ कह सकते हैं) इस प्रकार दिया जाता है

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1+m_1m_2}\right| \text{ जहाँ } 1 + m_1m_2 \neq 0.$$

अधिककोण (ϕ कह सकते हैं) सूत्र $\phi = 180° - \theta$ उपयोग द्वारा प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 13.23. उन रेखाओं के बीच न्यूनकोण तथा अधिककोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ $\frac{3}{4}$ तथा $\frac{-1}{7}$ हैं।

हल : मान लीजिए रेखाओं के बीच क्रमशः θ तथा ϕ न्यूनकोण तथा अधिक कोण हैं।

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{-1}{7}\right)}\right| = \left|\frac{21+4}{28-3}\right| = |1| = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \theta = 45^\circ$$

$$\therefore \qquad \phi = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ.$$

उदाहरण 13.24. x-अक्ष तथा बिन्दुओं (3, –1) और (4, –2) को मिलाने वाली रेखा के बीच कोण (न्यूनकोण या अधिककोण) ज्ञात कीजिए।

हल : x-अक्ष की प्रवणता (m_1 कह सकते हैं) = 0

दी गई रेखा की प्रवणता (m_2 कह सकते हैं) $= \frac{-2+1}{4-3} = -1$

$$\therefore \qquad \tan\theta = \left|\frac{0+1}{1+(0)(-1)}\right| = 1$$

$\Rightarrow \qquad \theta = 45^\circ$ न्यूनकोण है।

उदाहरण 13.25. यदि दो रेखाओं के बीच का कोण $\frac{\pi}{4}$ है तथा एक रेखा की प्रवणता $\frac{1}{2}$ है तो दूसरी रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ, $\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{\frac{1}{2}-m_2}{1+\left(\frac{1}{2}\right)(m_2)}\right|$

$$\Rightarrow \qquad \left|\frac{1-2m_2}{2+m_2}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1-2m_2}{2+m_2} = 1 \text{ or } \frac{1-2m_2}{2+m_2} = -1.$$

$$\Rightarrow \qquad m_2 = -\frac{1}{3} \text{ or } m_2 = 3.$$

$\therefore$ दूसरी रेखा की प्रवणता 3 या $-\frac{1}{3}$.

देखें आपने कितना सीखा 13.9

1. उन रेखाओं के बीच न्यूनकोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ 5 तथा $\frac{2}{3}$ हैं।

2. उन रेखाओं के बीच का अधिककोण ज्ञात कीजिए जिनकी प्रवणताएँ 2 तथा –3 हैं।

3. रेखाओं l_1 तथा l_2 के बीच का न्यूनकोण ज्ञात कीजिए जहाँ l_1 बिन्दुओं (0, 0) और (2, 3) के मिलने से बनती है तथा l_2 बिन्दुओं (2, –2) और (3, 5) के मिलने से बनती है।

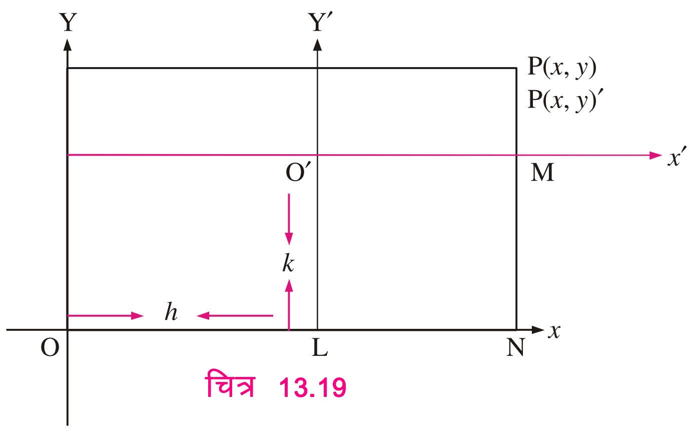
13.11 मूलबिन्दु का स्थानान्तरण

x-अक्ष तथा y-अक्ष को आलेखितकर प्रत्येक समतल को चार भागों में बाँटा/ विभाजित किया जाता है तथा समतल में स्थित प्रत्येक बिंदु एक वास्तविक संख्याओं के क्रमित युग्म द्वारा निरूपित किया जाता हैं जो अक्षों से उस बिन्दु की लम्बवत दूरियाँ दर्शाता हैं। हम यह भी जानते हैं कि यह अक्ष स्वेच्छा से लिए जा सकते हैं, अतः समतल में स्थित इन अक्षों की स्थिति निश्चित नहीं है। अक्षों की स्थिति परिवर्तित हो सकती। जब हम अक्षों की स्थिति बदलते हैं तो प्रत्येक बिन्दु के संगत निर्देशांक भी बदल जाते हैं। फलस्वरूप वक्र की समीकरण भी बदल जाती है।

निम्नलिखित विधियों द्वारा अक्षों को बदल/परिवर्तित कर सकते हैं।

(i) अक्षों का स्थानान्तरण (ii) अक्षों का घूर्णन/परिक्रमण (iii) अक्षों का स्थानान्तरण और परिक्रमण

इस भाग में हम केवल अक्षों के स्थानान्तरण अर्थात् निर्देशांकों में परिवर्तन पर चर्चा करेंगे।



चित्र 13.19

एक दिए गए समतल के मूलबिन्दु का स्थानान्तरण करके निर्देशांकों में परिवर्तन प्राप्त करना जिसमें निर्देशांक अक्षों की दिशा न बदले, को अक्षों का स्थानान्तरण कहते हैं।

आइए देखें कि समतल में स्थित एक बिन्दु के निर्देशांक, अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा कैसे परिवर्तित होते हैं। मान लीजिए $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ दिए गए अक्ष हैं। माना मूलबिन्दु O अक्षों $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ के स्थानान्तरण द्वारा $O'(h, k)$ पर स्थानान्तरित हो जाता है। मान लीजिए $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ नये अक्ष हैं जैसा कि उपरोक्त चित्र में दर्शाया गया है। तब $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ के संदर्भ में बिन्दु O' के निर्देशांक (0, 0) हैं।

मान लीजिए निकाय $\overrightarrow{OX}$ तथा $\overrightarrow{OY}$ में P के निर्देशांक (x, y) तथा $\overrightarrow{O'X'}$ तथा $\overrightarrow{O'Y'}$ में P के निर्देशांक (x', y') हैं तब $O'L = k$ तथा $OL = h$ है।

अब $x = \text{ON} = \text{OL} + \text{LN}$

$= \text{OL} + \text{O}'\text{M}$

$= h + x'$.

तथा $y = \text{PN} = \text{PM} + \text{MN} = \text{PM} + \text{O}'\text{L} = y' + k$.

अतः $x = x' + h;\ y = y' + k$

या $x' = x - h,\ y' = y - k$

- यदि अक्षों के रूपान्तरण द्वारा मूलबिन्दु को (h, k) पर स्थानान्तरित किया जाता है तब बिन्दु $P(x, y)$ के निर्देशांक $P(x-h, y-k)$ में परिवर्तित हो जाते हैं तथा वक्र $F(x, y) = 0$ का समीकरण $F(x' + h, y' + k) = 0$ में परिवर्तित हो जाता है।
- स्थानान्तरण सूत्र हमेशा सत्य होता है तथा इस पर निर्भर नहीं करता कि नए निकाय का मूलबिंदु किस चतुर्थांश में है।

उदाहरण 13.26. जब मूलबिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(-3, 2)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तब नये अक्ष के सापेक्ष बिन्दु $(1, 2)$ के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $(h, k) = (-3, 2)$, $(x , y) = (1, 2)$, $(x', y') = ?$

$x' = x - h = 1 + 3 = 4$

$y' = y - k = 2 - 2 = 0$

अतः $(x', y') = (4, 0)$

उदाहरण 13.27. जब मूल बिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(3, 4)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है तब रेखा $3x + 2y - 5 = 0$ की परिवर्तित समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $(h, k) = (3, 4)$

$\therefore \quad x = x' + 3$ तथा $y = y' + 4$.

x तथा y के इन मानों को रेखा की समीकरण में रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$3(x' + 3) + 2(y' + 4) - 5 = 0$$

अर्थात् $3x' + 2y' + 12 = 0$.

देखें आपने कितना सीखा 13.10

1. (i) अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा, क्या रेखाखण्ड की लम्बाई परिवर्तित होती है? हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए।

   (ii) अक्षों के स्थानान्तरण के सापेक्ष क्या अचर बिन्दु होते हैं? हाँ या नहीं में उत्तर दीजिए।

   (iii) जब मूलबिन्दु को अक्षों के स्थानान्तरण द्वारा बिन्दु $(4, -5)$ पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तो बिन्दु $(0, 3)$ के निर्देशांक हैं....

   (iv) जब मूल बिन्दु को $(2, 3)$, पर स्थानान्तरित कर दिया जाता है, तब P के निर्देशांक बदलकर/परिवर्तित होकर, $(4, 5)$ हो जाते हैं। मूल निकाय में बिन्दु P के निर्देशांक हैं....

   (v) अक्षों के स्थानान्तरण से यदि बिन्दु $(3, 0)$, बिंदु $(2, -3)$ में परिवर्तित हो जाता है, तब मूलबिन्दु, बिन्दु.... पर स्थानान्तरित हो जाता है।

आइये दोहराएँ

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) के बीच की दूरी $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ है।

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में अन्तः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$$

- बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा को $m_1 : m_2$ के अनुपात में बाहय विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{m_1x_2 - m_2x_1}{m_1 - m_2}, \frac{m_1y_2 - m_2y_1}{m_1 - m_2}\right)$$ हैं।

- (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को मिलाने वाली रेखा के मध्य बिन्दु के निर्देशांक

  $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ हैं।

- शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) और (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल

  $$\frac{1}{2}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (x_2y_3 - x_3y_2) + (x_3y_1 - x_1y_3)]$$

- तीन बिन्दु A, B, और C संरेख होते हैं यदि उनके द्वारा बने त्रिभुज का क्षेत्रफल शून्य हो।

- यदि किसी रेखा का x- अक्ष से ऊपर का भाग धनात्मक x-अक्ष के साथ θ कोण बनाए तो रेखा की प्रवणता $m = \tan\theta$ होती है।

- $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

- एक रेखा जिसकी प्रवणता m_1 है, रेखा जिसकी प्रवणता m_2 है, के समान्तर होगी यदि

  $m_1 = m_2$

- एक रेखा जिसकी प्रवणता m_1 है, दूसरी रेखा जिसकी प्रवणता m_2 है, के लम्बवत होगी यदि

  $m_1 \times m_2 = -1.$

- एक रेखा l (मूल बिन्दु से होकर नहीं जाती) x- अक्ष को A पर तथा y- अक्ष को B पर मिलती है, तब OA को x-अन्तः खण्ड तथा OB को y- अन्तः खण्ड कहते हैं।

- यदि दो रेखाओं की प्रवणताएं क्रमशः m_1 और m_2 हैं, तो उनके बीच का कोण θ, निम्न प्रकार ज्ञात किया जाता है। $\tan\theta = \dfrac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}$ जहां $m_1m_2 \neq 0$

  यदि $\tan\theta$ का मान ऋणात्मक है तो रेखाओं के बीच का कोण अधिककोण है और यदि $\tan\theta$ धनात्मक हो तो कोण अधिककोण हो।

- जब मूल बिन्दु को (h, k) पर स्थानातरित किया जाता है तो बिन्दु $P(x, y)$ के परिवर्तित निर्देशांक (मान लीजिए (x', y')) $(x - h, y - k)$ हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=4qMOPFtQ4iQ*
- *https://www.youtube.com/watch?v=iCX3d6aQPKw*

आइए अभ्यास करें

1. बिन्दु युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए :

   (a) (2, 0) और (1, cot θ) (b) (–sin A, cosA) और (sin B, cos B)

2. नीचे दिए गए बिन्दुओं के समूहों में से कौन–कौन से त्रिभुज बनाते हैं?

   (a) (3, 2), (–3, 2) और (0, 3) (b) (3, 2), (3, –2) और (3, 0)

3. बिन्दुओं (3. –5) और (–6, 8) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

4. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्षों के निर्देशांक हैं :

   (a) (1, 2), (–2, 3), (–3, –4) (b)(c, a), (c + a, a), (c – a, –a)

5. दिखाइये कि निम्नलिखित बिन्दुओं के समूह संरेख हैं (यह दिखाकर कि त्रिभुज का क्षेत्रफल जो बिन्दुओं से बनता है शून्य है :

   (a) (–2, 5), (2, –3) और (0, 1) (b) (a, b + c), (b, c + a) और (c, a + b)

6. यदि (–3, 12), (7, 6) और (x, a) संरेख हों, तो x ज्ञात कीजिए।

7. उस चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (4,3) (–5,6) (0,7) और (3,–6) हैं।

8. निम्न बिन्दुओं से होकर जानेवाली रेखा की प्रवणता ज्ञात कीजिए :

   (a) (1,2), (4,2) (b) (4, – 6), (–2, –5)

9. y का मान क्या होगा जिससे, (3, y) तथा (2,7) से होकर जाने वाली रेखा (–1, 4) और (0, 6) से होकर जाने वाली रेखा के समान्तर हो।

10. पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग किए बिना दिखाइये कि बिन्दु (4, 4), (3, 5) और (–1, –1) एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

11. प्रवणता की अवधारणा का उपयोग करके बताइये कि निम्नलिखित बिन्दुओं का कौन सा समूह संरेख है : (i) (–2, 3) , (8, –5) और (5, 4) (ii) (5, 1) , (1, – 1) और (11, 4),

12. यदि A (2, –3) और B (3, 5) आयत ABCD के दो शीर्ष हैं, प्रवणता ज्ञात कीजिए :

    (i) BC की (ii) CD की (iii) DA की

13. एक चतुर्भुज के शीर्ष बिन्दु (7, 3), (3, 0), (0, – 4) और (4, –1) हैं। प्रवणता का उपयोग करके दिखाइये कि चतुर्भुज की भुजाओं के मध्य बिन्दुओं से बना चतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज होता है।

14. निम्नलिखित रेखाओं के x- अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए :

    (*i*) $2x-3y=8$ (*ii*) $3x-7y+9=0$ (*iii*) $x-\frac{y}{2}=3$

15. जब अक्षों के स्थानान्तरण से मूलबिन्दु को बिन्दु (3, 4) पर स्थानान्त्रित किया जाता है, तो $2x^2+4xy+5y^2=0$ की परिवर्तित समीकरण ज्ञात कीजिए।

16. यदि मूलबिन्दु को बिन्दु (3, –4), पर स्थानान्तरित किया जाता है, तब वक्र की परिवर्तित समीकरण $(x')^2+(y')^2=4$ है, तो वक्र की मूल समीकरण ज्ञात कीजिए।

17. यदि A(–2, 3), B(3, 8) तथा C(4, 1) ΔABC के शीर्ष हैं, $\angle ABC$ ज्ञात कीजिए।

18. बिन्दुओं A(9, 2), B(17, 11), C(5, – 3) तथा D(–3, –2) द्वारा बने चतुर्भुज ABCD के विकर्णों के बीच बने न्यूनकोण को ज्ञात कीजिए।

19. रेखाओं AB तथा BC के बीच का न्यूनकोण ज्ञात कीजिए, दिया है कि A (5, –3), B (–3, –2) तथा C (9, 12)।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 13.1

(a) $\sqrt{58}$ (b) $\sqrt{2(a^2+b^2)}$

देखें आपने कितना सीखा 13.2

1. (a) $\left(\frac{1}{2},4\right)$ (b) (2,5) 2. (1,4)

3. (a) (2,6) 4. $\left(3,\frac{5}{3}\right),\left(4,\frac{1}{3}\right)$

देखें आपने कितना सीखा 13.3

1. (a) $\frac{25}{2}$ वर्ग इकाई (b) 12 वर्ग इकाई (c) $\frac{a^2}{2}$ वर्ग इकाई

2. $k=\frac{5}{3}$ 3. 80 वर्ग इकाई 4. $\frac{41}{2}$ वर्ग इकाई

देखें आपने कितना सीखा 13.4

5. $k=3$ 6. $k=\frac{1}{2},-1$

देखें आपने कितना सीखा 13.5

1. (*i*) $\sqrt{3}$ (*ii*) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ 2. $-\sqrt{3}$ 3. $-\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.6

1. -3 2. 5   3. $-\frac{7}{3}$ 4. $\frac{5}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.7

2. $\frac{1}{3}$ 3. $\frac{14}{3}$ 6. $k = \frac{10}{3}$

देखें आपने कितना सीखा 13.8

1. (*i*) x-अन्तः खण्ड = 6, y-अन्तः खण्ड = 2
   (*ii*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{2}{7}$, y-अन्तः खण्ड = $\frac{2}{3}$
   (*iii*) x-अन्तः खण्ड = $2a$, y-अन्तः खण्ड = $2b$
   (*iv*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{c}{a}$, y-अन्तः खण्ड = $\frac{c}{b}$
   (*v*) x-अन्तः खण्ड = -4, y-अन्तः खण्ड = 16
   (*vi*) x-अन्तः खण्ड = $\frac{-21}{2}$, y-अन्तः खण्ड = 21

देखें आपने कितना सीखा 13.9

1. 45°   2. 135°   3. $\tan\theta = \frac{11}{23}$

देखें आपने कितना सीखा 13.10

1. (i) नहीं   (ii) हां   (i) (–4, 8),   (iv) (6, 8)   (v) (1, 3)

आइए अभ्यास करें

1. (a) cosec θ (b) $2\sin\frac{A+B}{2}$
2. दिया गया कोई समूह त्रिभुज नहीं बनाता
3. $\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ 4. (a) 11 वर्ग इकाई   (b) a^2 वर्ग इकाई
6. $\frac{51-5a}{3}$ 7. 29 वर्ग इकाई   8. (*a*) 0   (b) $-\frac{1}{6}$
9. $y = 3$ 11. केवल (*ii*)   12. (*i*) $-\frac{1}{8}$ (*ii*) 8   (*iii*) $-\frac{1}{8}$
14. (*i*) 4   (*ii*) -3 (*iii*) 3
15. $x^2 + 4y^2 + 4xy + 116x + 2y + 259 = 0$ 16. $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 21 = 0$
17. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ 18. $\tan^{-1}\left(\frac{48}{145}\right)$ 19. $\tan^{-1}\left(\frac{62}{55}\right)$

14

सरल रेखाएँ

ज्यामिति में हमने रेखाओं, कोणों और आयताकार आकृतियों के बारे में पढ़ा है। ध्यान दीजिए कि एक समतल में दो बिन्दुओं को मिलाने से एक रेखा बनती है। हमें रैखिक समीकरणों से ग्राफ भी देखने को मिलते हैं, जो सरल रेखाओं में आते हैं।

रोचकतापूर्ण, एक समतल में विभिन्न शर्तों के अन्तर्गत उपर्युक्त समस्या का विपरीत प्राप्त करना ही सरल रेखाओं के समीकरण हैं। विश्लेषणात्मक ज्यामिति का सर्वनिष्ठ, निर्देशांक ज्यामिति कहलाता है। इस पाठ में हम सरल रेखाओं के समीकरण विभिन्न रूपों में ज्ञात करेंगे और उन पर आधारित समस्याओं को हल करने का प्रयत्न करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगे

- अक्षों के समान्तर प्रत्येक रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करना
- रेखा के विभिन्न रूपों (प्रवणता–अन्तःखण्ड, बिन्दु–प्रवणता, दो बिन्दु, अन्तःखण्ड और लम्बवत्) में समीकरण व्युत्पन्न करना
- दी गई शर्तों के अन्तर्गत विभिन्न रूपों में रेखा का समीकरण ज्ञात करना
- रेखा के प्रथम घात के व्यापक समीकरण का वर्णन करना
- रेखा के व्यापक समीकरण को व्यक्त करना

  (i) प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप (ii) अन्तःखण्ड रूप और (iii) लम्बवत् रूप
- एक दी हुई रेखा से दिए हुए बिन्दु की दूरी का सूत्र ज्ञात करना
- एक दी हुई रेखा से दिए हुए बिन्दु की दूरी की गणना करना
- एक दिए हुए बिन्दु से होकर तथा एक दी हुई रेखा के समान्तर/लम्बवत् रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करना;
- दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण ज्ञात करना।

पूर्वज्ञान

- त्रिभुजों की सर्वांगसमता और समरूपता

14.1 एक अक्ष के समान्तर रेखा

यदि आप एक कमरे में अपनी भुजाएँ किसी किनारे के समान्तर खोलकर खड़े हो जाएँ तो हम फर्श पर भुजाओं के समान्तर रेखा खींच सकते हैं। इस रेखा के लम्बवत् एक रेखा खींची जा सकती है जो पहली रेखा को अपनी टांगों के बीच में प्रतिच्छेद करे।

इस स्थिति में आपके सामने की रेखा का भाग व आपके पीछे जाने वाली रेखा का भाग y-अक्ष है तथा आपकी भुजाओं के समान्तर रेखा x-अक्ष है।

y-अक्ष का वह भाग जो आप देख सकते हैं धनात्मक है तथा बांयी ओर का भाग ऋणात्मक।

अब माना कि आपके सम्मुख किनारा आपसे 'b' मीटर दूर है तब इस किनारे का समीकरण होगा $y = b$ (x-अक्ष के समान्तर)

जहाँ b का निरपेक्ष मान x-अक्ष से विपरीत किनारे की दूरी के बराबर है।

यदि $b > 0$, तब किनारा आपके सामने आयेगा अर्थात् x-अक्ष के ऊपर।

यदि $b < 0$, तब किनारा आपके पीछे होगा अर्थात् x-अक्ष के नीचे।

यदि $b = 0$, तब रेखा आपसे होकर गुजरेगी अर्थात् स्वयं x-अक्ष।

पुनः, माना कि आपके दायीं ओर का किनारा आपसे c मीटर की दूरी पर है तब इस किनारे का समीकरण होगा $x = c$ (y-अक्ष के समान्तर)

जहाँ c का निरपेक्ष मान y-अक्ष से दूरी के बराबर है जोकि आपके दायीं ओर है।

यदि $c > 0$, तब किनारा (रेखा) आपके दायीं ओर है अर्थात् y-अक्ष के दायीं ओर।

यदि $c < 0$, तब किनारा (रेखा) आपके बांयीं ओर है अर्थात् y-अक्ष के बांयीं ओर।

यदि $c = 0$, तब रेखा आपसे होकर गुजरती है अर्थात् यह y-अक्ष है।

उदाहरण 14.1. बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

(i) x-अक्ष के समान्तर हो (ii) y-अक्ष के समान्तर हो।

हल : (i) x-अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है: $y = b$

क्योंकि यह बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाती है अतः $-3 = b$

$\therefore$ रेखा का वांछित समीकरण हुआ: $y = -3$

(ii) y-अक्ष के समान्तर किसी रेखा का समीकरण है: $x = c$

क्योंकि यह बिन्दु $(-2, -3)$ से होकर जाती है अतः $-2 = c$

$\therefore$ रेखा का वांछित समीकरण है: $x = -2$

देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. बिन्दु (–3, –4) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो

   (a) x-अक्ष के समान्तर हो (b) y-अक्ष के समान्तर हो

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (5, –3) से होकर जाती है तथा x-अक्ष पर लम्ब है।

3. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो (–3, –7) से होकर जाती है तथा y-अक्ष पर लम्ब है।

14.2 सरल रेखा के समीकरण का व्युत्पन्नः विभिन्न मानक रूप में

अभी तक हमने रेखा की आनति, झुकाव, प्रवणता तथा अक्षों के समान्तर रेखाओं के बारे में पढ़ा है। अब प्रश्न यह है कि क्या हम x और y में कोई सम्बन्ध ज्ञात कर सकते हैं जबकि (x, y) रेखा पर कोई स्वेच्छ बिन्दु है।

x और y में वह सम्बन्ध जो रेखा के स्वैच्छिक बिन्दु के निर्देशांकों से संतुष्ट होता है सरल रेखा का समीकरण कहलाता है। रेखा का समीकरण दी गई स्थितियों के अनुसार विभिन्न रूपों में ज्ञात किया जा सकता है जैसे

(a) जब रेखा की प्रवणता तथा y-अक्ष पर उसका अन्तःखण्ड दिया हो।

(b) जब रेखा की प्रवणता दी हुई हो तथा एक दिए हुए बिन्दु से होकर जाती हो।

(c) जब रेखा दो दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाती हो।

(d) जब हमें रेखा द्वारा अक्षों पर बने अन्तःखण्ड दिए हों।

(e) जब हमें मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई दी गई है तथा लम्ब के द्वारा धनात्मक x-अक्ष के साथ बनने वाला कोण दिया हो।

यहाँ हम एक–एक करके सभी स्थितियों की चर्चा करेंगे तथा रेखा का समीकरण मानक रूप में ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

(A) प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप

माना AB एक सरल रेखा है जो x-अक्ष के साथ θ कोण बनाती है तथा अन्तःखण्ड $OD = c$, OY पर अन्तःखण्ड काटती है।

रेखा y-अक्ष पर $OD = c$ अन्तःखण्ड काटती है यह y-अन्तःखण्ड कहलाता है।

माना AB, OX' को T पर काटती है।

AB पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लें। $PM \perp OX$ खींचिए।

तब $OM = x$, $MP = y$. $DN \perp MP$ खींचें।

समकोण ΔDNP से हमें प्राप्त हुआ:

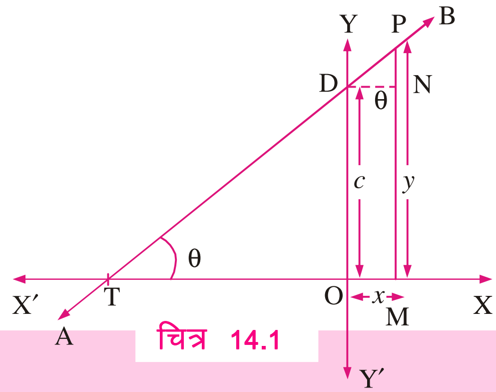
$$\tan\theta = \frac{NP}{DN} = \frac{MP - MN}{OM} = \frac{y - OD}{OM} = \frac{y - c}{x}$$

$\therefore$ $y = x\tan\theta + c$

$\tan\theta = m$ (प्रवणता)

$\therefore \qquad y = mx + c$

क्योंकि यह समीकरण रेखा AB के ऊपर प्रत्येक बिन्दु के लिए सत्य है परन्तु तल में किसी और बिन्दु के लिए नहीं, इसलिए यह रेखा AB के समीकरण का निरूपण है।



चित्र 14.1

टिप्पणी

टिप्पणी : (1) जब $c = 0$ और $m \neq 0 \Rightarrow$ रेखा मूलबिन्दु से गुज़र रही है और इसका समीकरण $y = mx$ है।

(2) जब $c = 0$ और $m = 0 \Rightarrow$ रेखा x-अक्ष के साथ संपाती है और इसका समीकरण $y = 0$ है।

(3) जब $c \neq 0$ और $m = 0 \Rightarrow$ रेखा x-अक्ष के समान्तर है और इसका समीकरण $y = c$ है।

उदाहरण 14.2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 4 तथा y-अन्तःखण्ड 0 है।

हल : $m = 4$ तथा $c = 0$ रखने पर समीकरण का प्रवणता अन्तःखण्ड रूप से हमें प्राप्त हुआ

$$y = 4x$$

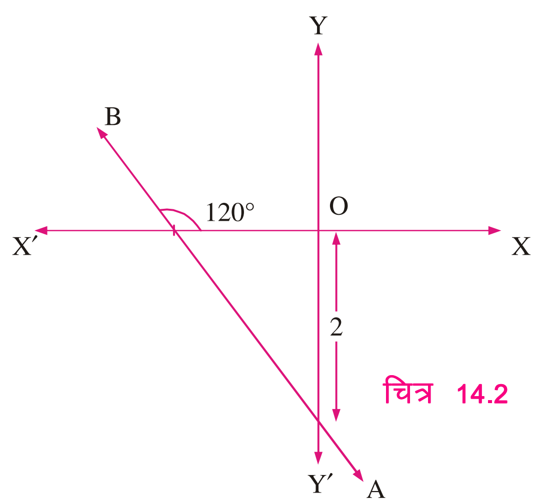
और यही रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.3. उस रेखा की प्रवणता तथा y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $8x + 3y = 5$ है।

हल : y के लिए हल करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$y = -\frac{8}{3}x + \frac{5}{3}$$

इस समीकरण की तुलना प्रवणता अन्तःखण्ड रूप से करने पर हम देखते हैं कि $m = -\frac{8}{3}$ और $c = \frac{5}{3}$ अतः रेखा की प्रवणता $-\frac{8}{3}$ तथा y-अन्तःखण्ड $\frac{5}{3}$ है।



चित्र 14.2

उदाहरण 14.4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक y-अक्ष पर 2 लम्बाई का अन्तःखण्ड काटती है और x-अक्ष पर 120° आनति है।

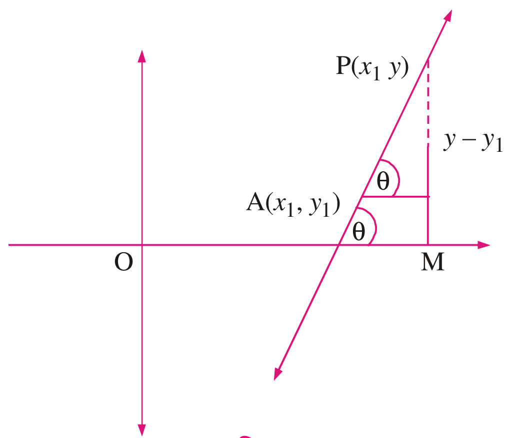
हल : रेखा की प्रवणता अन्तःखण्ड रूप से

$$y = x\tan 120^\circ + (-2) = -\sqrt{3}\,x - 2 \quad \text{या} \quad y + \sqrt{3}\,x + 2 = 0$$

यहाँ $m = \tan 120^\circ$, और $c = -2$, क्योंकि अन्तःखण्ड y-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में कट रहा है।

(B) बिन्दु–प्रवणता रूप

यहाँ हम उस रेखा का समीकरण ज्ञात करेंगे जो दिए हुए बिन्दु $A(x_1, y_1)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता m है।



चित्र 14.3

माना $P(x, y)$ उस रेखा पर A के अतिरिक्त कोई और बिन्दु है।

$A(x_1, y_1)$ तथा $P(x, y)$ को मिलाने वाली रेखा की प्रवणता

$$m = \tan\theta = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

परन्तु रेखा AP की प्रवणता m दिया गया है।

$$\therefore \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$\therefore$ वांछित रेखा का समीकरण है $y - y_1 = m(x - x_1)$

टिप्पणी: क्योंकि y-अक्ष के समान्तर रेखाओं के लिए प्रवणता m परिभाषित नहीं है इसलिए बिन्दु प्रवणता रूप के समीकरण से उस रेखा का समीकरण प्राप्त नहीं किया जा सकता जो $A(x_1, y_1)$ से होकर जाती है तथा y-अक्ष के समान्तर है। परन्तु इससे कोई कठिनाई नहीं होती क्योंकि इस प्रकार की रेखाओं पर किसी बिन्दु का x-निर्देशांक x_1 होता है इसलिए इस प्रकार की रेखा का समीकरण $x = x_1$ है।

उदाहरण 14.5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, -1)$ से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $\frac{2}{3}$ है।

हल : बिन्दु प्रवणता रूप के समीकरण में $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ और $m = \frac{2}{3}$ रखने पर हमें प्राप्त हुआ

$$y - (-1) = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y + 1 = \frac{2}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$$

यही रेखा का वांछित समीकरण है।

(C) दो बिन्दु रूप

माना $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ दो भिन्न बिन्दु हैं। इन बिन्दुओं से होकर जाती हुई रेखा की प्रवणता होती है

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (x_2 \neq x_1)$$

रेखा के बिन्दु–प्रवणता रूप के समीकरण से हमें प्राप्त हुआ

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

यही दो बिन्दु रूप में रेखा का समीकरण है।

उदाहरण 14.6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (3, – 7) तथा (– 2,– 5) से होकर जाती है।

हल : दो बिन्दुओं (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण होता है

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad \cdots (i)$$

क्योंकि $x_1 = 3$, $y_1 = -7$ और $x_2 = -2$, और $y_2 = -5$, समीकरण (i) हो जाएगा

$$y + 7 = \frac{-5+7}{-2-3}(x-3) \text{ या } y + 7 = \frac{2}{-5}(x-3)$$

या $\quad 2x + 5y + 29 = 0$

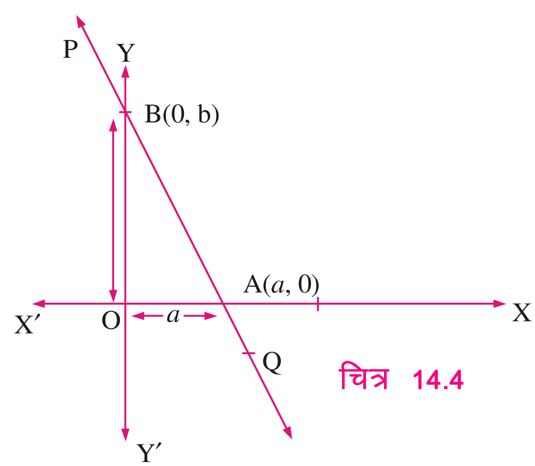
(D) अन्तःखण्ड रूप

हम उस रेखा का समीकरण ज्ञात करना चाहते हैं जो निर्देशांक अक्षों पर दिए गए अन्तःखण्ड काटती है।

माना PQ एक रेखा है जो x-अक्ष को A पर तथा y-अक्ष को B पर मिलती है।

माना $OA = a, \qquad OB = b.$

तब A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ तथा $(0, b)$ होंगे



चित्र 14.4

A और B को मिलाने वाली रेखा का समीकरण है

$$y - 0 = \frac{b-0}{0-a}(x-a)$$

या $$y = -\frac{b}{a}(x-a)$$

या $$\frac{y}{b} = -\frac{x}{a} + 1 \text{ या } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

यही उस रेखा का वांछित समीकरण है जो अक्षों पर a और b अन्तःखण्ड काटती है।

उदाहरण 14.7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x और y-अक्षों से क्रमशः 5 और –3 अन्तःखण्ड काटती है।

हल : x और y-अक्ष पर अन्तःखण्ड 5 और –3 हैं अर्थात् $a = 5$, $b = -3$

रेखा का वांछित समीकरण है

$$\frac{x}{5}+\frac{y}{-3}=1 \text{ या } 3x-5y-15=0$$

उदाहरण 14.8. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, 4) से होकर जाती है तथा अक्षों पर समान परिमाण लेकिन विपरीत चिह्न के अन्तःखण्ड काटती है।

हल : माना x-अन्तःखण्ड तथा y-अन्तःखण्ड क्रमशः a तथा –a हैं।

∴ रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{-a}=1$$

$$x-y=a \qquad \cdots \text{(i)}$$

चूंकि (i) (3, 4) से होकर जाती है

∴ $3-4=a$ या

या $a=-1$

इस प्रकार रेखा का वांछित समीकरण है

$$x-y=-1$$

या $x-y+1=0$

उदाहरण 14.9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (– 1,1) से हो कर जाती है तथा x-अक्ष के समान्तर है।

हल : चूंकि x-अक्ष के समान्तर रेखा की प्रवणता शून्य होती है, इसलिए बिन्दु–प्रवणता रूप के समीकरण से हमें प्राप्त हुआ

$$y-1=0\,[x-(-1)]$$

$$y-1=0$$

यही रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.10. निर्देशांक अक्षों पर रेखा $3x-2y+12=0$ द्वारा काटे गए अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दी हुई रेखा का समीकरण है

$$3x-2y=-12.$$

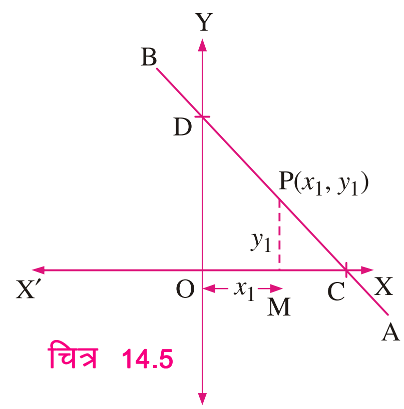
– 12 से भाग करने पर, हमें प्राप्त हुआ $\frac{x}{-4}+\frac{y}{6}=1$

इस समीकरण की तुलना अन्तःखण्ड रूप में रेखा के मानक समीकरण से करने पर हमें प्राप्त हुआ

$a = -4$ तथा $b = 6$. अतः x-अक्ष और y-अक्ष पर अन्तःखण्ड क्रमशः -4 और 6 हैं।

उदाहरण 14.11. एक रेखा का अक्षों के बीच का अन्तःखण्ड बिन्दु (x_1, y_1) पर समद्विभाजित होता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : माना $P(x_1, y_1)$ रेखा AB के अक्षों के बीच अन्तःखण्ड CD का मध्यबिन्दु है। $PM \perp OX$ खींचिए।



चित्र 14.5

$\therefore \quad OM = x_1$ और $MP = y_1$

$\therefore \quad OC = 2x_1$ और $OD = 2y_1$

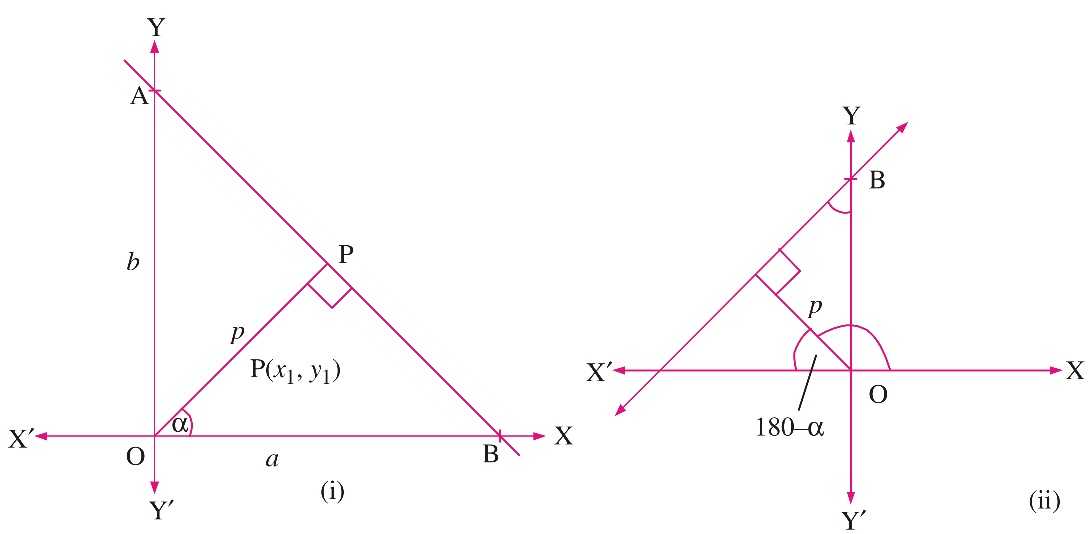
अब रेखा के अन्तःखण्ड रूप के अनुसार

$$\frac{x}{2x_1} + \frac{y}{2y_1} = 1 \text{ या } \frac{x}{x_1} + \frac{y}{y_1} = 2$$

यह रेखा का वांछित समीकरण है।

(e) लम्ब रूप (अभिलम्ब रूप)

यहाँ हम रेखा का समीकरण व्युत्पन्न करेंगे जब मूलबिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई 'p' तथा इस लम्ब द्वारा धनात्मक x-अक्ष के साथ बनने वाला कोण α दिया गया है।



चित्र 14.6

(i) माना दी हुई रेखा $A\,B$, x-अक्ष और y-अक्ष से अन्तःखण्ड क्रमशः a और b काटती है। माना AB पर मूलबिन्दु O से लम्ब OP है और $\angle POB = \alpha$ (चित्र 14.6 (i) देखिए)

$$\therefore \quad \frac{p}{a} = \cos\alpha \Rightarrow a = p\sec\alpha$$

और $\dfrac{p}{b} = \sin\alpha \Rightarrow b = p \operatorname{cosec}\alpha$

$\therefore$ AB रेखा का समीकरण है

$$\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{y}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$$

या $x\cos\alpha + y\operatorname{cosec}\alpha = p$

(ii) $\dfrac{p}{a} = \cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$ [चित्र 14.6 (ii) से]

$\Rightarrow$ $a = -p\sec\alpha$

इसी प्रकार b = $p\ cosec\ \alpha$

$\therefore$ रेखा AB का समीकरण है $\dfrac{x}{-a} + \dfrac{y}{b} = 1$

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

टिप्पणी: 1. मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई 'p' है तथा यह सदैव धनात्मक ली जाती है।

2. मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब तथा धनात्मक x-अक्ष के बीच का कोण α है।

उदाहरण 14.12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका α = 135° है तथा मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी $p = \sqrt{2}$ है।

हल : लम्ब रूप के मानक समीकरण से हमें प्राप्त हुआ

$$x\cos 135° + y\sin 135° = \sqrt{2}$$

या $-\dfrac{x}{\sqrt{2}} + \dfrac{y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ या $-x + y - 2 = 0$ या $x - y + 2 = 0$

यही सरल रेखा का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 14.13. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिन्दु से लम्बवत् दूरी 6 इकाई है तथा मूल बिन्दु से लम्ब रेखा धनात्मक x-अक्ष के साथ 30° कोण बनाती है।

हल : यहाँ α = 30°, p = 6

$\therefore$ रेखा का समीकरण हुआ

$$x\cos 30° + y\sin 30° = 6 \text{ या } x\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + y\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \text{ या } \sqrt{3}\,x + y = 12$$

देखें आपने कितना सीखा 14.2

1. (a) एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी प्रवणता 2 है तथा y-अन्तःखण्ड –2 है।

   (b) उस रेखा की प्रवणता और y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $4x + 3y = 6$ है।

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो ऋणात्मक y-अक्ष पर $\frac{1}{\sqrt{3}}$ का अन्तःखण्ड काटती है तथा धनात्मक y-अक्ष पर 120° पर आनति है।

3. उस रेखा की प्रवणता और y-अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए जिसका समीकरण $3x - 6y = 12$ है।

4. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–7, 4) से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता $-\frac{3}{7}$ है।

5. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा दोनों अक्षों के साथ समान कोण बनाती है।

6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, 3) से होकर जाती है और बिन्दुओं (2, –2) तथा (6, 4) को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

7. (a) (3, –4) तथा (–4, 3) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

   (b) आयत ABCD के विकर्णों के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष A (3, 2), B (11, 8), C (8, 12) और D (0, 6) हैं।

8. उस त्रिभुज की माध्यिकाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (2, 0), (0, 2) तथा (4, 6) हैं।

9. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x-अक्ष और y-अक्ष पर क्रमशः 3 इकाई और 2 इकाई अन्तःखण्ड काटती है।

10. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी अक्षों के बीच के खण्ड का मध्य बिन्दु (1, 3) है।

11. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3, –2) से होकर जाती है और x और y-अक्षों पर 4 : 3 के अनुपात में धनात्मक अन्तःखण्ड काटती है।

12. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिस पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई 2 है तथा x-अक्ष के साथ 45° का कोण बनाती है।

13. यदि मूल बिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई p है तथा जिसके अक्षों पर कटे अन्तःखण्ड a और b हैं तो दशाईए कि

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

14.3 प्रथम घात का व्यापक समीकरण

आप जानते हैं कि दो चरों x और y में एक रैखिक समीकरण $\mathrm{A}x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{C} = 0$ ...(1) द्वारा लिखा जाता है।

इस क्रम को आलेखीय निरूपण से समझने के लिए है, हमें निम्न तीन स्थितियों की आवश्यकता है।

स्थिति-1: (जब A और B दोनों शून्य हों)

इस स्थिति में C स्वयं शून्य हो जायेगा और कोई समीकरण नहीं बनेगा।

स्थिति-2: (जब $\mathrm{A} = 0$ और $\mathrm{B} \neq 0$)

इस स्थिति में समीकरण (1) बन जायेगा $\mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$.

या $y = -\dfrac{C}{B}$ और इस समीकरण को वे सभी बिन्दु संतुष्ट करेंगे जो इस रेखा पर स्थित हैं तथा रेखा x- अक्ष के समान्तर है रेखा पर स्थित प्रत्येक बिन्दु का y-निर्देशांक $-\dfrac{C}{B}$ है। अतः यह सरल रेखा का समीकरण है। इसी प्रकार की स्थिति होगी जब $\mathrm{B} = 0$ तथा $\mathrm{A} \neq 0$

स्थिति-3: (जब $\mathrm{A} \neq 0$ और $\mathrm{B} \neq 0$)

समीकरण (1) को y के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होगा

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

स्पष्टतः यह एक सरल रेखा को निरूपित करता है जिसकी प्रवणता $-\dfrac{A}{B}$ तथा y-अन्तःखण्ड $-\dfrac{C}{B}$ है।

14.3.1 सरल रेखा के व्यापक समीकरण को विभिन्न रूपों में परिवख्रतत करना

यदि हमें रेखा का व्यापक समीकरण $\mathrm{Ax} + \mathrm{By} + \mathrm{C} = 0$ के रूप में दिया है तो हम आगे अध्ययन करने से पहले इसे विभिन्न रूपों में परिवख्रतत करना सीखेगें।

14.3.2 प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में परिवख्रतत करना

हमें x और y में एक प्रथम घात का समीकरण $Ax + By + C = 0$ दिया है।

क्या आप इससे रेखा की प्रवणता तथा y-अन्तःखण्ड ज्ञात कर सकते हैं?

हाँ, निस्संदेह, यदि हम इस व्यापक समीकरण को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में रख सकें। इसके लिए आइए दिए गए समीकरण को पुनः व्यवस्थापित करें।

$$Ax + By + C = 0$$

या $\quad By = -Ax - C$ या $y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ (यदि $B \neq 0$)

यही वांछित रूप है। अतः प्रवणता $= -\dfrac{A}{B}$, y-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{C}{B}$

उदाहरण 14.14. समीकरण $x + 7y - 4 = 0$ को प्रवणता–अन्तःखण्ड रूप में परिवख़तत कीजिए। इस प्रकार रेखा की प्रवणता तथा y अन्तः खण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण है

$$x + 7y - 4 = 0 \text{ या } 7y = -x + 4 \text{ या } y = -\frac{1}{7}x + \frac{4}{7}$$

यहां प्रवणता $= -\frac{1}{7}$ और y अन्तः खण्ड $= \frac{4}{7}$

14.3.3 अन्तःखण्ड रूप में परिवख़तत करना

माना कि x और y में प्रथम घात का समीकरण है

$$Ax + By + C = 0. \qquad \text{...(i)}$$

(i) को अन्तःखण्ड रूप में करने के लिए परिवख़तत करने के लिए, हम इसे इस प्रकार पुनः व्यवस्थित करें

$$Ax + By = -C \text{ या } \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

या $$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)} + \frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1 \quad (\text{यदि } A \neq 0 \text{ और } B \neq 0)$$

यही वांछित परिवख़तत रूप है। यहां ध्यान दें कि x-अन्तःखण्ड $= \frac{-C}{A}$ और y-अन्तःखण्ड $= \frac{-C}{B}$

उदाहरण 14.15. $3x + 5y = 7$ को अन्तःखण्ड रूप में बदलिए और x-अक्ष पर इसके अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण है

$$3x + 5y = 7$$

या $$\frac{3}{7}x + \frac{5}{7}y = 1 \text{ या } \frac{x}{\frac{7}{3}} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$$

$\therefore$ x-अन्तःखण्ड $= \frac{7}{3}$ और, y-अन्तःखण्ड $= \frac{7}{5}$

14.3.4 लम्ब रूप में परिवर्तन

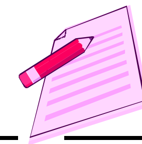
माना x और y में प्रथम घात का समीकरण $Ax + By + C = 0$ ... (i) है।

हम इस व्यापक समीकरण को लम्ब रूप में परिवख़तत करेंगे। इस उद्देश्य के लिए हम दिये गए समीकरण (i) को इस प्रकार पुनः व्यवस्थित करेंगे

$$Ax + By = -C$$

उपर्युक्त समीकरण के दोनों पक्षों को λ से गुणा करने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$\lambda Ax + \lambda By = -\lambda C \qquad \text{... (ii)}$$



आइए λ का मान ऐसा चुनें कि

$$(\lambda A)^2 + (\lambda B)^2 = 1$$

या $\quad \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$ (धनात्मक चिह्न लेने पर)

λ का यह मान (ii) में रखने पर, हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{Ax}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} + \frac{By}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = -\frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \qquad \text{... (iii)}$$

यह (i) का लम्ब रूप में वांछित रूपान्तरण है। इसमें दो स्थितियाँ उत्पन्न होती हैं ऋणात्मक या धनात्मक

(i) यदि $C < 0$, तो (ii) ही वांछित रूप है।

(ii) यदि $C > 0$, तो (iii) का दायां पक्ष ऋणात्मक हो जाता है।

$\therefore$ हम समीकरण (iii) के दोनों पक्षों को -1 से गुणा करेंगे।

$\therefore$ तो वांछित रूप होगा

$$-\frac{Ax}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} - \frac{By}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \frac{C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$$

इस प्रकार मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई $= \dfrac{|C|}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

x-अक्ष की धनात्मक दिशा में लम्ब की आनति है:

$$\cos\theta = \mp\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \text{ या } \sin\theta = \left(\mp\frac{B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}\right)$$

जबकि ऊपर वाला चिह्न $C > 0$ के लिए उपयोग होता है तथा नीचे वाला चिह्न $C < 0$ के लिए। यदि $C = 0$ हो तो रेखा मूल बिन्दु से गुजरती है और मूल बिन्दु से रेखा तक कोई लम्ब नहीं होता है।

उपर्युक्त तीनों स्थितियों के आधार पर हम कह सकते हैं कि

"x और y में प्रथम घात समीकरण सदैव एक सरल रेखा को निरूपित करता है बशर्ते कि A और B दोनों इकट्ठे शून्य न हों।"

क्या उपरोक्त कथन का विलोम सत्य है? ***उपरोक्त कथन का विलोम है कि प्रत्येक सरल रेखा को x और y में प्रथम घात समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।***

इस पाठ में हमने सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूपों के बारे में अध्ययन किया है उदाहरणार्थ उनमें से कुछ हैं

$$y = mx + c,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ और } x\cos\alpha + y\sin\alpha = p.$$

स्पष्टतः सभी x और y में रैखिक सम्बन्ध हैं। हम उन्हें पुनः व्यवस्थित करें तो क्रमशः $y - mx - c = 0$, $bx + ay - ab = 0$ और $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ प्राप्त होता है। अतः यह सभी समीकरण x और y में प्रथम घात समीकरण के ही विभिन्न रूप हैं। इस प्रकार हमने स्थापित किया कि

"प्रत्येक सरल रेखा को x और y में प्रथम घात व्यापक समीकरण के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।"

उदाहरण 14.16. समीकरण $x + \sqrt{3}\ y + 7 = 0$ को लम्ब रूप में परिवखतत कीजिए।

हल : दी गई रेखा का समीकरण है: $x + \sqrt{3}y\ + 7 = 0$ ... (i)

(i) की तुलना सरल रेखा के व्यापक समीकरण से करने पर हमें प्राप्त हुआ

$$A = 1 \text{ और } B = \sqrt{3} \qquad \therefore \sqrt{A^2 + B^2} = 2$$

समीकरण (i) को 2 से भाग करने पर हमें प्राप्त हुआः

$$\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{7}{2} = 0$$

या $$\left(-\frac{1}{2}\right)x + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y - \frac{7}{2} = 0$$

या $$x \cos \frac{4\pi}{3} + y \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{7}{2}$$

(तीसरे चतुर्थांश में $\cos \theta$ और $\sin \theta$ दोनों ऋणात्मक होते हैं अतः θ का मान तीसरे चतुर्थांश में आयेगा।)

यह दी गई सरल रेखा का लम्बवत् रूप में निरूपण है।

उदाहरण 14.17. रेखा $\sqrt{3}\ x - y + 2 = 0$ पर मूल बिन्दु से लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए तथा लम्ब की आनति भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिया गया समीकरण है: $\sqrt{3}\ x - y + 2 = 0$

दोनों पक्षों को $\sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2}$ या 2 से भाग करने पर हमें प्राप्त हुआः

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0 \text{ या } \frac{\sqrt{3}}{2}\text{x} - \frac{1}{2}\text{y} = -1$$

दोनों पक्षों को -1 से गुणा करने पर, हमें प्राप्त हुआः

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 1 \text{ या } x \cos \frac{5\pi}{6} + y \sin \frac{5\pi}{6} = 1$$ (दूसरे चतुर्थांश में $\cos \theta$ ऋणात्मक है, ओर $\sin \theta$ धनात्मक है अतः θ का मान दूसरे चतुर्थांश में आयेगा)

अतः मूल बिन्दु से रेखा पर लम्ब की आनति $150°$ तथा लम्ब की लम्बाई 1 है।

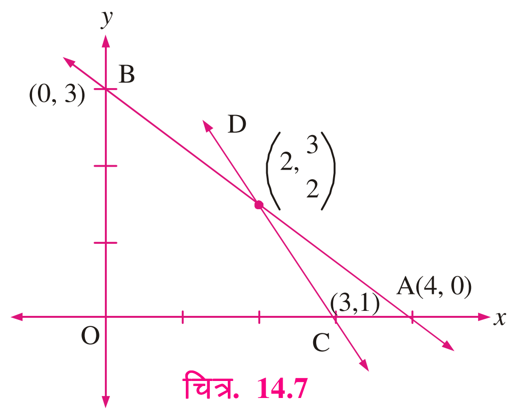
उदाहरण 14.18. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (3,1) से हो कर जाती है तथा रेखा $3x + 4y = 12$ के द्वारा अक्षों के बीच अन्तःखण्ड का समद्विभाजन करती है।

हल : पहले हम दी गई रेखा द्वारा निर्देशांक अक्षों पर काटे गए अन्तःखण्ड ज्ञात करेंगे।

$$3x + 4y = 12 \text{ या } \frac{3x}{12} + \frac{4y}{12} = 1 \text{ या } \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

अतः x-अक्ष और y-अक्ष पर बनाए गए अन्तःखण्ड क्रमशः 4 और 3 हैं।

इस प्रकार निर्देशांक अक्षों पर जहाँ रेखा काटती है उन बिन्दुओं के निर्देशांक $A\,(4, 0)$ तथा $B\,(0, 3)$ हैं।



चित्र. 14.7

$\therefore$ AB का मध्य बिन्दु हुआ $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

अतः (3, 1) तथा $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण हुआ

$$y - 1 = \frac{\frac{3}{2} - 1}{2 - 3}(x - 3)$$

या $\quad y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 3)$

या $\quad 2\,(y - 1) + (x - 3) = 0$ या $2y - 2 + x - 3 = 0$ या $x + 2y - 5 = 0$

उदाहरण 14.19. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (8, 7) और (6, 9) से होकर जाने वाली रेखा निर्देशांक अक्षों पर बराबर अन्तःखण्ड काटती है।

हल : (8, 7) और (6, 9) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण है

$$y - 7 = \frac{9 - 7}{6 - 8}(x - 8)$$

या $\quad y - 7 = -(x - 8)$ या $x + y = 15$ या $\frac{x}{15} + \frac{y}{15} = 1$

अतः दोनों अक्षों पर बने अन्तःखण्ड 15 हैं।

उदाहरण 14.20. वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें (3, 4) और (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को (–5, 1) और (1, –3) को मिलाने वाली रेखा विभाजित करेगी।

हल : बिन्दु C (–5, 1) तथा D (1, –3) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - 1 = \frac{-3 - 1}{1 + 5}(x + 5)$$

या $\quad y - 1 = -\frac{4}{6}(x + 5)$

मॉड्यूल - IV
निर्देशांक ज्यामिति

टिप्पणी

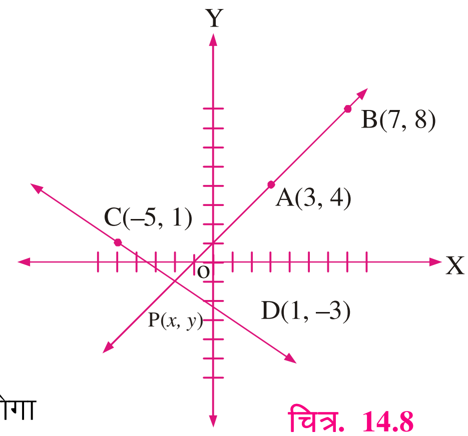
या $\quad 3y - 3 = -2x - 10$

या $\quad 2x + 3y + 7 = 0 \qquad \text{... (i)}$

माना कि रेखा (i) A (3, 4) तथा B (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को बिन्दु P पर विभाजित करती है।

यदि वांछित अनुपात $\lambda : 1$ हो तो जिसमें बिन्दु A (3, 4) तथा B (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को (i) विभाजित करता है तो P के निर्देशांक होंगे

$$\left(\frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1}, \frac{8\lambda + 4}{\lambda + 1}\right)$$



चित्र. 14.8

क्योंकि P बिन्दु रेखा (i) पर भी स्थित है अतः हमें प्राप्त होगा

$$2\left(\frac{7\lambda + 3}{\lambda + 1}\right) + 3\left(\frac{8\lambda + 4}{\lambda + 1}\right) + 7 = 0$$

$\Rightarrow \quad 14\lambda + 6 + 24\lambda + 12 + 7\lambda + 7 = 0$

$\Rightarrow \quad 45\lambda + 25 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{5}{9}$

अतः (–5, 1) तथा (1, –3) को मिलाने वाली रेखा (3, 4) तथा (7, 8) को मिलाने वाली रेखा को बाह्य अनुपात 5 : 9 में विभाजित करती है।

देखें आपने कितना सीखा 14.3

1. किस स्थिति में x और y में प्रथम घात में व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ एक रेखा को निरूपित करता है?

2. समीकरण $2x + 5y + 3 = 0$ को प्रवणता अन्तःखण्ड रूप में परिवखतत कीजिए।

3. निम्नलिखित रेखाओं के x और y अन्तःखण्ड ज्ञात कीजिए :

   (a) $y = mx + c$ (b) $3y = 3x + 8$ (c) $3x - 2y + 12 = 0$

4. दो अक्षों के बीच सरल रेखा $3x - 2y + 12 = 0$ द्वारा कटे अन्तःखण्डों से रेखाखण्ड AB की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

5. समीकरण $x \cos\alpha + y \sin\alpha = p$ को अन्तःखण्ड रूप में परिवखतत कीजिए और निर्देशांक अक्षों पर अन्तःखण्ड भी ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित को अभिलम्ब रूप में परिवखतत कीजिए :

   (a) $3x - 4y + 10 = 0$ (b) $3x - 4y = 0$

7. रेखाओं $2x - y + 3 = 0$ तथा $x - 4y - 7 = 0$ में से कौन सी मूल बिन्दु के निकट है।

अब हम दो रेखाओं के बीच का कोण ज्ञात करने का सूत्र प्रतिस्थापित करेंगे।

14.4 एक दिए हुए बिन्दु की दी गई रेखा से दूरी

इस खण्ड में हम एक दिए हुए बिन्दु की दी गई रेखा या रेखाओं से दूरी ज्ञात करने की चर्चा करेंगे।

माना $P(x_1, y_1)$ दिया गया बिन्दु है और l, $Ax + By + C = 0$ दी गई रेखा है।

माना कि रेखा l, x और y अक्षों को क्रमशः बिन्दु R और Q पर काटती है।

$PM \perp l$ खींचिए और माना $PM = d$

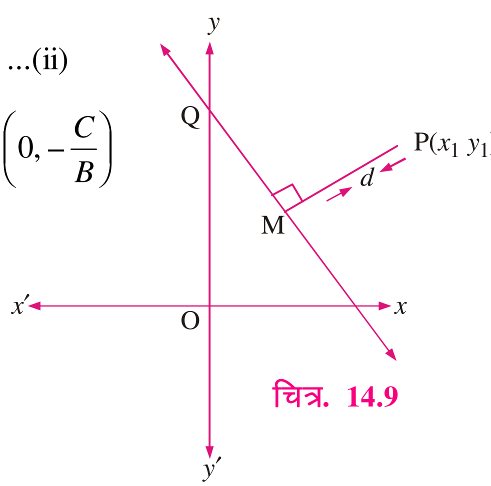
माना M के निर्देशांक (x_2, y_2) हैं

$$d = \sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right\}} \qquad \ldots\text{(i)}$$

$\because$ बिन्दु M रेखा l पर है

$\therefore$ $Ax_2 + By_2 + C = 0$

या $$C = -(Ax_2 + By_2) \qquad \ldots\text{(ii)}$$



चित्र. 14.9

बिन्दु R और Q के निर्देशांक क्रमशः हैं $\left(-\dfrac{C}{A}, 0\right)$ और $\left(0, -\dfrac{C}{B}\right)$

$$QR \text{ की प्रवणता } = \frac{0 + \dfrac{C}{B}}{-\dfrac{C}{A} - 0} = -\frac{A}{B} \text{ और}$$

$$PM \text{ की प्रवणता } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

क्योंकि $PM \perp QR$

$$\Rightarrow \quad \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{A}{B}\right) = -1. \text{ या } \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{B}{A} \qquad \ldots\text{(iii)}$$

$$\text{(iii) से, } \frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y_1 - y_2}{B} = \frac{\sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right\}}}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} \qquad \ldots\text{(iv)}$$

(अनुपात और समानुपात के गुणधर्मों का प्रयोग करते हुए)

$$\text{तथा } \frac{x_1 - x_2}{A} = \frac{y - y_2}{B} = \frac{A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)}{A^2 + B^2} \qquad \ldots\text{(v)}$$

(iv) और (v) से हमें प्राप्त हुआ

$$\frac{\sqrt{\left\{(x_1 - x_2)^2 (y_1 - y_2)^2\right\}}}{\sqrt{(A^2 + B^2)}} = \frac{A(x_1 - x_2) + B(y_1 - y_2)}{A^2 + B^2}$$

या $\dfrac{d}{\sqrt{A^2+B^2}} + \dfrac{Ax_1 + By_1 - (Ax_2 + By_2)}{A^2 + B^2}$ [(i) का उपयोग करके]

या $\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = d$ [(ii) का उपयोग करके]

क्योंकि दूरी सदैव धनात्मक होती है इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$d = \left| \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} \right|$$

टिप्पणी: रेखा $Ax + By + C = 0$ से मूलबिन्दु (0, 0) की लम्बवत् दूरी होती है
$\dfrac{A(0)+B(0)+C}{\sqrt{(A^2+B^2)}} = \dfrac{C}{\sqrt{(A^2+B^2)}}$

उदाहरण 14.21. x-अक्ष पर वह कौन–से बिन्दु हैं जिनकी सरल रेखा $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ से लम्बवत् दूरी 'a' है।

हल : माना $(x_1, 0)$ x-अक्ष पर कोई बिन्दु है।

दी गई रेखा का समीकरण $bx + ay - ab = 0$ है। बिन्दु $(x_1, 0)$ की दी गई रेखा से लम्बवत् दूरी है

$$a = \pm \frac{bx_1 + a.0 - ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}} \qquad \therefore\ x_1 = \frac{a}{b}\left\{ b \pm \sqrt{(a^2+b^2)} \right\}$$

इस प्रकार, x-अक्ष पर बिन्दु हैं $\left(\dfrac{a}{b}\left(b \pm \sqrt{a^2+b^2}\right), 0 \right)$

देखें आपने कितना सीखा 14.4

1. $3x + 2y + 4 = 0$ से बिन्दु (2, 3) की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।
2. y-अक्ष पर बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनकी सरल रेखा $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ से लम्बवत् दूरी b है।
3. y-अक्ष पर बिन्दु ज्ञात कीजिए जिनकी सरल रेखा $4x + 3y = 12$ से लम्बवत् दूरी 4 है।
4. $3x + 7y + 14 = 0$ से मूलबिन्दु की लम्बवत् दूरी ज्ञात कीजिए।

14.6 समान्तर (या लम्बवत्) रेखाओं के समीकरण

अभी तक हमने रेखाएं समान्तर हैं या लम्बवत् जानने की विधि सीखी। इस खण्ड में हम दी गई रेखा के समान्तर या लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करने का प्रयास करेंगे।

14.6.1 दी गई रेखा के समान्तर सरल रेखा का समीकरण

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

माना $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ ...(i)

एक दी गई रेखा

$Ax + By + C = 0$ के समान्तर है। ...(ii)

(i) और (ii) में समान्तरता की शर्त से

$$\frac{A_1}{A} = \frac{B_1}{B} = K_1 \quad \text{(माना)}$$

$\Rightarrow \quad A_1 = AK_1, B_1 = \mathrm{B}K_1$

A_1 और B_1 के इन मानों को (i) में रखने पर प्राप्त होता है

$AK_1x + BK_1y + C_1 = 0$

या $\quad Ax + By + \dfrac{C_1}{K_1} = 0$ या $Ax + By + K = 0$, जहाँ $K = \dfrac{C_1}{K_1}$ ...(iii)

यह दी गई रेखा के समान्तर रेखा है। समीकरण (ii) और (iii) से हम देखते हैं कि

(i) x और y के गुणांक समान हैं।

(ii) स्थिरांक भिन्न हैं, और दी गई शर्तों से उन का मान ज्ञात होता है।

उदाहरण 14.22. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से होकर जाती है तथा सरल रेखा $2x + 3y + 6 = 0$ के समान्तर है।

हल : दी गई रेखा के समान्तर किसी सरल रेखा का समीकरण लिखा जा सकता है यदि हम

(i) x और y के गुणांक वही रखें जो दिए गए समीकरण के हैं।

(ii) स्थिरांक दिए गए समीकरण से भिन्न हों जिसका मूल्यांकन दी गई शर्त से करना है

इस प्रकार वांछित रेखा का समीकरण होगा

$2x + 3y + K = 0$ (किसी स्थिरांक K के लिए)

क्योंकि यह बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है अतः

$2 \times 1 + 3 \times 2 + K = 0$ या $K = -8$

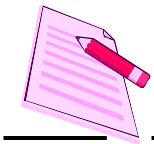
$\therefore \quad$ वांछित रेखा का समीकरण $2x + 3y = 8$ है।

14.7 दी गई रेखा के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण

$\boldsymbol{Ax + By + C = 0}$

माना $Ax + By + C = 0$ के ... (i)

लम्बवत् एक रेखा $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ है। ... (ii)



रेखाओं (i) और (ii) की लम्बवत् होने की शर्त से

$$AA_1 + BB_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{B} = -\frac{B_1}{A} = K_1 \qquad \text{(माना)}$$

$\Rightarrow \qquad A_1 = BK_1$ और $B_1 = -AK_1$

(i) में A_1 और B_1 के मान रखने पर

$$Bx - Ay + \frac{C_1}{K_1} = 0 \text{ या } Bx - Ay + K = 0 \text{ जहाँ } K = \frac{C_1}{K_1} \qquad \text{... (iii)}$$

अतः रेखा (iii) दी गई रेखा (ii) के लम्बवत् है।

हम देखते हैं कि एक दी गई रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण ज्ञात करने के लिए इसमें निम्न विधि लगानी चाहिए

(i) x और y के गुणांक परस्पर बदल दीजिए

(ii) किसी एक का चिह्न बदल दीजिए

(iii) स्थिर पद को किसी नये स्थिरांक K से बदल दीजिए और दी गई शर्त द्वारा उसका मूल्यांकन कीजिए।

उदाहरण 14.23. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $2x + 3y + 6 = 0$ के लम्बवत् है।

हल : उपरोक्त विधि द्वारा हमें दी गई रेखा के लम्बवत् रेखा का समीकरण मिला

$$3x - 2y + K = 0 \qquad \text{...(i)}$$

(i) बिन्दु (1, 2) से गुज़रती है, $3 \times 1 - 2 \times 2 + K = 0$ या $K = 1$

$\therefore$ सरल रेखा का वांछित समीकरण है $3x - 2y + 1 = 0$

उदाहरण 14.24. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (x_2, y_2) से गुज़रती है तथा दी गई सरल रेखा $y\,y_1 = 2a\,(x + x_1)$ के लम्बवत् है।

हल : दी गई सरल रेखा है

$$yy_1 - 2ax - 2ax_1 = 0 \qquad \text{...(i)}$$

(i) के लम्बवत् कोई सरल रेखा है $2ay + xy_1 + C = 0$

यह बिन्दु (x_2, y_2) से गुज़रती है

$\therefore \quad 2ay_2 + x_2\,y_1 + C = 0$

$\Rightarrow \qquad C = -\,2ay_2 - x_2\,y_1$

$\therefore$ वांछित रेखा का समीकरण है

$$2a\,(y - y_2) + y_1\,(x - x_2) = 0$$

देखें आपने कितना सीखा 14.5

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, –2) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $3x + y = 2$ के समान्तर है।
2. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (–1, 0) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $y = 2x + 3$ के समान्तर है।
3. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, –3) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $x + y + 1 = 0$ के लम्बवत् है।
4. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (0, 0) से गुज़रती है तथा सरल रेखा $x + y = 3$ के लम्बवत् है।
5. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (2, –3) से गुज़रती है तथा दी गई सरल रेखा $2a(x + 2) + 3y = 0$ के लम्बवत् है।
6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका x-अन्तःखण्ड –8 है और रेखा $3x + 4y - 17 = 0$ के लम्बवत् है।
7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अन्तःखण्ड 2 है और रेखा $2x - 3y + 7 = 0$ के समान्तर है।
8. सिद्ध कीजिए कि बिन्दु $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ से होकर जाने वाली तथा $x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = a$ के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ है।

14.8 दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण

मान लीजिए $l_1:\ a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ...(i)

तथा $l_2:\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$, दो प्रतिच्छेदी रेखाएँ हैं ...(ii)

माना l_1 तथा l_2 का प्रतिच्छेदन बिन्दु $P(h, k)$ है, तब

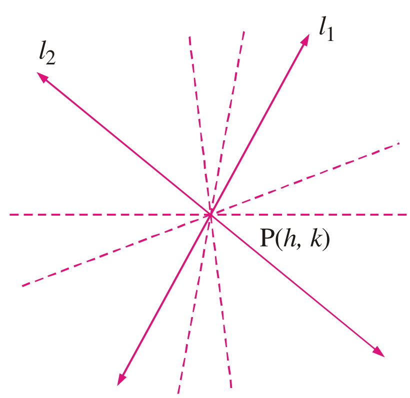
$$a_1h + b_1k + c_1 = 0 \quad \text{...(iii)}$$

$$a_2h + b_2k + c_2 = 0 \quad \text{...(iv)}$$

अब समीकरण

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \quad \text{...(v)}$$

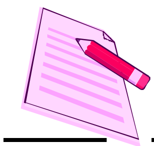
पर ध्यान दीजिए



चित्र. 14.10

यह x तथा y में एक घात का समीकरण है।

इसलिए यह λ के भिन्न–भिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न रेखाएँ प्रदर्शित करेगा।



यदि हम x को h द्वारा तथा y को k द्वारा स्थानापन्न कर दें तो हमें

$$(a_1h+b_1k+c_1)+\lambda(a_2h+b_2k+c_2)=0 \qquad \text{...(vi)}$$

प्राप्त होता है। (iii) और (iv) को (vi) में प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$0 + \lambda 0 = 0 \qquad \text{अर्थात्}\quad 0 = 0 \text{ जो कि सत्य है।}$$

अतः समीकरण (v) रेखाओं का समूह प्रदर्शित करता है जो बिन्दु (h, k) से होकर जाती है। अर्थात् दी गई रेखाओं l_1 तथा l_2 के प्रतिच्छेदन बिन्दु से।

- λ के दिए गए विशिष्ट मान द्वारा समूह के एक विशिष्ट सदस्य को प्राप्त किया जाता है। λ का यह मान, अन्य दी गई शर्तों से ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 14.25. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $x + y + 1 = 0$ तथा $2x - y + 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा बिन्दु (1, 2) इस रेखा के अर्न्तविष्ट है।

हल : रेखाओ के समूह का समीकरण जो दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है, $(x + y + 1) + \lambda\,(2x - y + 7) = 0$ है

इस रेखा पर बिन्दु (1, 2) है, यदि

$$(1 + 2 + 1) + \lambda\,(2 \times 1 - 1 \times 2 + 7) = 0$$

अर्थात् $\quad 4 + 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\dfrac{4}{7}.$

अतः अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$(x+y+1)-\frac{4}{7}(2x-y+7) = 0 \text{ है}$$

अर्थात् $\quad 7(x+y+1)-4(2x-y+7) = 0$

$$-x + 11y - 21 = 0$$

या $\quad x - 11y + 21 = 0$

उदाहरण 14.26. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x + y - 9 = 0$ तथा $4x + 3y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा y-अक्ष के समान्तर है।

हल : रेखाओं के समूह का समीकरण जो दी गई रेखाओं के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है $(3x+y-9)+\lambda(4x+3y-7) = 0$ है।

अर्थात् $\quad (3+4\lambda)x+(1+3\lambda)y-(9+7\lambda) = 0 \qquad \text{...(i)}$

हम जानते हैं कि यदि कोई रेखा y-अक्ष के समान्तर है तो उस समीकरण में y का गुणांक शून्य होगा।

$$\therefore\ 1 + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1/3.$$

अतः दी गई रेखा की समीकरण

$$\left\{3+4\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}x+0y-\left\{9+7\left(\frac{-1}{3}\right)\right\} = 0$$

अर्थात् $\quad x = 4$

देखें आपने कितना सीखा 14.6

1. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y = 5$ तथा $2x - y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिंदु से होकर जाती है तथा x-अक्ष के समान्तर है।
2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x + y + 1 = 0$ तथा $x - y - 1 = 0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा बिंदु $(-3, 1)$ इस रेखा के अर्न्तविष्ट है।

आइये दोहराएँ

- y-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $x = a$ है और x-अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण $y = b$ होता है।
- जो रेखा y-अक्ष पर c अन्तःखण्ड काटती है तथा जिसकी प्रवणता m है का समीकरण होता है $y = mx + c$
- $A(x_1, y_1)$ से होकर जाने वाली रेखा जिसकी प्रवणता m है, का समीकरण है: $y - y_1 = m(x - x_1)$
- दो बिन्दुओं $A(x, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण है $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- रेखा जो, $x-$अक्ष और $y-$अक्ष पर क्रमशः a और b अन्तःखण्ड काटती है, का समीकरण है $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$
- रेखा का लम्ब या अभिलम्ब रूप में समीकरण है: $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$

  जबकि p मूलबिन्दु से रेखा पर लम्ब की लम्बाई है और यह लम्ब धनात्मक x-अक्ष के साथ जो कोण बनाता है वह α है।
- x और y में प्रथम घात का व्यापक समीकरण सदैव एक सरल रेखा को निरूपित करता है जबकि A और B दोनों इकट्ठे शून्य न हों।
- व्यापक समीकरण $Ax + By + C = 0$ से हम निम्नलिखित ज्ञात कर सकते हैं :

  (i) रेखा की प्रवणता $= -\dfrac{A}{B}$ (ii) x-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{C}{A}$ (iii) y-अन्तःखण्ड $= -\dfrac{C}{B}$

  (iv) मूलबिन्दु से रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई $= \dfrac{|C|}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

  (v) मूलबिन्दु से लम्ब की आनति $\cos\alpha = \dfrac{\mp A}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$; $\sin\alpha = \dfrac{\mp B}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}$

  जबकि ऊपर वाला चिह्न $C > 0$ के लिए तथा नीचे वाला चिह्न $C < 0$ के लिए लिया जाता है। परन्तु यदि $C = 0$ हो तो ऊपर वाला या नीचे वाला चिह्न इच्छानुसार लिया जा सकता है
- एक दिए गए बिन्दु (x_1, y_1) की दी गई रेखा $Ax + By + C = 0$ से दूरी $d = \left|\dfrac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{(A^2 + B^2)}}\right|$

- एक रेखा $Ax + By + C = 0$ के समान्तर रेखा का समीकरण $Ax + By + k = 0$ है।
- एक रेखा $Ax + By + C = 0$ के लम्बवत् रेखा का समीकरण $Bx - Ay + k = 0$ है।
- दो रेखाओं $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती रेखाओं के समूह का समीकरण $(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ है।

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Straight_lines*
- *http://mathworld.wolfram.com/Straight_lines*

आइए अभ्यास करें

1. उस सरल रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका y-अन्तःखण्ड -3 है और जोकिः

   (a) बिन्दुओं $(-2,3)$ और $(4, -5)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (b) बिन्दुओं $(0, -5)$ और $(-1, 3)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् है।

2. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4, -5)$ से होकर जाती है और

   (a) बिन्दुओं $(3, 7)$ और $(-2, 4)$ को मिलाने वाली रेखा के समान्तर है।

   (b) बिन्दुओं $(-1, 2)$ और $(4, 6)$ को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् है।

3. दिखाइए कि बिन्दु $(a, 0)$, $(0, b)$ और $(3a, -2b)$ संरेख हैं। इनको मिलाने वाली रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

4. एक त्रिभुज ABC के शीर्ष A (1, 4), B (2, –3) और C (–1, –2) हैं ज्ञात कीजिए

   (a) A से माध्यिका का समीकरण

   (b) A से अभिलम्ब का समीकरण

   (c) भुजा BC का समद्विभाजक

5. बिन्दु A (2, 1) से एक सरल रेखा खींची जाती है जो धनात्मक x-अक्ष से $\frac{\pi}{6}$ कोण बनाती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

6. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाती है तथा रेखा $2x + 3y + 7 = 0$ के समान्तर है।

7. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके x-अक्ष तथा y-अक्ष से अन्तःखण्ड क्रमशः a और b हैं।

8. रेखाओं $y = (2 - \sqrt{3})\,x + 5$ और $y = (2 + \sqrt{3})\,x - d$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

9. रेखाओं $2x + 3y = 4$ और $3x - 2y = 7$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

10. बिन्दु (3, 4) से सरल रेखा $12(x+6) = 5(y-2)$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
11. $3x + 4y + 5 = 0$ पर (0, 1) से लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
12. रेखाओं $2x + 3y = 4$ और $4x + 6y = 20$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।
13. बिन्दु (–3, – 4) से रेखा $4x - 3y = 7$ पर डाले गए लम्ब की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
14. दिखाइए कि बिन्दुओं से सरल रेखा $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ पर डाले गए लम्बों की लम्बाई का गुणनफल b^2 है।
15. सिद्ध कीजिए कि उस सरल रेखा का समीकरण, जो बिन्दु $(a\cos^3\theta, b\sin^3\theta)$ से गुजरती है तथा सरल रेखा $x\sec\theta + y\,\text{cosec}\,\theta = a$ के लम्बवत् है, होगा $x\cos\theta - y\,\text{cosec}\,\theta = a\cos 2\theta$
16. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x + y - 9 = 0$ तथा $4x + 4y - 7 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $5x - 4y + 1 = 0$ पर लम्ब है।
17. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $2x + 3y - 2 = 0$ तथा $x - 2y + 1 = 0$ से होकर जाती है तथा जिसका x-अन्तःखण्ड 3 इकाई है।
18. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x + 4y - 7 = 0$ तथा $x - y + 2 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा जिसकी प्रवणता 5 है।
19. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $5x - 3y = 1$ तथा $2x + 3y = 23$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा रेखा $5x - 3y - 1 = 0$ पर लम्ब है।
20. उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $3x - 4y + 1 = 0$ तथा $5x + y - 1 = 0$ के प्रतिच्छेदन बिन्दु से होकर जाती है तथा अक्षों पर समान अन्तःखण्ड काटती है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 14.1

1. (a) $y = -4$ (b) $x = -3$ 2. $x = 5$ 3. $y + 7 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 14.2

1. (a) $y = 2x - 2$ (b) प्रवणता $= \frac{-4}{3}$, y-अन्तःखण्ड = 2
2. $\sqrt{3}y = -3x - 1$ 3. प्रवणता $= \frac{1}{2}$, y-अन्तःखण्ड = –2
4. $3x + 7y = 7$ 5. $y = x + 1$; $x + y - 3 = 0$ 6. $3x - 2y = 0$
7. (a) $x + y = -1$ (b) AC विकर्ण का समीकरण $= 2x - y - 4 = 0$

   BD विकर्ण का समीकरण $= 2x - 11y + 66 = 0$
8. $x - 2 = 0$, $x - 3y + 6 = 9$ और $5x - 3y - 2 = 0$

9. $2x + 3y = 6$ 10. $3x + y = 6$ 11. $3x + 4y = 1$ 12. $x + y = 2\sqrt{2}$

देखें आपने कितना सीखा 14.3

1. A और B दोनों एक साथ शून्य नहीं हैं 2. $y = \frac{-2}{5}x - \frac{3}{5}$

3. (a) x –अन्तःखण्ड = $\frac{-c}{m}$; y-अन्तःखण्ड = c (b) x-अन्तःखण्ड = $\frac{-8}{3}$; y-अन्तःखण्ड = $\frac{8}{3}$

 (c) x-अन्तःखण्ड = –4; y-अन्तःखण्ड = 6

4. $2\sqrt{13}$ इकाई 5. $\frac{x}{p\sec\alpha} + \frac{x}{p\operatorname{cosec}\alpha} = 1$

6. (a) $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y - 2 = 0$ (b) $\frac{-3}{5}x + \frac{4}{5}y = 0$

7. पहली रेखा मूलबिन्दु से सबसे निकट है।

देखें आपने कितना सीखा 14.4

1. $d = \frac{16}{\sqrt{13}}$ 2. $\left(0, \frac{b}{a}(a \pm \sqrt{a^2 + b^2})\right)$ 3. $\left(0, \frac{32}{3}\right)$ 4. $\frac{14}{\sqrt{58}}$

देखें आपने कितना सीखा 14.5

1. $3x + y + 2 = 0$ 2. $y = 2x + 2$ 3. $x - y = 3$ 4. $y = x$

5. $3x - 2ay = 6(a - 1)$ 6. $4x - 3y + 32 = 0$ 7. $2x - 3y + 6 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 14.6

1. y = 1, 2. 2x + 3y + 3 = 0

आइए अभ्यास करें

1. (a) $4x + 3y + 9 = 0$ (b) $x - 8y - 24 = 0$

2. (a) $3x - 5y - 37 = 0$ (b) $5x - 8y - 60 = 0$

4. (a) $13x - y - 9 = 0$ (b) $3x - y + 1 = 0$

 (c) $3x - y - 4 = 0$

5. $x - \sqrt{3}y = 2 - \sqrt{3}$ 6. $2x + 3y + 13 = 0$

7. $bx + ay = ab$ 8. $\frac{\pi}{2}$ 9. $\frac{\pi}{2}$ 10. $\frac{98}{13}$

11. $\frac{9}{5}$ 12. $\frac{6}{\sqrt{13}}$ 13. $\frac{7}{5}$

16. $32x + 40y - 41 = 0$ 17. $x + 5y - 3 = 0$

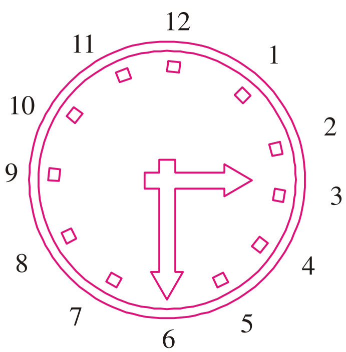
18. $35x - 7y + 18 = 0$ 19. $63x + 105y - 781 = 0$

20. $23x + 23y - 11 = 0$

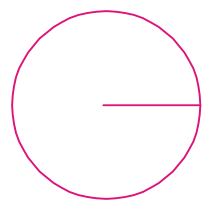
15

वृत्त

घड़ी की सुई की नोक के पथ पर ध्यान दीजिए जिस पर वह गतिमान है, (चित्र 15. 1 देखिए)



चित्र 15. 1



चित्र 15. 2

पुनः उस वक्र पर ध्यान दीजिए जो निम्न प्रकार से अनुरेखित होता हैः एक कील गाड़कर किसी निश्चित लम्बाई की एक रस्सी का एक सिरा इससे ऐसा बांधें कि यह उसके चारों ओर घूम सके, और फिर धागे के दूसरे सिरे से पेंसिल बांधें। तब पेंसिल को कील के चारों ओर ऐसा घुमाएं कि रस्सी तनी रहे (चित्र 15.2 देखिए)।

निःसन्देह, उपर्युक्त उदाहरणों के अनुरेखित वक्र एक ही आकृति के हैं और इस प्रकार के वक्र को **वृत्त** कहते हैं।

पेंसिल की नोक तथा बिन्दु, जिस पर कील गड़ी है, के बीच की दूरी को वृत्त का अर्धव्यास (त्रिज्या) कहते हैं।
उपर्युक्त उदाहरणों के अनुरेखित वक्र की चर्चा हम और विस्तार से करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जायेंगेः

- दिए हुए केन्द्र तथा त्रिज्या द्वारा वृत्त का समीकरण ज्ञात करना;

- दिए गए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वृत्त का दो चरों में द्विघात व्यापक समीकरण अभिव्यक्त करना;
- वृत्त का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात करना जब इसका समीकरण व्यापक रूप में दिया है;
- वृत्त का समीकरण ज्ञात करना, जो

  (*i*) तीन अंसरेख बिन्दुओं से होकर जाता है, (*ii*) दो दिए हुए बिन्दुओं होकर जाता है और किसी एक अक्ष को स्पर्श करता है

पूर्वज्ञान

- वृत्त से सम्बन्धित पद और अवधारणाऐं।
- दो बिन्दुओं के बीच की दूरी जब उनके निर्देशांक दिए हुए हैं।
- विभिन्न रूपों में सरल रेखा का समीकरण।

15.1 वृत्त की परिभाषा

एक वृत्त उस बिन्दु का बिन्दुपथ है जो तल में इस प्रकार चलता है कि उसकी उसी तल में एक निश्चित बिन्दु से दूरी सदैव अचर रहती है। निश्चित बिन्दु वृत्त का केन्द्र कहलाता है, और अचर दूरी को वृत्त की त्रिज्या कहते हैं।

15.2 वृत्त का समीकरण

क्या हम वृत्त का गणितीय समीकरण ज्ञात कर सकते हैं?

आइए, अनेक दिए हुए प्रतिबन्धों के अन्तर्गत किसी वृत्त का समीकरण ज्ञात करने का प्रयास करें।

15.2.1 जब केन्द्र के निर्देशांक और त्रिज्या दिए हुए हैं:

मान लीजिए, वृत्त का केन्द्र C तथा त्रिज्या 'a' है। माना केन्द्र के निर्देशांक (h, k) दिए हैं।

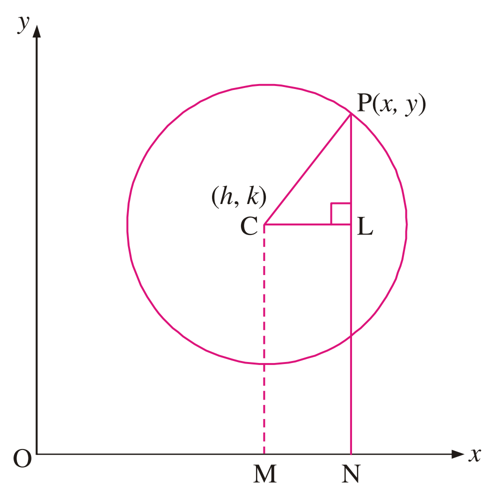
वृत्त पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ लें और CM तथा PN, $X-$अक्ष पर लम्ब खीचें। पुनः, PN पर CL लम्ब खीचें। हमें प्राप्त होता है:

$$CL = MN = ON - OM = x - h$$

तथा $PL = PN - LN = PN - CM = y - k$

समकोण त्रिभुज CLP में, $CL^2 + PL^2 = CP^2$

$$\Rightarrow \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2 \qquad ...(1)$$



चित्र 15.3

दिए हुए प्रतिबन्ध के अन्तर्गत यही वृत्त का अभीष्ट समीकरण है। वृत्त के इस रूप को वृत्त का **मानक रूप** कहते हैं।

विलोमतः यदि (1) को संतुष्ट करता हुआ तल पर कोई बिन्दु (x, y) है, तो वह (h, k) से 'a' दूरी पर होगा। इसलिए यह बिंदु वृत्त पर होगा।

क्या होता है जब,

(*i*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है?

(*ii*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर नहीं जाता है, और केन्द्र x-अक्ष पर है?

(*iii*) वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है और x-अक्ष उसका एक व्यास है?

(*iv*) मूल बिन्दु, वृत्त का केन्द्र है?

(*v*) वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करता है?

(*vi*) वृत्त y-अक्ष को स्पर्श करता है?

(*vii*) वृत्त दोनों अक्षों को स्पर्श करता है?

यहां, हम उपर्युक्त प्रश्नों का उत्तर एक–एक करके ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

(*i*) इस स्थिति में, $(0, 0)$, समीकरण (1) को संतुष्ट करता है। इस प्रकार हमें प्राप्त होता है:

$$h^2 + k^2 = a^2$$

अतः समीकरण (1) का रूप

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0 \qquad \text{...(2)}$$

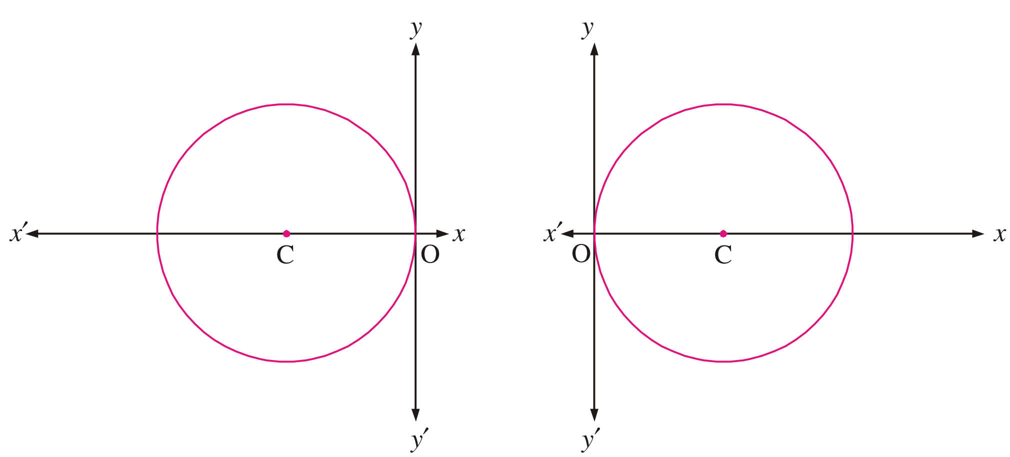
बन जाता है।

(*ii*) इस स्थिति में $k = 0$ है।

अतः समीकरण (1) का रूप

$$(x-h)^2 + y^2 = a^2 \qquad \text{...(3)}$$

बन जाता है।



चित्र 15.4

(*iii*) इस स्थिति में, $k = 0$ तथा $h = \pm a$ (चित्र 15.4 देखिए)

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 \pm 2ax = 0$ ...(4)

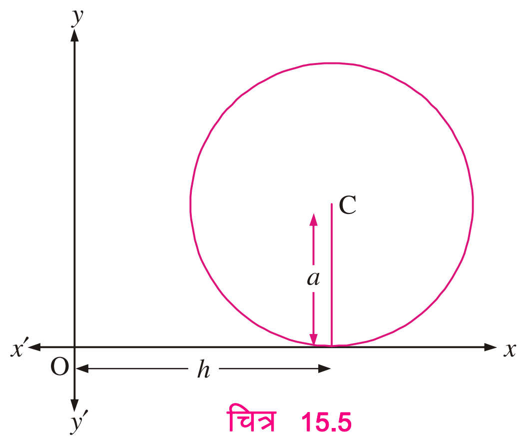
(*iv*) इस स्थिति में, $h = 0 = k$ है,

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 = a^2$ ...(5)

हो जाता है।

(*v*) इस स्थिति में, $k = a$ है (चित्र 15.5 देखिए),

अतः समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0$ बन जाता है। ...(6)



चित्र 15.5

(*vi*) इस स्थिति में $h = a$ है,

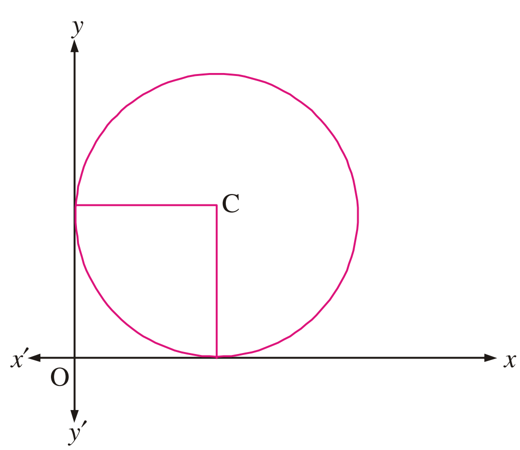
अतः, समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2ax - 2ky + k^2 = 0$ ...(7)

हो जाता है

(*vii*) इस स्थिति में $h = k = a$ है (देखिए चित्र 15.6)

अतः, समीकरण (1) का रूप $x^2 + y^2 - 2ax - 2ay + a^2 = 0$ ...(8)

हो जाता है



चित्र 15.6

उदाहरण 15.1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका केन्द्र $(3,-4)$ तथा त्रिज्या 6 है।

हल : समीकरण (1) के पदों से तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है:

$h = 3, k = -4$ तथा $a = 6$

$\therefore \quad (x-3)^2 + (y+4)^2 = 6^2$ या $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$

उदाहरण 15.2. वृत्त $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 4$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिए हुए समीकरण की तुलना $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ से करने पर हमें प्राप्त होता है:

$-h = 1, -k = -1, a^2 = 4$

$\therefore \quad h = -1, k = 1, a = 2$

इसलिए, दिए हुए वृत्त का केन्द्र $(-1,1)$ तथा त्रिज्या 2 है।

15.3 वृत्त का व्यापक समीकरण

हम जानते है कि केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या r वाले वृत्त का मानक समीकरण

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ है।

आइए, हम निम्न समीकरण पर विचार करें

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots (1)$$

(1) को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं:

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c$$

अर्थात् $(x+g)^2 + (y+f)^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2$

अर्थात् $[x-(-g)]^2 + [y-(-f)]^2 = \left(\sqrt{g^2 + f^2 - c}\right)^2 \qquad \ldots (2)$

अर्थात् $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

जहां $h = -g, \quad k = -f, \quad r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

उपर्युक्त यह दर्शाता है कि दिया गया समीकरण एक वृत्त को निरुपित करता है जिसका केन्द्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ है।

15.3.1 प्रतिबन्ध, जिनके अन्तर्गत दो चरों वाला व्यापक द्विघात समीकरण एक वृत्त को निरूपित करता है।

मान लीजिए कि समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ है।

(i) यह x, y में द्विघात समीकरण है, जिसमें पदों x^2 और y^2 के गुणांक समान हैं।

(ii) इसमें $x\,y$ का कोई पद नहीं हैं।

टिप्पणी: प्रश्नों को हल करने में, हम x^2 और y^2 का गुणांक एक लेते हैं।

उदाहरण 15.3. वृत्त $45x^2+45y^2-60x+36y+19=0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया हुआ समीकरण, 45 से भाग करके निम्न प्रकार लिखा जा सकता है,

$$x^2+y^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{5}y+\frac{19}{45}=0$$

इसकी तुलना समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

से करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$g=-\frac{2}{3}, f=\frac{2}{5} \text{ तथा } c=\frac{19}{45}$$

इस प्रकार दिए गए वृत्त का केन्द्र $\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{5}\right)$ तथा त्रिज्या $\sqrt{g^2+f^2-c}=\frac{\sqrt{41}}{15}$ है।

उदाहरण 15.4. इस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिदुंओं (1, 0), (0, – 6) तथा (3, 4) से होकर जाता है।

हल: मान लीजिए कि वृत्त का समीकरण

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad ...(1)$$

है।

चूंकि वृत्त तीन दिए हुए बिन्दुओं से होकर जाता है इसलिए वे समीकरण (1) को संतुष्ट करेंगे। अतः

$$1+2g+c=0 \qquad \cdots(2)$$

तथा

$$36-12f+c=0 \qquad \cdots(3)$$

$$25+6g+8f+c=0 \qquad \cdots(4)$$

(3) में से (2) तथा (4) में से (3) को घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$2g+12f=35$$
$$6g+20f=11$$

इस समीकरणों को g तथा f के लिए हल करने पर हमें प्राप्त होता है: $g=-\frac{71}{4},\ f=\frac{47}{8}$

(2) में g का मान रखने पर, हम प्राप्त करते हैं: $c=\frac{69}{2}$

g, f तथा c के इन मानों को (1) में रखने पर वृत्त का अभीष्ट समीकरण है:

$$4x^2+4y^2-142x+47y+138=0$$

उदाहरण 15.5. उन वृत्तों के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष को स्पर्श करते हैं, और बिन्दुओं (1,–2) तथा (3, –4) से होकर जाते है।

हल: चूंकि वृत्त x-अक्ष को स्पर्श करते हैं इस लिए वृत्त के मानक रूप में $k = a$ (परिणाम 6 देखिए) रखने पर, प्राप्त होता है।

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ay + h^2 = 0 \qquad \dots (1)$$

चूंकि (1) बिन्दु $(1, -2)$ से होकर जाता है,

$$\therefore \quad h^2 - 2h + 4a + 5 = 0 \qquad \dots (2)$$

वृत्त बिन्दु $(3, -4)$ से होकर भी जाता है,

$$\therefore \quad h^2 - 6h + 8a + 25 = 0 \qquad \dots (3)$$

(2) और (3) से 'a' का विलोपन करने पर हम प्राप्त करते हैं।

$$\Rightarrow \quad h^2 + 2h - 15 = 0$$
$$h = 3 \text{ or } h = -5.$$

(3) से a के संगत मान क्रमशः -2 तथा -10 हैं। h तथा a के मान (1) में रखने पर, हम प्राप्त करते हैं।

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0 \qquad \dots (4)$$

तथा $$x^2 + y^2 + 10x + 20y + 25 = 0 \qquad \dots (5)$$

(4) तथा (5) वृत्त अभीष्ट समीकरण हैं।

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका

   (a) केन्द्र $(0, 0)$ तथा त्रिज्या 3 है। (b) केन्द्र $(-2,3)$ तथा त्रिज्या 4 है।

2. वृत्त का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

   (a) $x^2 + y^2 + 3x - y = 6$ (b) $4x^2 + 4y^2 - 2x + 3y - 6 = 0$

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(0, 2)$ $(2, 0)$ तथा $(0, 0)$ से होकर जाता है।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष को स्पर्श करता है तथा बिन्दुओं $(-1, 2)$ और $(-2,1)$ से होकर जाता है।

आइये दोहराएँ

- **वृत्त का मानक रूप**

  $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ केन्द्र (h, k) तथा त्रिज्या a है।

- वृत्त का व्यापक समीकरण $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ है।

  इसका केन्द्र $(-g, -f)$ तथा त्रिज्या = $\sqrt{g^2+f^2-c}$

सहायक वेबसाइट

- *www.purplemath.com/modules/circle2.htm*
- *www.purplemath.com/modules/circle.htm*
- *https://www.youtube.com/watch?v=U2-4fWtYt7I*

आइए अभ्यास करें

1. वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र $(4, -6)$ तथा त्रिज्या 7 है।
2. वृत्त $x^2+y^2+4x-6y=0$ का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए।
3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (1,0), (–1,0) तथा (0,1) से होकर जाता है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 15.1

1. (a) $x^2+y^2=9$ (b) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

2. (a) $\left(-\frac{3}{2}, 1\right); \frac{\sqrt{37}}{2}$ (b) $\left(\frac{1}{4}, -\frac{3}{8}\right); \frac{\sqrt{109}}{8}$

3. $x^2+y^2-2x-2y=0$

4. $x^2+y^2+2x-2y+1=0$

आइए अभ्यास करें

1. $x^2+y^2-8x+12y+3=0$

2. Centre $(-2, 3)$; Radius = $\sqrt{13}$

3. $x^2+y^2=1$.

16

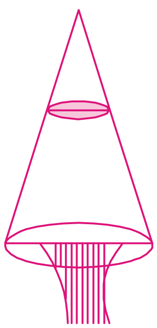
शंकु परिच्छेद

गाजर को काटते समय आप भिन्न–भिन्न आकृतियाँ देख सकते हैं जो गाजर की अनुप्रस्थ काट द्वारा बनी भिन्न भिन्न आकृतियों को दर्शाते हैं। वैश्लेषिक विधि से इसे तीन प्रकार से काटा जा सकता है। यथा

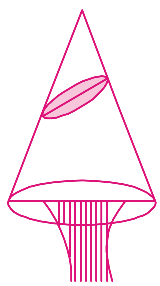
(*i*) अनुप्रस्थ काट आधार के समान्तर है। (चित्र 16.1 देखिए)

(*ii*) अनुप्रस्थ काट तिरछा है परन्तु आधार से होकर नहीं जाता है। (चित्र 16.2 देखिए)

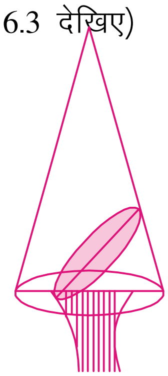
(*iii*) अनुप्रस्थ काट तिरछा है और आधार से होकर जाता है। (चित्र 16.3 देखिए)



चित्र 16.1



चित्र 16.2



चित्र 16.3

भिन्न तरीके से काटने पर हमें भिन्न भिन्न आकृति की स्लाइस मिलती हैं।

प्रथम स्थिति में, कटा टुकड़ा एक वृत्त को निरूपित करता है जिसे हम पिछले पाठ में पढ़ चुके हैं।

द्वितीय तथा तृतीय स्थितियों में, कटे हुए टुकड़े भिन्न ज्यामितीय वक्र निरूपित करते हैं, जिन्हें हम इस पाठ में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद, आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे:

- वृत्त, परवलय, दीर्घवृत्त तथा अतिपरवलय को शंकु के परिच्छेद के रूप में देखना
- परवलय तथा दीर्घवृत्त को बिदुंपथ के रूप में देखना
- उत्केन्द्रता की अवधारणा, नियता, नाभि, तथा शीर्ष पहचानना;
- परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के मानक समीकरण को पहचानना; और
- परवलय, दीर्घवृत्त और अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात करना जब इसकी नियता तथा नाभि दिए गए हैं

पूर्व ज्ञान

- निर्देशांक ज्यामिति का प्रारम्भिक ज्ञान
- सरल रेखा के समीकरण के विभिन्न रूप
- विभिन्न रूपों में वृत्त का समीकरण

16.1 शंकु परिच्छेद

भूमिका में हमने गाजर की स्लाइस के कई आकारों को देखा। चूंकि गाजर की आकृति शंकु जैसी होती है इसलिए इससे प्राप्त परिच्छेदों को शंकु परिच्छेद कहते हैं।

गणितीय रूप में, शंकु परिच्छेद किसी एक बिन्दु P का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार चलता है कि इसकी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से लम्बवत दूरी का अनुपात सदैव स्थिर रहता है।

स्थिर बिन्दु को **नाभि** कहते हैं और सामान्यतः इसे 'S' से व्यक्त करते हैं।

स्थिर रेखा को **नियता** करते हैं।

नाभि से जाने वाली तथा नियता के लम्बवत सरल रेखा **अक्ष** कहलाती है।

उपर्युक्त स्थिर अनुपात को **उत्केन्द्रता** कहते हैं और इसे e से व्यक्त किया जाता है।

क्या होता है जब

(i) $e<1$ (ii) $e=1$ (iii) $e>1$?

इन स्थितियों में इस प्रकार प्राप्त शंकु परिच्छेद क्रमशः दीर्घवृत्त, परवलय तथा अतिपरवलय के नाम से जाने जाते हैं।

इस पाठ में हम दीर्घवृत, परवलय तथा अतिपरवलय के बारे में पढ़ेंगे।

16.2 दीर्घवृत्त

गाजर की स्लाइस के काटने को पुनः याद करें। जब हम इसे तिरछा काटते हैं, यह बचाते हुए कि चाकू आधार से होकर न जाए तो हम क्या देखते हैं ?

आपको ऐसी आकृति का सामना तब भी हुआ होगा जब आप उबले अण्डे को ऊर्ध्वाधरतः काटते हैं।

ऐसे प्राप्त स्लाइस एक दीर्घवृत्त को निरूपित करता है। आइए, हम दीर्घवृत्त को गणितीय रूप में निम्न प्रकार से परिभाषित करें:

" दीर्घवृत्त किसी एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार एक तल में चलता है कि इसकी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर रेखा से दूरी का अनुपात स्थिर रहता है तथा यह अनुपात इकाई से कम होता है।"

16.2.1 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण

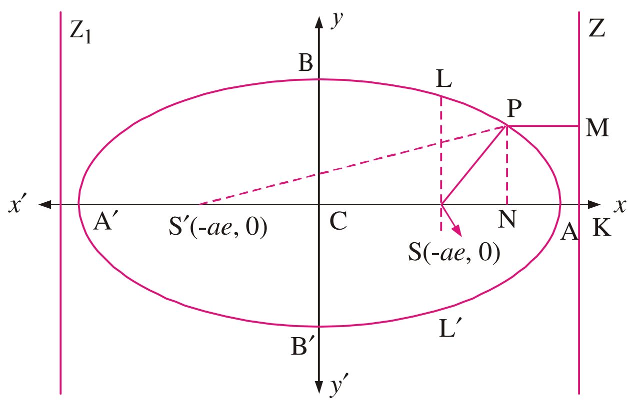
मान लीजिए नाभि S, नियता ZK तथा चर बिन्दु P है। S से नियता पर लम्ब SK खींचिए। माना उत्केन्द्रता e है।

SK का अन्तः तथा बाह्तः विभाजन (KS को बढ़ाने पर) क्रमशः बिंदुओं A तथा A' पर अनुपात e:1 में करें। चूंकि e<1 है,

$$SA = e.AK \qquad \cdots (1)$$

तथा $$SA' = e.A'K \qquad \cdots (2)$$

चूंकि A तथा A' ऐसे बिन्दु हैं जिनकी नाभि से दूरियों तथा नियता से क्रमशः दूरियों का अनुपात स्थिर e $(e < 1)$ है, अतः वे दीर्घवृत्त पर हैं। इन्हें दीर्घवृत्त के शीर्ष कहते हैं।



चित्र 16.4

माना AA', $2a$ के बराबर है तथा C इसका मध्यबिन्दु है, अर्थात $CA = CA' = a$ है।

C को दीर्घवृत्त का केन्द्र कहते हैं।

(1) और (2) का योग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$SA + SA' = e.AK + e.A'K$$

या $$AA' = e(CK \text{ - } X'A + A'C + CK)$$

या $$2a = e.2CK$$

या $$CK = \frac{a}{e} \qquad \cdots (3)$$

Y

(2) में से (1) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं

$$SA' - SA = e(A'K - AK)$$

या $$(SC + CA') - (CA - CS) = e.A'A$$

या $$2\,CS = e.2a$$

या $$CS = ae \qquad \cdots (4)$$

अब हम C को मूलबिन्दु, CAX को x-अक्ष तथा CY, जो CX के लम्बवत रेखा है, को y- अक्ष लेते हैं।

$\therefore$ S के निर्देशांक $(ae, 0)$ होंगे तथा नियता का समीकरण $x = \dfrac{a}{e}$ होगा।

माना चर बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) हैं। SP को मिलाइये, $PM \perp ZK$. खींचिए।

परिभाषा से $SP = e.PM$

या $SP^2 = e^2 . PM^2$

या $SN^2 + NP^2 = e^2.(NK)^2$

या $(CN - CS)^2 + NP^2 = e^2.(CK - CN)^2$

या $(x - ae)^2 + y^2 = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$

या $x^2(1-e^2) + y^2 = a^2(1-e^2)$

या $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$ [$a^2(1-e^2)$ से भाग देने पर]

$a^2(1-e^2) = b^2$ रखने पर, हम दीर्घवृत्त का निम्न मानक समीकरण प्राप्त करते हैं:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

दीर्घ अक्ष : शीर्षों A' और A को मिलाने वाले रेखाखण्ड अर्थात A'A को दीर्घ अक्ष कहते हैं और इसकी लम्बाई $2a$ होती है।

लघु अक्ष : केन्द्र से जाने वाले और दीर्घअक्ष के लम्बवत रेखाखण्ड अर्थात B'B को लघुअक्ष कहते हैं और इसकी लम्बाई $2b$ होती है।

मुख्य अक्ष : दीर्घ अक्ष तथा लघु अक्ष इकट्ठे दीर्घवृत्त के मुख्य अक्ष कहलाते हैं

नाभि लम्ब : रेखा खण्ड LL' की लम्बाई को नाभि लम्ब कहते हैं।

नियताओं के समीकरण : $x = \pm\frac{a}{e}$

उत्केन्द्रता : e को $e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$ के द्वारा प्राप्त करते हैं।

उदाहरण 16.1. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (1,–1), उत्केन्द्रता $e = \frac{1}{2}$ तथा नियता $x - y = 3$ है।

हल: मान लीजिए कि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु $P\ (h,k)$ है। तो परिभाषा से,

इस की नाभि से दूरी = $e \times$ इसकी नियता से दूरी

या $SP^2 = e^2.PM^2$ (M, बिन्दु P *से नियता पर डाले गए लम्ब का पाद है*)

या $(h-1)^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k-3}{\sqrt{1+1}}\right)^2$

या $\quad 7(h^2+k^2)+2hk-10h+10k+7=0$

$\therefore$ P का बिन्दुंपथ है:

$7(x^2+y^2)+2xy-10x+10y+7=0$ है, जो दीर्घवृत्त का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरण 16.2. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ की उत्केन्द्रता, नाभियों के निर्देशांक और अक्षों की लम्बाइयां ज्ञात कीजिए।

हल: दीर्घवृत्त की समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$$

दीर्घवृत्त के मानक समीकरण से इसकी तुलना करने पर हम प्राप्त करते हैं

$a^2=4$ तथा $b^2=3$

तब

(i) $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4} \Rightarrow e=\frac{1}{2}$

(ii) नाभियों के निर्देशांक $(1,0)$ तथा $(-1,0)$ हैं। [क्योंकि निर्देशाक $(\pm ae, 0)$]

(*iii*) दीर्घ अक्ष की लम्बाई $=2a=2\times 2=4$ तथा

लघु अक्ष की लम्बाई $=2b=2\times\sqrt{3}=2\sqrt{3}$

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. केन्द्र (0,0) के संदर्भ में दीर्घवृत्त के समीकरण ज्ञात कीजिए:

   (a) जिसका नाभिलम्ब 5 तथा उत्केन्द्रता $\frac{2}{3}$ है।

   (b)जिसका लघुअक्ष, नाभियों के बीच की दूरी के बराबर है और जिसका नाभिलम्ब 10 है।

   (c)जिसकी नाभियां (4,0) तथा (–4,0) और उत्केन्द्रता $\frac{1}{3}$ है।

2. यदि दीर्घवृत्त का नाभिलम्ब लघुअक्ष का आधा है तो इसकी उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

16.3 परवलय

गाजर की स्लाइस के क टने को पुन: याद करें। जब हम इसे तिरछा काटते हैं तथा चाकू को आधार से हो कर जाने दें, तो हम क्या देखते हैं? जब एक बल्लेबाज गेंद को हवा में मारता है तो क्या आपने कभी गेंद द्वारा अनुरेखित पथ पर ध्यान दिया है?

क्या, गाजर के स्लाइस और उपर्युक्त दिए हुए उदाहरण में गेंद द्वारा अनुरेखित पथ में कोई उभयनिष्ठ गुण है?

हाँ, ऐसी स्लाइस तथा गेंद के पथ की आकृति समान है जिसे हम परवलय कहते हैं। आइए, परवलय को गणितीय रुप में परिभाषित करें।

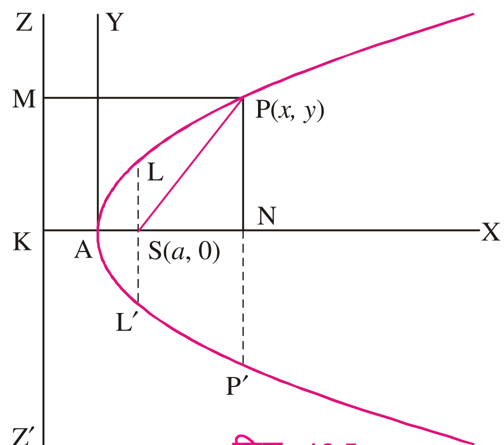
"परवलय एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक तल में इस प्रकार से चलता है कि इस की तल में एक स्थिर बिन्दु से दूरी, तल में एक स्थिर रेखा से दूरी के बराबर है"

16.3.1 परवलय का मानक समीकरण

माना S स्थिर बिन्दु है, और ZZ' परवलय की नियता है। ZZ' के लम्बवत SK खींचिए। SK को A पर समद्विभाजित कीजिए।

चूंकि $SA = AK$, परवलय की परिभाषा से, A परवलय पर स्थित एक बिंदु है। A को परवलय का शीर्ष कहते हैं।

A को मूल बिन्दु लीजिए, AX को x-अक्ष और A से जाने वाली तथा AX के लम्बवत AY को y-अक्ष लीजिए।



चित्र 16.5

माना $KS = 2a$ है। $\therefore AS = AK = a$

$\therefore$ A तथा S के निर्देशांक क्रमशः $(0,0)$ तथा $(a,0)$ हैं।

माना $P(x,y)$ परवलय पर कोई बिन्दु है। $PN \perp AS$ बढ़ाकर (खींचिए)

$\therefore$ $\mathrm{AN} = x$ तथा $NP = y$

SP को मिलाइए तथा $PM \perp ZZ'$ खींचिए

$\therefore$ परवलय की परिभाषा से

$SP = PM$

या $SP^2 = PM^2$

या $(x-a)^2 + (y-0)^2 = (x+a)^2$ $\quad [\because PM = NK = NA + AK = x + a]$

या $(x-a)^2 - (x+a)^2 = -y^2$ या $y^2 = 4ax$

यही परवलय का मानक समीकरण है।

टिप्पणी: परवलय के इस समीकरण में,

(i) शीर्ष (0,0) है। (ii) नाभि (a,0) है।

(iii) अक्ष का समीकरण $y = 0$ है। (iv) नियता का समीकरण $x + a = 0$ है।

(v) नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

परवलय के अन्य रूप

परवलय के समीकरण क्या होंगे जब

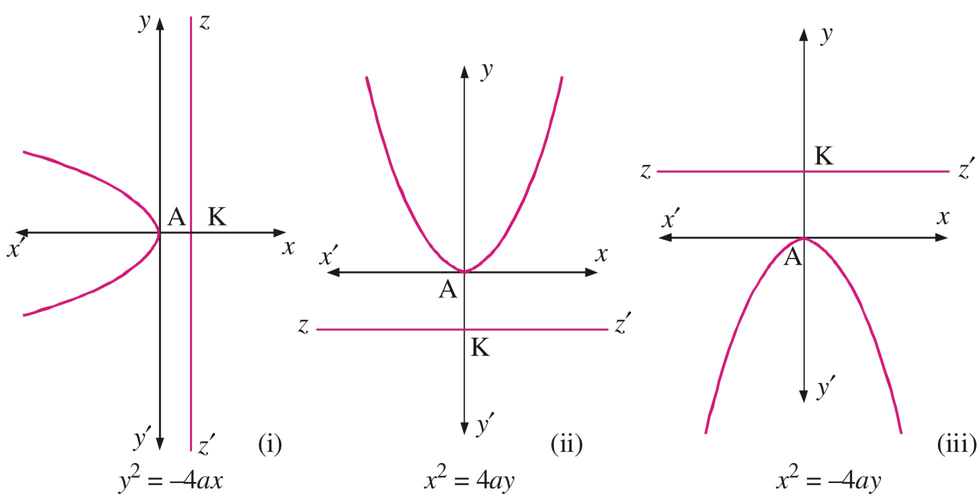
(i) नाभि ($-a$,0) तथा नियता $x - a = 0$ है, (ii) नाभि(0,a) तथा नियता $y + a = 0$ है,

(iii) नाभि (0, $-a$) तथा नियता $y - a = 0$ है।

यह आसानी से दर्शाया जा सकता है कि उपर्युक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत परवलय के समीकरण निम्न रूप के होंगे:

(i) $y^2 = -4ax$ (ii) $x^2 = 4ay$ (iii) $x^2 = -4ay$

परवलय के उपर्युक्त समीकरणों के लिए चित्र नीचे दिए गए हैं।



चित्र 16.6

परवलय के उपर्युक्त रूपों के संगत परिणाम निम्नलिखित हैं :

रूप	$y^2 = 4ax$	$y^2 = -4ax$	$x^2 = 4ay$	$x^2 = -4ay$
शीर्ष के निर्देशांक	(0,0)	(0,0)	(0,0)	(0,0)
नाभि के निर्देशांक	(a,0)	($-a$,0)	(0,a)	(0,$-a$)
नियता का समीकरण	$x = -a$	$x = a$	$y = -a$	$y = a$
अक्ष का समीकरण	$y = 0$	$y = 0$	$x = 0$	$x = 0$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$4a$	$4a$	$4a$	$4a$

उदाहरण 16.3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि मूलबिन्दु है तथा नियता रेखा $2x+y-1=0$ है।

हल : माना नाभि $S\ (0,0)$ है तथा ZZ' नियता है जिसका समीकरण $2x+y-1=0$ है।

माना परवलय पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है।

माना PM नियता पर लम्ब है (चित्र 16.5 देखिए)

$\therefore$ परिभाषा से $SP = PM$

या $\quad SP^2 = PM^2$ या $x^2+y^2 = \dfrac{(2x+y-1)^2}{\left(\sqrt{2^2+1}\right)^2}$

या $\quad 5x^2+5y^2 = 4x^2+y^2+1+4xy-2y-4x$

या $\quad x^2+4y^2-4xy+2y+4x-1=0$

यही परवलय का वांछित समीकरण है।

उदाहरण 16.4. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका नाभि बिन्दु $(2,3)$ तथा नियता रेखा $x-4y+3=0$ है।

हल : दिया है कि नाभि $S(2,3)$ है तथा नियता का समीकरण $x-4y+3=0$ है।

$\therefore$ उपर्युक्त उदाहरण की तरह

$$(x-2)^2+(y-3)^2 = \left\{\frac{x-4y+3}{\sqrt{1^2+4^2}}\right\}^2$$

या $\quad 16x^2+y^2+8xy-74x-78y+212=0$

जो कि परवलय का वांछित समीकरण है।

देखें आपने कितना सीखा 16.2

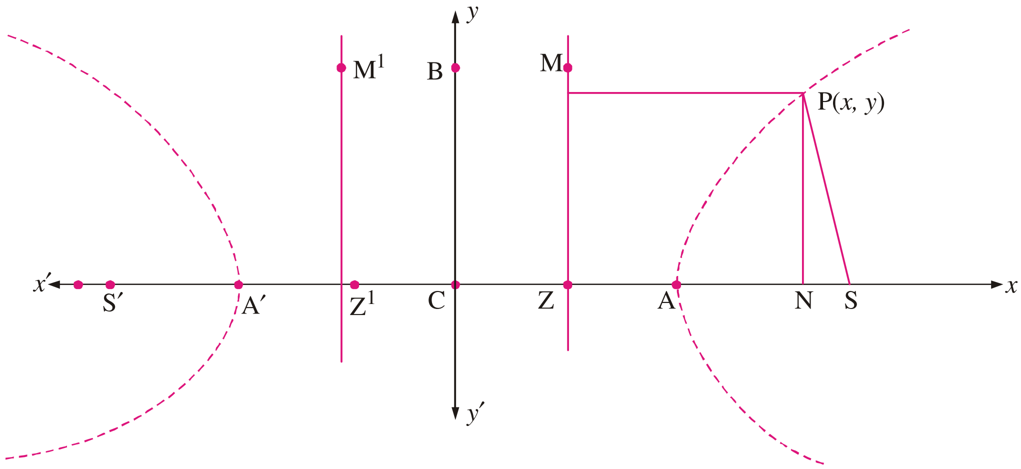
1. परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (a, b) और नियता $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ है।
2. परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि $(2,3)$ तथा नियता $3x+4y=1$ है।

16.4 अतिपरवलय

अतिपरवलय एक ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक समतल में इस प्रकार भ्रमण करता/घूमता है कि इसकी एक निश्चित बिन्दु तथा उसी समतल में स्थित एक निश्चित सरल रेखा से दूरी का अनुपात 1 से बड़ा होता है।

अर्थात् अतिपरवलय एक ऐसा शांक्व है जिसकी उत्केंद्रता 1 से अधिक है। निश्चित बिंदु को नाभि तथा निश्चित सरल रेखा को नियता कहते हैं।

अतिपरवलय का मानक रूप में समीकरण :



मान लीजिए S नाभि तथा ZM नियता है। S से नियता पर SZ लंब खींचा। हम SZ को $e:1$ $(e>1)$ के अनुपात में अन्तः और बाहयतः विभाजित कर सकते हैं माना A तथा A′ विभाजन बिन्दु हैं जैसा कि उपर्युक्त चित्र में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि C, AA′ का मध्यबिन्दु है। अब CZ को x-अक्ष तथा C पर लम्ब को y-अक्ष लीजिए।

माना $$AA' = 2a$$

अब $$\frac{SA}{AZ} = e\ (e>1) \text{ और } \frac{SA'}{A'Z} = e\ (e>1).$$

अर्थात् $$SA = eAZ \qquad ...(i)$$

$$SA' = eA'Z \qquad ...(ii)$$

(i) और (ii) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता हैं

$$SA + SA' = e(AZ + A'Z)$$

$$(CS - CA) + (CS + CA') = eAA'$$

$$\Rightarrow \quad 2CS = e.2a \ (\because CA = CA')$$

$$\Rightarrow \quad CS = ae$$

अतः नाभि बिन्दु $(ae, 0)$ है।

(ii) से (i) घटाने पर हमें प्राप्त होता है।

$$SA' - SA = e(A'Z - AZ)$$

अर्थात् $$AA' = e\left[(CZ + CA') - (CA - CZ)\right]$$

अर्थात् $$AA' = e[2CZ] \quad (\because CA' = CA)$$

अर्थात् $$2a = e(2CZ)$$

$$\Rightarrow \qquad CZ = \frac{a}{e}$$

$\therefore$ नियता का समीकरण $x = \frac{a}{e}$ है।

मान लीजिए अतिपरवलय पर कोई बिन्दु $P(x, y)$ है। P से नियता तथा x-अक्ष पर लम्ब क्रमशः PM तथा PN हैं।

इस प्रकार $\qquad \frac{SP}{PM} = e \qquad \Rightarrow SP = ePM$

$$\Rightarrow \qquad (SP)^2 = e^2(PM)^2$$

अर्थात् $\qquad (x - ae)^2 + (y - 0)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

अर्थात् $\qquad x^2 + a^2e^2 - 2aex + y^2 = e^2\left(\frac{e^2x^2 + a^2 - 2aex}{e^2}\right)$

अर्थात् $\qquad x^2 + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + a^2$

अर्थात् $\qquad (e^2 - 1)x^2 - y^2 = a^2(e^2 - 1)$

अर्थात् $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$

मान लीजिए $\qquad a^2(e^2 - 1) = b^2$

$$\therefore \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

जो कि मानक रूप में अतिपरवलय का समीकरण है।

- अब माना y-अक्ष के सापेक्ष S का प्रतिबिम्ब S′ तथा ZM का प्रतिबिम्ब Z′M′ है। S′ को नाभि तथा Z′M′ को नियता लेने पर, यह देख सकते हैं कि अतिपरवलय की संगत समीकरण $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ है। अतः प्रत्येक अतिपरवलय के लिए, दो नाभियां और दो नियताएँ होती है।

- हमें $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ तथा $e > 1$ ज्ञात है $\Rightarrow e = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{a^2}}$

- यदि हम अतिपरवलय की समीकरण में $y = 0$ रखें तो हमें प्राप्त होता है

  $x^2 = a^2 \Rightarrow x = \pm a$

  $\therefore$ अतिपरवलय x-अक्ष को $A(a, 0)$ तथा $A'(-a, 0)$ पर काटता है।

- यदि अतिपरवलय की समीकरण में हम $x = 0$ रखें तो हमें प्राप्त होता है

  $y^2 = -b^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{-1}.b = \pm ib$

  जिसका कार्तीय तल में अस्तित्व नहीं है।

  $\therefore$ अतिपरवलय y-अक्ष पर प्रतिच्छेद नहीं करता है।

- $AA' = 2a$, x-अक्ष की दिशा में अतिपरवलय की अनुप्रस्थ अक्ष कहलाती है। तथा $BB' = 2b$ y-अक्ष की दिशा में अतिपरवलय की संयुग्मी अक्ष कहलाती है। ध्यान रहे अतिपरवलय संयुग्मी अक्ष पर नहीं मिलता है।
- दीर्घवृत्त की तरह, अतिपरवलय की भी दो नाभियाँ

  $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$ और दो नियताएँ $x = \pm\frac{a}{e}$ होती हैं।
- C अतिपरवलय का केन्द्र कहलाता है।
- अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा, अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्बवत एक रेखाखण्ड है जो किसी नाभि से होकर जाता है तथा उसका अन्त बिन्दु अतिपरवलय पर स्थित होता है। दीर्घवृत की तरह, इसे सिद्ध कर सकते हैं कि अतिपरवलय की नाभिलम्ब जीवा भी $\frac{2b^2}{a}$ होती है।
- अतिपरवलय दोनों अक्षों के सममित होता है।
- अतिपरवलय की नाभियाँ हमेशा अनुप्रस्थ अक्ष पर होतीं हैं। धनात्मक पद के हर से अनुप्रस्थ अक्ष प्राप्त होता है उदाहरण के लिए $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, x-अक्ष की दिशा में अनुप्रस्थ अक्ष पर होता है तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 6 इकाई है। जबकि $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$ अनुप्रस्थ अक्ष पर y-अक्ष की दिशा में है जिसकी लम्बाई 10 इकाई है।
- अतिपरवलय, जिसकी अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष क्रमशः किसी दिए गए अतिपरवलय के संयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष हों तो यह अतिपरवलय दिए गए अतिपरवलय का संयुग्मी अतिपरवलय कहलाता है जिसका समीकरण $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ है।

इस स्थिति में : अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष x-अक्ष की ओर होती है।
- अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 2b$.
- संयुग्मी अक्ष की लम्बाई $= 2a$
- नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \frac{2a^2}{b}$.
- नियताओं की समीकरण $y = \pm\frac{b}{e}$.
- शीर्ष $(0, \pm b)$
- नाभियाँ $(0, \pm be)$
- केन्द्र $(0, 0)$
- उत्केन्द्रता $e = \sqrt{\frac{b^2 + a^2}{b^2}}$.

16.5 समकोणीय अतिपरवलय

यदि किसी अतिपरवलय में अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई संयुग्मी अक्ष की लम्बाई के बराबर हो, तो वह अतिपरवलय समकोणीय अतिपरवलय कहलाता है।

इसकी समीकरण $x^2 - y^2 = a^2$ या $y^2 - x^2 = b^2$ $(\because a = b)$

इस स्थिति में $e = \sqrt{\dfrac{a^2+a^2}{a^2}}$ या $\sqrt{\dfrac{b^2+b^2}{b^2}} = \sqrt{2}$

अर्थात् समकोणीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

उदाहरण 16.5. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए (i) उत्केन्द्रता (ii) नाभियाँ (iii) शीर्ष (iv) नियताएँ (v) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई (vi) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई (vii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई (viii) केन्द्र।

हल : यहाँ $a^2 = 16$ तथा $b^2 = 9$, $\Rightarrow a = 4$ तथा $b = 3$.

(i) उत्केन्द्रता (e) = $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{a^2}} = \sqrt{\dfrac{16+9}{16}} = \dfrac{5}{4}$

(ii) नाभि = $(\pm\, ae, 0) = \left(\pm 4 \times \dfrac{5}{4}, 0\right) = (\pm 5, 0)$

(iii) शीर्ष = $(\pm\, a, 0) = (\pm\, 4, 0)$

(iv) नियताएँ $x = \pm\dfrac{a}{e} \Rightarrow x = \pm\dfrac{4}{5/4} \Rightarrow x = \pm\dfrac{16}{5}$.

(v) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2a = 2 \times 4 = 8$.

(vi) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2b = 2 \times 3 = 6$

(vii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2 \times 9}{4} = \dfrac{9}{2}$.

(viii) केन्द्र = (0, 0)

उदाहरण 16.6. उस अतिपरवलय की समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष $(\pm\, 2, 0)$ तथा नाभि $(\pm\, 3, 0)$ है।

हल : यहाँ $a = 2$ और $ae = 3$.

$\therefore$ $e = 3/2$.

हम जानते हैं कि $b^2 = a^2(e^2 - 1)$

$\Rightarrow$ $b^2 = 4\left(\dfrac{9}{4} - 1\right) = 5$

$\therefore$ अतिपरवलय की समीकरण $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$ है।

उदाहरण 16.7. अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{27} = 1$ के लिए, निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(i) उत्केन्द्रता (ii) केन्द्र (iii) नाभियाँ (iv) शीर्ष (v) नियताएँ (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई (viii) नाभिलम्ब जीवा।

हल : यहाँ $b^2 = 9$ तथा $a^2 = 27 \Rightarrow b = 3$ तथा $a = 3\sqrt{3}$.

(i) $e = \sqrt{\dfrac{27+9}{9}} = \sqrt{4} = 2.$ (ii) केन्द्र $= (0,\ 0)$

(iii) नाभियाँ $= (0, \pm be) = (0, \pm 3 \times 2) = (0, \pm 6).$

(iv) शीर्ष $= (0,\ \pm b) = (0,\ \pm 3).$

(v) नियताएँ $y = \pm\dfrac{b}{e} \Rightarrow y = \pm\dfrac{3}{2}.$

(vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 2b = 2 \times 3 = 6$

(vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई $= 2a = 2 \times 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

(viii) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \dfrac{2a^2}{b} = \dfrac{2 \times 27}{3} = 18.$

देखें आपने कितना सीखा 16.3

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए :

1. (i) अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{25} - \dfrac{x^2}{16}$ की अनुप्रस्थ अक्ष की दिशा है ....

   (ii) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$ की उत्क्रेन्द्रता है ....

   (iii) समकोणीय अतिपरवलय की उत्क्रेन्द्रता है ....

   (iv) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ के नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई है ....

   (v) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की नाभियों की स्थितियां है ....

   (vi) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ की नियताओं की समीकरण हैं ....

   (vii) अतिपरवलय $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ के शीर्ष हैं ....

2. अतिपरवलय $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ के लिए, निम्नलिखित की पूर्ति कीजिए :

   (i) उत्क्रेन्द्रता (e) = ... (ii) केन्द्र = ...

   (iii) नाभियाँ = ... (iv) शीर्ष = ...

   (v) नियताओं की समीकरण, y = ... (vi) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = ...

   (vii) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = ... (viii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = ...

   (ix) अनुप्रस्थ अक्ष की दिशा है .... (x) संयुग्मी अक्ष .... की ओर है

आइये दोहराएँ

- **शंकु परिच्छेद**

"शंकु परिच्छेद एक बिन्दु P का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार चलता है कि इसकी किसी एक स्थिर बिन्दु से दूरी तथा एक स्थिर सरल रेखा से लम्बवत दूरी का अनुपात सदैव स्थिर रहता है".

(*i*) **नाभि :** स्थिर बिन्दु को नाभि कहते हैं।

(*ii*) **नियता :** स्थिर सरल रेखा को नियता कहते हैं।

(*iii*) **अक्षः** नाभि से जाने वाली तथा नियता के लम्बवत सरल रेखा को अक्ष कहते हैं।

(*iv*) **उत्केन्द्रता :** उर्पयुक्त स्थिर अनुपात को उत्केन्द्रता कहते हैं।

- (*v*) **नाभि लम्ब :** नाभि से जाने वाली तथा नियता के समान्तर द्विकोटि को नाभिलम्ब कहते हैं। (चित्र 16.5 में LSL' नाभिलम्ब है)

- **दीर्घवृत्त का मानक समीकरण :** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

(*i*) दीर्घ अक्ष $=2a$ (*ii*)लघु अक्ष $=2b$

(*iii*) नियता का समीकरण $x=\pm\frac{a}{e}$ (*iv*) नाभियां : $(\pm ae, 0)$

(*v*) उत्केन्द्रता अर्थात e को $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$ के द्वारा प्राप्त करते हैं

- **परवलय का मानक समीकरण** $y^2=4ax$ है।

(*i*)शीर्ष $(0,0)$ है। (*ii*) नाभि $(a,0)$ है।

(*iii*) परवलय का अक्ष $y=0$ है। (*iv*)परवलय की नियता $x+a=0$ है।

(*v*) नाभिलम्ब $=4a$

- **परवलय के अन्य रूप हैं.**

(*i*) $y^2=-4ax$ (बाईं ओर अवतल)

(*ii*) $x^2=4ay$ (ऊपर की ओर अवतल)

(*iii*) $x^2=-4ay$ (नीचे की ओर अवतल)

- अतिपरवलय का समीकरण, जिसकी अनुप्रस्थ अक्ष x-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष y-अक्ष की ओर है, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है।

  इस अतिपरवलय के लिए (i) $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}$.

  (ii) केन्द्र = (0, 0) (iii) नाभियाँ = ($\pm ae$, 0)

  (iv) शीर्ष = ($\pm a$, 0) (v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{2b^2}{a}$

  (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2a$

  (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2b$

  (viii) नियता का समीकरण $x=\pm\frac{a}{e}$ द्वारा दी जातीं हैं।

- उस अतिपरवलय का समीकरण जिसमें, अनुप्रस्थ अक्ष y-अक्ष की ओर तथा संयुग्मी अक्ष x-अक्ष की ओर हों, $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ है।

  इस अतिपरवलय के लिए

  (i) शीर्ष = (0, $\pm b$) (ii) केन्द्र = (0, 0)

  (iii) नाभियाँ = (0, $\pm be$) (iv) $e = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{b^2}}$

  (v) नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{2a^2}{b}$.

  (vi) अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $2b$.

  (vii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = $2a$.

  (viii) नियताओं की समीकरण $y = \pm \frac{b}{e}$ द्वारा दी जाती हैं।

सहायक वेबसाइट

- *https://www.youtube.com/watch?v=ikzoI7K5q3o*
- *https://www.youtube.com/watch?v=Auv-yHdjA6Q*
- *https://www.youtube.com/watch?v=UOeCoMGeEI8*
- *https://www.youtube.com/watch?v=-AB5gXQWaJE*
- *https://www.youtube.com/watch?v=aWj5cW-8T2E*
- *https://www.youtube.com/watch?v=XHPgDnJOkWM*
- *https://www.youtube.com/watch?v=P3K6dHYZfTw*

आइए अभ्यास करें

1. निम्न स्थितियों में दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जब

   (a) नाभि (0, 1), नियता $x + y = 0$ तथा $e = \frac{1}{2}$ है।

   (b) नाभि (–1, 1), नियता $x - y + 3 = 0$ तथा $e = \frac{1}{2}$ है।

2. निम्न दीर्घवृत्तों की नाभियों तथा उत्केन्द्रता के निर्देशांक ज्ञात कीजिए:

   (a) $4x^2 + 9y^2 = 1$ (b) $25x^2 + 4y^2 = 100$

3. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–8, –2) तथा नियता $y - 2x + 9 = 0$ है।

4. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (± 5, 0) है तथा अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई 8 इकाई है।

5. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (0, ± 6) तथा $e = \frac{5}{3}$ है।

6. अतिपरवलय (i) $25x^2 - 9y^2 = 225$ (ii) $16y^2 - 4x^2 = 1$ की उत्केन्द्रता, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई, शीर्ष, नाभियाँ, नियताओं की समीकरण तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

7. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ तथा वह बिन्दु (2, 3) से होकर जाता है।

8. उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (± 4, 0) तथा नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई 12 है।

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 16.1

1. (a) $20x^2 + 36y^2 = 405$ (b) $x^2 + 2y^2 = 100$

   (c) $8x^2 + 9y^2 = 1152$

2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

देखें आपने कितना सीखा 16.2

1. $(ax - by)^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0.$

2. $16x^2 + 9y^2 - 94x - 142y - 24xy + 324 = 0$

देखें आपने कितना सीखा 16.3

1. (i) y-अक्ष (ii) $\frac{5}{3}$ (iii) $\sqrt{2}$ (iv) $\frac{2b^2}{a}$

   (v) $(\pm\, ae,\ 0)$ (vi) $x = \pm\frac{a}{e}$ (vii) $(\pm\, a,\ 0)$

2. (i) $\sqrt{\frac{b^2+a^2}{b^2}}$ (ii) (0, 0) (iii) $(0,\ \pm\, be)$

   (iv) (0, ± b) (v) $\frac{\pm b}{e}$ (vi) $\frac{2a^2}{b}$

   (vii) $2b$ (viii) $2a$ (ix) y-अक्ष

   (x) x-अक्ष

आइए अभ्यास करें

1. (a) $7x^2+7y^2-2xy-16y+8=0$

   (b) $7x^2+7y^2+2xy+10x-10y+7=0$

2. (a) $\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6},0\right);\ \frac{\sqrt{5}}{3}$ (b) $\left(0\ ,\pm\sqrt{21}\right);\ \frac{\sqrt{21}}{5}$

3. $x^2+4y^2+4xy+116x+2y+259=0$

4. $9x^2-16y^2=144$

5. $16y^2-9x^2=576$

6. (i) उत्केन्द्रता = $\frac{\sqrt{34}}{3}$, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = 6 संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 10, शीर्ष (± 3, 0), नाभि $(\pm\sqrt{34},0)$ नियताओं का समीकरण $x=\pm\frac{1}{\sqrt{34}}$, नाभिलम्ब जीवा की लम्बाई = $\frac{50}{3}$.

   (ii) उत्केन्द्रता = $\sqrt{5}$, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई = $\frac{1}{2}$, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई = 1, शीर्ष $\left(0,\pm\frac{1}{4}\right)$, नाभि $\left(0,\pm\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$, नियताओं का समीकरण $y=\frac{1}{4\sqrt{5}}$, नाभिलम्ब = 2

7. $y^2-x^2=5$ 8. $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

17

प्रकीर्णन के मापक

अब तक आप केंद्रीय प्रवृत्ति (central tendency) के विभिन्न मापों से परिचित हो गए होंगे। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप एक मान द्वारा पूरे आंकड़ों को निरूपित करने में सहायक होते हैं। क्या केंद्रीय प्रवृत्ति के मान आंकड़ों का पूरी तरह व समुचित रूप से वर्णन कर सकते हैं?

इसे समझने के लिए, आइए एक उदाहरण लें। दो कारखानों में काम कर रहे व्यक्तियों की दैनिक आय निम्नलिखित है:

कारखाना A	:	35	45	50	65	70	90	100
कारखाना B	:	60	65	65	65	65	65	70

यहां हम देखते हैं कि दोनों समूहों का आंकड़ा माध्य समान अर्थात् 65 है।

(i) समूह (A) के प्रेक्षण (observations), माध्य से अधिक प्रकीर्ण हैं।

(i) समूह (B) में लगभग सभी प्रकीर्ण माध्य के आसपास केंद्रित हैं।

निश्चित रूप से दोनों समूहों के माध्य समान होने पर भी दोनों में अन्तर है।

इस प्रकार, ऐसी स्थिति से ही समूहों के बीच भेद करने की ज़रूरत पैदा होती है। हमें कुछ अन्य मापों की भी ज़रूरत होती है जो प्रकीर्णता (या फैलाव) के माप से संबधित होते हैं।

इस पाठ में, हम परिक्षेपण के माप (measure of dispersion) का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्न-लिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- प्रकीर्णन के अर्थ उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करना
- विक्षेपण की विभिन्न मापों- परास (range), माध्य विचलन (mean deviation), प्रसरण (variance) तथा मानक विचलन को परिभाषित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य से माध्य विचलन को परिकलित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक से माध्य विचलन परिकलित करना
- यथा प्राप्त और वर्गीकृत आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन को परिकलित करना
- प्रसरण और मानक विचलन के गुणों को उदाहरणों की सहायता से स्पष्ट करना
- समान माध्य वाले बारंबारता बंटनों का विश्लेषण करना

पूर्व ज्ञान

- वर्गीकृत आंकड़ों का माध्य
- अवर्गीकृत आंकड़ों का माध्यक

17.1 प्रकीर्णन का अर्थ

आइए प्रकीर्णन का अर्थ स्पष्ट करने के लिए एक उदाहरण लें।

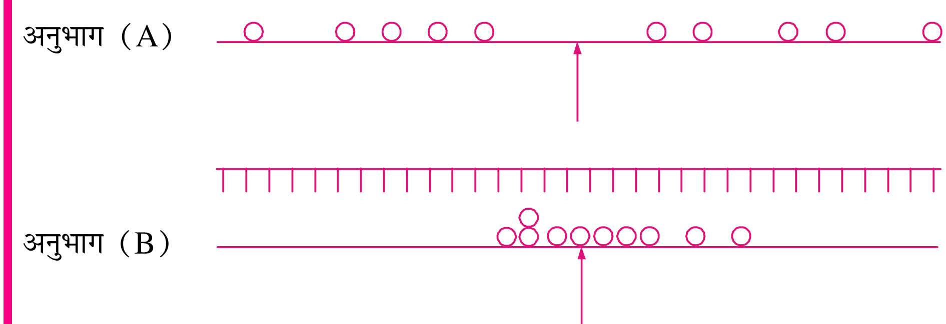
किसी स्कूल में दसवीं कक्षा के दो अनुभागों (सेक्शनों) में से 10 विद्यार्थियों (प्रत्येक सेक्सन से दस विद्यार्थी) की गणित की साधारण परीक्षा ली गई। अधिकतम 40 अंकों में से विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक इस प्रकार हैं:

अनुभाग (A)	6	9	11	13	15	21	23	28	29	35
अनुभाग (B)	15	16	16	17	18	19	20	21	23	25

अनुभाग (A) के औसत अंक 19 हैं

अनुभाग (B) के औसत अंक 19 हैं।

आइए अनुभाग (A) और (B) के लिए समान पैमाने पर बिन्दु चित्र (चित्र नीचे देखिए) बनाएं। चित्र में माध्य की स्थिति एक तीर के निशान से दर्शित है।



चित्र 17.1

स्पष्टतः प्रत्येक अनुभाग में आंकड़ों के फलाव या प्रकीर्णन का विस्तार अलग-अलग है। औसत के संबंध में दिए गए आंकड़ों के प्रकीर्ण का माप प्रकीर्णन कहलाता है।

इस पाठ में, आप निम्नलिखित प्रकीर्णन मापों के बारे में पढ़ेंगे।

(a) परास (range)

(b) माध्य से माध्य विचलन (mean deviation from mean)

(c) माध्यक से माध्य विचलन (mean deviation from median)

(d) प्रसरण (Variance)

(e) मानक विचलन (Standard deviation)

17.2 विभिन्न प्रकीर्णन मापों की परिभाषा

(A) परासः उपर्युक्त उदाहरण में, हमने देखा कि(i) अनुभाग (A) के सभी विद्यार्थियों के अंक 6 से 35 के बीच में हैं।

(ii) अनुभाग (B) के सभी विद्यार्थियों के अंक 15 से 25 के बीच में हैं।

दिए गये आंकड़ों के अधिकतम और न्यूनतम मान के बीच का अंतर बंटन का परास कहलाता है।

(B) माध्य से माध्य विचलन: चित्र 17.1 में हमने देखा कि अनुभाग (B) के अंक माध्य के आसपास हैं जबकि अनुभाग (A) के अंक माध्य से दूर फैले हैं। आइए माध्य से प्रत्येक प्रेक्षण का विचलन ले और ऐसे विचलनों को जोड़ें। यदि 'योग बड़ा' होगा तो प्रकीर्णन भी 'बड़ा होगा' और यदि योग 'छोटा होगा तो प्रकीर्णन भी 'छोटा' होगा।

आइए अनुभाग के अंकों के लिए माध्य अर्थात् 19 से विचलनों का योग, ज्ञात करें।

प्रेक्षण (x_i)	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$
6	–13
9	–10
11	–8
13	–6
15	–4
21	+2
23	+4
28	+9
29	+10
35	16
190	0

यहां योग शून्य है। यह योग न तो 'बड़ा' है न ही 'छोटा' है। क्या यह मात्र संयोग है। आइए अनुभाग (B) के अंकों के लिए माध्य अर्थात् 19 से, विचलनों का योग ज्ञात करें।

प्रेक्षण (x_i)	माध्य से विचलन $(x_i - \bar{x})$
15	–4
16	–3
16	–3
17	–2
18	–1
19	0
20	1
21	2
23	4
25	6
190	0

हमने देखा, यहां भी योग शून्य ही आता है। निश्चित रूप से यह संयोगवश नहीं है। वस्तुत: **हम यह पहले ही सिद्ध कर चुके हैं कि किन्हीं आंकड़ों के समुच्चय के लिए, माध्य से लिया गया विचलनों का योग हमेशा शून्य होता है।**

ध्यान से जांच करने पर हम पाते हैं कि कुछ विचलनों के चिन्ह धनात्मक हैं और कुछ विचलनों के

चिन्ह ऋणात्मक हैं। शायद यही कारण है कि इनका योग हमेशा शून्य होता है।

दोनों स्थितियों में क्योंकि योग शून्य है, हम कोई निष्कर्ष नहीं निकाल सकते। परन्तु इससे बचा जा सकता है यदि हमें विचलनों का निरपेक्ष मान लें और तब योग करें।

इस विधि का अनुसरण करें तो, इससे हमें जो मान प्राप्त होगा वह माध्य से माध्य विचलन कहलाता है।

इस प्रकार माध्य विचलन प्रेक्षणों के माध्य से विचलन के निरपेक्ष का योग है। मानों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है।

(C) प्रसरण : उपर्युक्त स्थिति में, हमने विचलनों के ऋणात्मक चिन्ह से छुटकारा पाने के लिए माध्य से लिए गये विचलनों का निरपेक्ष मान लिया है। अन्य विधि है विचलनों के वर्ग लेना। इसलिए आइये, माध्य से विचलनों को वर्ग करके उनका योग लें। यदि हम इस योग को प्रेक्षण की संख्याओं (अर्थात् बारम्बारताओं का योग) से विभाजित करते हैं तो हमें विचलनों का औसत प्राप्त होगा, जो प्रसरण कहलाता है।

प्रसरण को प्राय: चिन्ह σ^2 से दर्शाया जाता है।

(D) मानक विचलन : यदि हम प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल लें तो हमें विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल मान प्राप्त होता है। सरल भाषा में इसे हम मानक विचलन कहते हैं और इसे σ द्वारा दर्शाया जाता है।

17.3 यथाप्राप्त तथा वर्गीकृत आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन

यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N}$

वर्गीकृत आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} [f_i |x_i - \bar{x}|]}{N}$

जहां $$N = \sum_{i=1}^{n} f_i, \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(f_i x_i)$$

माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण कीजिए :

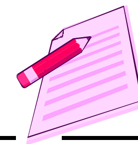
चरण 1: माध्य से विचलन का एक कॉलम बनाएँ यानि $(x_i - \bar{x})$ (वर्गीकृत आंकड़ों की स्थिति में x_i को वर्ग के मध्य मान (mid-value) के रूप में लें)

चरण 2 : प्रत्येक विचलन का निरपेक्ष मान लें और $|x_i - \bar{x}|$ वाले कॉलम में उस मान को लिखें।

यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग कीजिए :

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{N}$

वर्गीकृत आकड़ों के लिए चरण 3 के अनुसार चलें।



चरण 3: चरण 2 की प्रत्येक प्रविष्टि को संगत बारंबारता से गुणा करें। हमें $f_i|(x_i - \bar{x})|$ प्राप्त होता है। इसे $f_i|x_i - \bar{x}|$ शीर्षक वाले कॉलम में लिखें

चरण 4: चरण 3 के कॉलम का योग ज्ञात कीजिए। हमें प्राप्त होता है $\sum_{i=1}^{n}[f_i|x_i - \bar{x}|]$

चरण 5: चरण 4 में प्राप्त योग को N से विभाजित करें।

आइए उपरोक्त चरणों को स्पष्ट रूप से समझने के लिए एक उदाहरण देखें।

उदाहरण 17.1 निम्नलिखित आंकड़ों का माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

वस्तुओं का आकार x_i	4	6	8	10	12	14	16
बारंबारता f_i	2	4	5	3	2	1	4

माध्य 9.7 लें।

हल :

x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
4	2	−5.7	5.7	11.4
6	4	−3.7	3.7	14.8
8	5	−1.7	1.7	8.5
10	3	0.3	0.3	0.9
12	2	2.3	2.3	4.6
14	1	4.3	4.3	4.3
16	4	6.3	6.3	25.2
	21			69.7

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum[f_i|x_i - \bar{x}|]}{21} = \dfrac{69.7}{21} = 3.319$

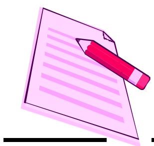
उदाहरण 17.2. निम्नलिखित बंटन का माध्य से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

अंक	0−10	10−20	20−30	30−40	40−50
विद्यार्थियों की संख्या	5	8	15	16	6

अंकों का माध्य 27 है।

हल :

अंक	वर्ग-चिन्ह x_i	f_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \bar{x}\rvert$
0−10	5	5	−22	22	110
10−20	15	8	−12	12	96
20−30	25	15	−2	2	30
30−40	35	16	8	8	128
40−50	45	6	18	18	108
कुल		50			472



टिप्पणी

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum [f_i |x_i - \overline{x}|]}{N} = \dfrac{472}{50} = 9.44$ अंक

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1. नीचे दस लड़कियों की आयु दी गई है :

   3 5 7 8 9 10 12 14 17 18

   इसकी परास क्या है?

2. कक्षा 12 के 10 विद्यार्थियों का भार (किलो ग्राम) में नीचे दिया गया है :

   45 49 55 43 52 40 62 47 61 58

   इसकी परास क्या है?

3. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

   45 55 63 76 67 84 75 48 62 65

   दिया है : माध्य $= 64$ दिया है।

4. निम्नलिखित बंटन का माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

वेतन (रु. में)	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
कर्मचारियों की संख्या	4	6	8	12	7	6	4	3

दिया है : माध्य $= 57.2$ दिया है।

5. एक परीक्षा में 40 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के निम्नलिखित आकड़ों के लिए माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

प्राप्त अंक	20	30	40	50	60	70	80	90	100
विद्यार्थियों की संख्या	2	4	8	10	8	4	2	1	1

6. नीचे दिए गए आंकड़े एक कारखाने के 50 कर्मचारियों की आय को दर्शाते हैं :

आय (रूपयों में)	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
कर्मचारियों की संख्या	4	6	15	12	7	4	2

   माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7. 100 विद्यार्थियों के भारों का वितरण नीचे दिया गया है:

भार (किलो ग्राम में)	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
विद्यार्थियों की संख्या	5	13	35	25	17	5

माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

8. एक विशेष परीक्षा में 50 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक हैं:

अंक	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
विद्यार्थियों की संख्या	4	6	9	12	8	6	4	1

उपरोक्त आंकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

17.4 माध्यक

17.4.1 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक

असतत बारम्बारता बंटन का माध्यक

चरण 1 : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

चरण 2 : संचयी बारम्बारता ज्ञात कीजिए।

चरण 3 : $\frac{N}{2}$ ज्ञात कीजिए।

चरण 4 : प्रेक्षण जिसकी संचयी बारम्बारता $\frac{N}{2}$ से थोड़ी अधिक हो, आँकड़ों का माध्यक होता है।

उदाहरण 17.3. आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

x_i	8	9	10	12	14	16
f_i	6	2	2	2	6	8

हल : दिये गये आँकड़े पहले से ही आरोही क्रम में हैं। अब हमें प्रेक्षणों की संचयी बारम्बारता लिखनी है।

x_i	8	9	10	12	14	16
f_i	6	2	2	2	6	8
c.f.	6	8	10	12	18	26

$$N = 26, \qquad \therefore \frac{N}{2} = 13.$$

प्रेक्षण, जिसकी संचयी बारम्बारता (c.f.) 13 से अधिक 14 है (जिसकी संचयी बारंबारता 18 है)

$\therefore$ माध्यक = 14.

17.4.2 सतत बारम्बारता बंटन का माध्यक

चरण 1 : आँकड़ों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए।

चरण 2 : प्रेक्षणों की संचयी बारम्बारता लिखिए।

चरण 3 : उस वर्ग की जाँच कीजिए जिसकी संचयी बारम्बारता सटीक $\frac{N}{2}$ से बडी है। इस वर्ग–अन्तराल को माध्यक वर्ग कहिये।

चरण 4 : सूत्र, माध्यक = $l+\dfrac{\frac{N}{2}-C}{f}\times i$ द्वारा माध्यक ज्ञात कीजिए

जहाँ $l \rightarrow$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$N \rightarrow$ प्रेक्षणों की संख्या $\text{N} = \Sigma f_i$

$C \rightarrow$ माध्यक वर्ग से सटीक पहले वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता

$f \rightarrow$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता

$i \rightarrow$ माध्यक वर्ग का विस्तार

उदाहरण 17.4. नीचे 50 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों का बंटन दिया गया है, माध्यक ज्ञात कीजिए।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	8	8	14	16	4

हल : दिये गये अन्तराल पहले से ही आरोही क्रम में हैं नीचे दी गयी सारणी में संचयी बारम्बारता, पंक्ति के संगत है।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
छात्रों की संख्या	8	8	14	16	4
संचयी बारम्बारता	8	16	30	46	50

$$\text{N} = 50, \quad \frac{N}{2} = 25$$

संचयी बारंबारता के संगत वर्ग 20-30, सटीक 25 से बडा है

$\therefore$ माध्यक वर्ग 20-30 है।

जहाँ $l = 20$, $\text{N} = 50$, $\text{C} = 16$, $f = 14$, $i = 10$.

$\therefore$ माध्यक = $l+\dfrac{\frac{N}{2}-C}{f}\times i = 20+\dfrac{25-16}{14}\times 10 = 20+\dfrac{9}{14}\times 10 = 20+6.43 = 26.43$

उदाहरण 17.5. निम्नलिखित का माध्यक ज्ञात कीजिए :

अंक	छात्रों की संख्या
0 – 9	3
10 – 19	5
20 – 29	8
30 – 39	9
40 – 49	13
50 – 59	6

हल : दिये गये वर्ग अन्तराल समावेश शृंखला में हैं माध्यक ज्ञात करने से पहले हमें समावेशी शृंखला को सम्मिलित शृंखला में बदलते हैं।

एक समावेशी शृंखला को सम्मिलित शृंखला में बदलने की विधि :

(1) वर्ग की उच्च सीमा तथा क्रमागत अगले वर्ग की निम्न सीमा के अन्तर का आधा ज्ञात करते हैं।

(2) इस अन्तर के आधे को निम्न सीमा में से घटाते हैं तथा उच्च सीमा में जोड़ते हैं।

अंक		f.	c.f.
0-9	0.5-9.5	3	3
10-19	9.5-19.5	5	8
20-29	19.5-29.5	8	16
30-39	29.5-39.5	9	25
40-49	39.5-49.5	13	38
50-59	49.5-59.5	6	44

$$\frac{N}{2}=\frac{44}{2}=22$$

$\therefore$ माध्यक वर्ग 29.5 – 39.5 है। इसकी c.f. 25 है जो कि 22 से सटीक बड़ी है।

अब, $l = 29.5$, N = 33, C = 16, f = 9, $i = 39.5 - 29.5 = 10$

$$\therefore \text{ माध्यक } = l+\frac{\frac{N}{2}-C}{f}\times i = 29.5+\frac{22-16}{9}\times 10$$

$$= 29.5+\frac{6}{9}\times 10 = 29.5+\frac{20}{3} = 29.5 + 6.66 = 36.16$$

देखें आपने कितना सीखा 17.2

निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक ज्ञात कीजिए:

1.

x_i	6	11	16	21	26
f_i	5	3	6	4	7

2.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	5	25	29	17	9

3.

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
बच्चों की संख्या	5	9	10	14	12

4.

आयु (वर्षों से)	17-21	21-26	26-31	31-36	36-41
बच्चों की संख्या	5	6	12	7	4

17.5 माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन

हम जानते हैं कि आँकड़ों के प्रेक्षण में केन्द्रीय प्रवृत्ति, हमें संगठित या सामूहिक आँकड़ों के मान देते हैं। यह भी जानना अतिआवश्यक है कि वास्तव में, केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप से और सभी प्रेक्षण कितने दूर हैं दूसरे शब्दों में, यह जानना आवश्यक है कि एक दिये गये बिन्दु

से प्रेक्षण कितने बिखरे हुए हैं (या केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप)। ज्यादातर स्थितियों में माध्य तथा माध्यक से माध्य विचलन हमें प्रेक्षणों का विचरण देता है। पुनःविचार कीजिए कि आंकड़ों के लिए माध्य विचलन, 'a' से विचरण के निरपेक्ष मान के माध्य से परिभाषित किया जाता है।

पुनः याद/विचार कीजिए कि स्थिर मान a से अन्तर $(x - a)$ प्रेक्षण x का प्रेक्षण a से विचलन कहलाता है।

इसलिए 'a' के सापेक्ष माध्य विचलन को M.D (a) से दर्शाया जाता है।

$$\text{M.D. (a)} = \frac{\text{'}a\text{' से विचलनों के निपरेक्ष मान का योग}}{\text{प्रेक्षणों की संख्या}}$$

गणितीय रूप में हम लिख सकते हैं

$$\text{M.D.}(a) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a|}{n}$$

इस प्रकार
$$\text{M.D. (माध्य} = \overline{\text{X}}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n}$$

$$\text{M.D. (माध्यक = M)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|$$

उदाहरण 17.6. प्रेक्षणों 7, 10, 15, 16, 8, 9, 5, 17, 14 के लिए माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : माध्यक का ज्ञात करने के लिए, दिये गये मानों को आरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं, इसलिए हमें प्राप्त होता है

5, 7, 8, 9, 10, 14, 15, 16, 17,

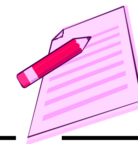
> माध्य/माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात करने की विधि
>
> **चरण 1 :** आँकड़ों का माध्य अथवा माध्यक की गणना करें।
>
> **चरण 2 :** माध्य/माध्यक से प्रत्येक प्रेक्षण का विचलन ज्ञात करें।
>
> **चरण 3 :** विचलन का निरपेक्ष मान ज्ञात करें।
> निरपेक्ष मान, ऋण चिह्न हटाकर प्राप्त किया जाता है (यदि यह उसमें है)
>
> **चरण 4 :** विचलन के निरपेक्ष मान से माध्य की गणना करें। यह माध्य अभीष्ट माध्य विचलन होगा।

$n = 9$, माध्यक $= \frac{n+1}{2}$वाँ प्रेक्षण = 5वाँ प्रेक्षण, M = 10.

माध्यक 10, से प्रेक्षण के विचलन अर्थात्

	5–10	7–10	8–10	9–10	10–10	14–10	15–10	16–10	17–10	हैं।
i.e. x_i-M	–5	–3	–2	–1	0	4	5	6	7	हैं।
$\lvert x_i - \text{M}\rvert$	5	3	2	1	0	4	5	6	7	

$$\text{अब M.D. (M)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{M}|}{n} = \frac{5+3+2+1+0+4+5+6+7}{10} = \frac{33}{10} = 3.3.$$



17.5.1 वर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करना

याद कीजिए कि निम्नलिखित रूप में निरूपित आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं।

(a) असतत बारम्बारता बंटन

प्रेक्षण :	x_1	x_2	x_3	...	x_n
आवृतियाँ :	f_1	f_2	f_3	...	f_n

(b) संतत बारम्बारता विचरण :

प्रेक्षण	$l_1 - u_1$	$l_2 – u_2$	$l_3 - u_3$	...	$l_n – u_n$
बारम्बारता	f_1	f_2	f_3	...	f_n

उदाहरण के लिए, 50 छात्रों द्वारा प्राप्तांक

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
छात्रों की संख्या	8	6	12	10	10	4

अब हमें निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात करना है।

उदाहरण 17.7. निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	25	20	15	10	5
f_i	7	4	6	3	5
c.f.	7	11	17	20	25

N = 25 तथा हम जानते हैं कि माध्यक $\frac{25+1}{2}$ = 13वाँ प्रेक्षण है। यह प्रेक्षण संचयी बारम्बारता 17 में स्थित हैं जिसका संगत प्रेक्षण 15 है।

$\therefore$ माध्यक M = 15

अब विचलन तथा उनके निरपेक्ष मान निम्नलिखित सारणी में दिये गये है :

x_i	f_i	$x_i - \text{M}$	$\lvert x_i - \text{M}\rvert$	$f_i\lvert x_i - \text{M}\rvert$
25	7	25 – 15 = 10	10	7 × 10 = 70
20	4	20 – 15 = 5	5	4 × 5 = 20
15	6	15 – 15 = 0	0	6 × 0 = 0
10	3	10 – 15 = – 5	5	3 × 5 = 15
5	5	5 – 15 = – 10	10	5 × 10 = 50
	N= Σf_i = 25			$\Sigma f_i \lvert x_i - M\rvert = 155$

$$\therefore \quad \text{माध्य विचलन (M)} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i \lvert x_i - M \rvert}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{155}{25} = 6.2$$

उदाहरण 17.8. निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (सेमी. में)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
लड़कियों की संख्या	9	15	23	30	13	10

हल : पहले माध्यक ज्ञात कीजिए

ऊँचाई (सेमी. में)	लड़कियों की संख्या (f)	संचयी बारम्बारता (c.f)
95-105	9	9
105-115	15	24
115-125	23	47
125-135	30	77
135-145	13	90
145-155	10	100

N = 100 $\Rightarrow \frac{N+1}{2} = \frac{101}{2} = 50.5$

$\frac{N}{2} = 50.5$ संचयी बारम्बारता 77 में स्थित है।

$\therefore$ माध्यक वर्ग संचयी बारम्बारता 77 के संगत है अर्थात् 125 – 135

अब माध्यक $= l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$

जहाँ l = माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

N = बारम्बारताओं का योग

C = माध्यक वर्ग से सटीक पहले c.f. का वर्ग

f = माध्यक वर्ग की बारम्बारता

i = माध्यक वर्ग का विस्तार या वर्ग–साइज

यहाँ l = 125, N = 100, C = 47, f = 30, i = 10

$\therefore$ $M = 125 + \frac{50-47}{30} \times 10 = 125 + \frac{3}{3} = 126$

निम्नलिखित रूप में दी गई सारणी से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

ऊँचाई (सेमी. में)	लड़कियों की संख्या (f)	ऊचाईयों का मध्यमान	निरपेक्ष विचलन $(x_i - M\vert)$	$f_i\vert x_i - M\vert$
95-105	9	100	|100-126| = 26	9 × 26 = 234
105-115	15	110	|110-126| = 16	15 × 16 = 240
115-125	23	120	|120 – 126| = 6	23 × 6 = 138
125-135	30	130	|130-126| = 4	30 × 4 = 120
135-145	13	140	|140-126| = 14	13 × 14 = 182
145-155	10	150	|150-126| = 24	10 × 24 = 240
	Σf_i = 100			Σf_i |xi – M| = 1154

$\therefore$ माध्य विचलन (माध्यक) = M.D.(M) = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \dfrac{1154}{100} = 11.54.$

17.5.2 माध्यक से सतत बारम्बारता बंटन का माध्य विचलन ज्ञात करने के चरण

चरण 1 : अंतरालों को आरोही क्रम में व्यवस्थित कीजिए

चरण 2: संचयी बारम्बारता लिखिए

चरण 3 : उस वर्ग की जाँच कीजिए जिसकी संचयी बारम्बारता सटीक $\dfrac{N}{2}$ से बड़ी है जहाँ N प्रेक्षणों की संख्या है (अर्थात् सभी बारम्बारताओं का योग)

चरण 4 : माध्यक वर्ग के लिए संगत मान ज्ञात कीजिए तथा सूत्र में रखिए :

$$\text{माध्यक} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times i$$

जहाँ $l \rightarrow$ माध्यक वर्ग की निम्न सीमा

$N \rightarrow$ बारम्बारताओं का योग

$C \rightarrow$ माध्यक वर्ग से सटीक पहले, वर्ग की संचयी बारम्बारता

$f \rightarrow$ माध्यक वर्ग की बारम्बारता/आवृति

$i \rightarrow$ माध्यक वर्ग का विस्तार

चरण 5 : अब निम्नलिखित स्तम्भों के लिए सारणी बनाइए

दिये गये अन्तराल	बारम्बारता	मध्यमान x_i	माध्यक से निरपेक्ष विचलन $\|x_i - M)$	$f_i\|x_i - M\|$

चरण 6 : अब M.D.(M) = $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} f_i |x_i - M|}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$ की गणना कीजिए

देखें आपने कितना सीखा 17.3

निम्नलिखित आँकड़ों का माध्यक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

1.

x_i	11	12	13	14	16	17	18
f_i	2	3	2	3	1	2	1

2.

x_i	3	6	7	9	11	13
f_i	3	9	11	8	9	6

3.

वजन/भार (किग्रा. में)	40-42	42-44	44-46	46-48	48-50
छात्रों की संख्या	9	13	24	28	6

4.

आय (रुपयों में)	1200	1300	1400	1500	1600	1800	2000
कर्मचारियों की संख्या	4	6	15	12	7	4	2

5.

आयु (वर्षों में)	0-1	1-2	2-3	3-4	4-5
पोलियो ड्राप पीने वाले बच्चों की संख्या	100	155	210	315	65

17.6 यथाप्राप्त आंकड़ों का प्रसरण और मानक विचलन

यदि n प्रेक्षण $x_1, x_2 \ldots, x_n$ तब

प्रसरण $$\left(\sigma^2\right) = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots.. + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

या $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}; \text{ जबकि } \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

σ द्वारा दर्शाया गया मानक विचलन σ^2 का धनात्मक वर्गमूल है। इस प्रकार

$$\sigma = +\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}$$

प्रसरण को परिकलित करने के लिए निम्नलिखित चरणों का अनुसरण किया जाता है। हम यह मानकर चलते हैं कि माध्य को पहले ही परिकलित किया जा चुका है।

चरण 1: माध्य से विचलनों का एक कॉलम बनाएं यानी $x_i - \bar{x}$

चरण 2: (जांच) माध्य से विचलनों का योग शून्य होना चाहिए अर्थात् $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = 0$

चरण 3: प्रत्येक विचलन का वर्ग कीजिए और $(x_i - \bar{x})^2$ शीर्षक वाले कॉलम में इसे लिखें।

चरण 4: चरण 3 के कॉलम (स्तंभ) का योग ज्ञात कीजिए।

चरण 5: चरण 4 में प्राप्त योग को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर हमें σ^2 प्राप्त होता है।

चरण 6: σ^2 का धनात्मक वर्गमूल लेने पर हमें मानक विचलन σ प्राप्त होता है।

उदाहरण 17.9. किसी दुकान में प्रतिदिन हुई चीनी की बिक्री नीचे दी गई है :

सोमवार	मंगलवार	बुधवार	बृहस्पतिवार	शुक्रवार	शनिवार
75 किग्राम	120 किग्राम	12 किग्राम	50 किग्राम	70.5 किग्राम	140.5 किग्राम

प्रतिदिन की औसत बिक्री 78 किलोग्राम है। उपरोक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

हल : $\bar{x} = 78$ किलोग्राम (दिया है)

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
75	-3	9
120	42	1764
12	-66	4356
50	-28	784
70.5	-7.5	56.25
140.5	62.5	3906.25
	0	10875.50

इस प्रकार $$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1} (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{10875.50}{6} = 1812.58 \text{ (लगभग)}$$

और $\sigma = 42.57$ (लगभग)

उदाहरण 17.10 अंग्रेजी की परीक्षा में सेक्शन A के 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए हैं:

7 10 12 13 15 20 21 28 29 35

प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

हल : यहां $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{10} = \frac{190}{10} = 19$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
7	-12	144
10	-9	81
12	-7	49
13	-6	36
15	-4	16
20	$+1$	1
21	$+2$	4
28	$+9$	81
29	$+10$	100
35	$+16$	256
	0	768

अतः $\sigma^2 = \frac{768}{10} = 76.8$, और $\sigma = +\sqrt{76.8} = 8.76$ (लगभग)

देखें आपने कितना सीखा 17.4

1. एक कारखाने के 10 कर्मचारियों की प्रतिदिन की आय है :

   50 60 65 70 80 45 75 90 95 100

   प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

2. अंग्रेजी की परीक्षा में कक्षा X के 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक नीचे दिए गए है:

   9 10 15 16 18 20 25 30 32 35

   प्रसरण और मानक विचलन का परिकलन कीजिए।

3. एक शहर में महीने के प्रथम दस दिनों के लिए सापेक्ष आद्रता के आंकड़े नीचे दिए गए हैं :

   90 97 92 95 93 95 85 83 85 75

   उपर्युक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

4. दिए गए आंकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   4 6 8 10 12 14 16

5. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   4 7 9 10 11 13 16

6. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

   40 40 40 60 65 65 70 70 75 75 75 80 85 90 90 100

17.7 यथाप्राप्त आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण-वैकल्पिक विधि

यदि $\bar{x}$ दशमलव में हो तो $\bar{x}$ से अन्य अवयवों का विचलन लेना और प्रत्येक विचलन का वर्ग करना और अधिक दशमलव आने के कारण कठिन हो जाता है। हम σ^2 ज्ञात करने के लिए नीचे एक अन्य सूत्र देते हैं जिसमें $\bar{x}$ ज्ञात करने को छोड़ा जा सकता है।

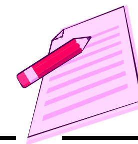
हम जानते हैं
$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2}{n}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \frac{2\bar{x}\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} + \bar{x}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - \bar{x}^2 \qquad \left(\because \bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}\right)$$

अर्थात,
$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n}$$

और
$$\sigma = +\sqrt{\sigma^2}$$

अतः इस विधि से σ^2 व σ की गणना के निम्न चरण हैं :



चरण 1: प्रेक्षणों के वर्गों का स्तम्भ बनायें अर्थात् x_i^2

चरण 2: $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ प्राप्त करें

चरण 3: उपरोक्त सूत्र में $\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ तथा $\sum_{i=1}^{n} x_i$ के मान रखने पर हमें σ^2 प्राप्त होगा।

चरण 4: σ^2 का धनात्मक वर्गमूल लेने पर σ प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 17.11. इस पाठ का उदाहरण 17.10 लीजिए और उपरोक्त विधि से प्रसरण और मानक विचलन पुन: परिकलित कीजिए।

हल :

x_i	x_i^2
7	49
10	100
12	144
13	169
15	225
20	400
21	441
28	784
29	841
35	1225
190	4378

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n}}{n} = \frac{4378 - \frac{(190)^2}{10}}{10}$$

$$= \frac{4378 - 3610}{10} = \frac{768}{10} = 76.8$$

और $\qquad \sigma = +\sqrt{76.8} = 8.76$ (लगभग)

हमें प्रत्येक विधि द्वारा σ^2 और σ का वही मान प्राप्त होता है।

17.8 वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण विधि (I)

हमें k वर्ग और उनके संगत बारंबारताएं दी गई हैं। हम वर्गीकृत आंकड़ों के प्रसरण और मानक विचलन को क्रमश: σ_g^2 और σ_g द्वारा व्यक्त करेंगे। सूत्र नीचे दिया गया है :

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{K}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{K} f_i$$

और $$\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$$

$\sigma_g{}^2$ और σ_g परिकलित करने के लिए निम्नलिखित चरण प्रयोग किए जाते हैं। यह माना गया है कि माध्य को पहले से ही परिकलित किया जा चुका है।

चरण 1: दिए हुए वर्गों के लिए वर्ग अंकों का एक स्तंभ (कॉलम) बनाइये, x_1 से नामांकित कीजिए।

चरण 2: माध्य से वर्ग अंकों के विचलनों के लिए एक स्तम्भ (कॉलम) बनाएँ तथा $x_i - \bar{x}$ से नामांकित कीजिए। वास्तव में इन विचलनों का योग शून्य होना आवश्यक नहीं है, क्योंकि x_1 मूल प्रेक्षण नहीं है।

चरण 3: चरण (2) में प्राप्त विचलनों के वर्गों का एक स्तंभ (कॉलम) बनाइये अर्थात $(x_i - \bar{x})^2$ तथा इसे स्तंभ $(x_i - \bar{x})^2$ में लिखिए।

चरण 4: चरण (3) में प्रत्येक प्रविष्टि को संगत बारंबारता से गुणा करके हम $f_i(x_i - \bar{x})^2$ प्राप्त करते हैं।

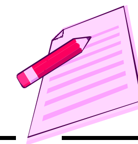
चरण 5: चरण (4) में स्तंभ (कॉलम) का योग ज्ञात कीजिए । हम $\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]$ प्राप्त करते हैं।

चरण 6: चरण (5) में प्राप्त योग को N (बारंबारता की कुल संख्या) से विभाजित करें। हम $\sigma_g{}^2$ प्राप्त करते हैं।

चरण 7: $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$

उदाहरण 17.12. गेहूं की एक नई किस्म के प्रभाव की जांच के अध्ययन में, 50 प्रयोगिक खेतों के लिए एक प्रयोग किया गया और निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

प्रति हेक्टेयर उत्पादन (क्विटल में)	खेतों की संख्या
31 – 35	2
36 – 40	3
41 – 45	8
46 – 50	12
51 – 55	16
56 – 60	5
61 – 65	2
66 – 70	2



प्रति हैक्टेयर माध्य उत्पादन 50 क्विंटल है। उपरोक्त वितरण के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल :

प्रति हेक्टेयर उत्पादन (क्विंटल में)	खेतों की संख्या	वर्ग चिन्ह	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i (x_i - \bar{x})^2$
31 – 35	2	33	– 17	289	578
36 – 40	3	38	– 12	144	432
41 – 45	8	43	– 7	49	392
46 – 50	12	48	– 2	4	48
51 – 55	16	53	+3	9	144
56 – 60	5	58	+8	64	320
61 – 65	2	63	+13	169	338
66 – 70	2	68	+18	324	648
योग	50				2900

इस प्रकार $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left[f_i (x_i - \bar{x})^2\right]}{N} = \dfrac{2900}{50} = 58$ और $\sigma_g = +\sqrt{58} = 7.61$ (लगभग)

17.9 वर्गीकृत आंकड़ों का मानक विचलन और प्रसरण विधि (II)

यदि $\bar{x}$ का मान न दिया गया हो और या $\bar{x}$ का मान दशमलव भिन्न हो तो उस स्थिति में गणना बहुत कठिन हो जाती है। तब हम σ_g^2 की गणना के लिए एक अन्य सूत्र का उपयोग करते हैं जो निम्न है:

$$\sigma_g^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i x_i^2\right] - \dfrac{\left(\sum_{i=1}^{k}[f_i x_i]\right)^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

और $$\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$$

और इस प्रकार इस विधि द्वारा $\sigma_g{}^2$ और σ_g के परिकलन में निम्नलिखित चरण प्रयोग में लाए जाते हैं।

चरण 1: दिए हुए वर्ग के अंकों का एक स्तंभ बनाइये, x_1 से नामांकित कीजिए।

चरण 2: प्रत्येक वर्ग अंक का संगत बारंबारता के साथ गुणनफलन ज्ञात कीजिए। $f_1 x_1$ शीर्षक से गुणनफल स्तंभ (कॉलम) में लिखिए।

चरण 3: चरण (2) में प्राप्त प्रविष्टि जोड़ें। हम $\sum_{i=1}^{k}(f_i x_i)$ प्राप्त करते हैं।

चरण 4: वर्ग अंकों के वर्ग के लिए एक स्तम्भ (कॉलम) बनाइये, x_i^2 से नामांकित कीजिए।

चरण 5: चरण (4) में प्रत्येक प्रविष्टि का संगत बारंबारता के साथ गुणनफल ज्ञात कीजिए। हम ${f_i x_i}^2$ प्राप्त करते हैं।

चरण 6: चरण (5) में प्राप्त प्रविष्टियों का योग कीजिए। हम $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$ प्राप्त करते हैं।

चरण 7: $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$, N और $\left(\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i\right)\right)$ के मान सूत्र में प्रतिस्थापित कीजिए और ${\sigma_g}^2$ प्राप्त कीजिए।

चरण 8: $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$.

उदाहरण 17.13. उदाहरण 17.12 के लिए प्रसरण और मानक विचलन उपरोक्त विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

हल :

उत्पादन प्रति हैक्टेअर (क्विन्टल में)	f_i	x_i	$f_i x_i$	${x_i}^2$	${f_i x_i}^2$
31 – 35	2	33	66	1089	2178
36 – 40	3	38	114	1444	4332
41 – 45	8	43	344	1849	14792
46 – 50	12	48	576	2304	27648
51 – 55	16	53	848	2809	44944
56 – 60	5	58	290	3364	16820
61 – 65	2	63	126	3969	7938
66 – 77	2	68	136	4624	9248
योग	50		2500		127900

सूत्र में $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i^2\right)$, N और $\sum_{i=1}^{k}\left(f_i x_i\right)$ के मानों का प्रतिस्थापन करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\sigma_g^2 = \frac{127900 - \frac{(2500)^2}{50}}{50} = \frac{2900}{50} = 58 \text{ और } \sigma_g = +\sqrt{58} = 7.61 \quad (\text{लगभग})$$

पुनः हम पाते हैं कि प्रत्येक विधि से हल करने पर हमें ${\sigma_g}^2$ मान वहीं प्राप्त होता है।

देखें आपने कितना सीखा 17.5

1. रोगियों के एक समूह पर एक दवाई के प्रभाव का अध्ययन करने में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

राहत का प्रतिशत %	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
रोगियों की संख्या	10	10	25	15	40

2. एक शहर में पहले बच्चे के जन्म पर माताओं की आयु का अध्ययन करने पर निम्नलिखित आंकड़े उपलब्ध थे :

पहले बच्चे के जन्म पर आयु (वर्षों में)	18 – 20	20 – 22	22 – 24	24 – 26	26 – 28	28 – 30	30 – 32
माताओं की संख्या	130	110	80	74	50	40	16

प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 30 कर्मचारियों का दैनिक वेतन नीचे दिया गया है:

दैनिक वेतन (रुपए में)	0 – 50	50 – 100	100 – 150	150 – 200	200 – 250	250 – 300
कर्मचारियों की संख्या	3	4	5	7	8	3

उपरोक्त आंकड़ों के लिए मानक विचलन और प्रसारण ज्ञात कीजिए।

17.10 विचलन और प्रसरण पद विचलन विधि

उदाहरण 17.12 में हमने देखा कि परिकलन बहुत ही जटिल थे। परिकलनों को सरल बनाने के लिए हम एक अन्य विधि का प्रयोग करेंगे जो पद विचलन विधि कहलाती है। चूंकि अधिकांश बारंबारता बंटनों जिन पर हम विचार करेगें उनके वर्ग बराबर हैं। आइए वर्ग माप (class size) को h द्वारा दर्शाएं। अब हम यादृच्छिक चुने गए a से प्रत्येक वर्ग चिन्ह (class-mark) का न केवल विचलन लें, परन्तु प्रत्येक विचलनको h से विभाजित भी करें।

माना $$u_i = \frac{x_i - a}{h} \qquad .....(1)$$

तब $$x_i = hu_i + a \qquad .....(2)$$

हम जानते हैं कि $$\overline{x} = h\overline{u} + a \qquad .....(3)$$

(2) से (3) को घटाने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x_i - \overline{x} = h(u_i - \overline{u}) \qquad .....(4)$$

(4) में दोनों तरफ का वर्ग करने पर f_1 से गुणा कीजिए और k योग प्राप्त कीजिए। हम प्राप्त करते हैं:

$$\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \overline{x})^2\right] = h^2\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \overline{u})^2\right] \qquad .....(5)$$

समीकरण (5) में दोनों तरफ को N से भाग दें। हम प्राप्त करते हैं:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(x_i - \overline{x})^2\right]}{N} = \frac{h^2}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i(u_i - \overline{u})^2\right]$$

अर्थात् $$\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2 \qquad .....(6)$$

जहां $\sigma_g{}^2$ मूल आंकड़ों का प्रसरण है और $\sigma_u{}^2$ कोडित आंकड़ों का प्रसरण या कोडित प्रसरण है। $\sigma_u{}^2$ का मान उस सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है जिसमें माध्य आता है अर्थात

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}\left[f_i\,(u_i - \bar{u})^2\right] \quad , \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad .....(7)$$

$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left[f_i u_i^2\right] - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k}[f_i u_i]\right)^2}{N}}{N}, \qquad N = \sum_{i=1}^{k} f_i \qquad .....(8)$$

उदाहरण 17.14. हम फिर से उदाहरण 17.12 को लेते हैं और कोडित (coded) प्रसरण का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात करते हैं।

हल : यहां $h = 5$ और माना $a = 48$.

पैदावार प्रति हैक्टेयर (क्विंटल में)	खेतों की संख्या f_i	वर्ग चिन्ह x_i	$u_i = \frac{x_i - 48}{5}$	$f_i u_i$	u_i^2	$f_i u_i^2$
31 – 35	2	33	–3	–6	9	18
36 – 40	3	38	–2	–6	4	12
41 – 45	8	43	–1	–8	1	8
46 – 50	12	48	0	0	0	0
51 – 55	16	53	+1	16	1	16
56 – 60	5	58	+2	10	4	20
61 – 65	2	63	+3	6	9	18
66 – 70	2	68	+4	8	16	32
योग	50			20		124

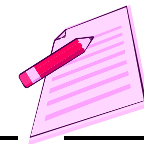
अतः
$$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i u_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{k} f_i u_i\right)^2}{N}}{N} = \frac{124 - \frac{(20)^2}{50}}{50} = \frac{124 - 8}{50} = \frac{58}{25}$$

मूल आकड़ों का प्रसरण $\sigma_x^2 = h^2\sigma_u^2 = 25 \times \frac{58}{25} = 58$ और $\sigma_x = +\sqrt{58} = 7.61$ (लगभग)

हम वास्तव में वही प्रसरण प्राप्त करते हैं और इस प्रकार पहले जैसा मानक विचलन भी।

उदाहरण 17.15. 230 व्यक्तियों के वेतन को दिखाने वाले निम्नलिखित बंटन के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

वेतन (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या	वेतन (रुपयों में)	व्यक्तियों की संख्या
70 – 80	12	110 – 120	50
80 – 90	18	120 – 130	45
90 – 100	35	130 – 140	20
100 – 110	42	140 – 150	8



हल :

वेतन (रुपये में)	व्यक्तियों की संख्या f_i	वर्ग चिन्ह x_i	$u_i = \frac{x_i - 105}{10}$	u_i^2	$f_i u_i$	$f_i u_i^2$
70 – 80	12	75	–3	9	–36	108
80 – 90	18	85	–2	4	–36	72
90 – 100	35	95	–1	1	–35	35
100 – 110	42	105	0	0	0	0
110 – 120	50	115	+1	1	50	50
120 – 130	45	125	+2	4	90	180
130 – 140	20	135	+3	9	60	180
140 – 150	8	145	+4	16	32	128
योग	230				125	753

$$\sigma^2 = h^2\left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i u_i^2\right] - \left(\frac{1}{N}\sum\left[f_i u_i\right]\right)^2\right]$$

$$= 100\left[\frac{753}{230} - \left(\frac{125}{230}\right)^2\right] = 100\,(3.27 - 0.29) = 298$$

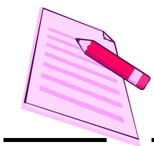
इसलिए मानक विचलन $\sigma = +\sqrt{298} = 17.3$ (लगभग)

देखें आपने कितना सीखा 17.6

1. नीचे दिए गए आंकड़े एक आटा मिल के 400 कर्मचारियों की साप्ताहिक आय को दर्शाते हैं:

साप्ताहिक आय (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या
80 – 100	16
100 – 120	20
120 – 140	25
140 – 160	40
160 – 180	80
180 – 200	65
200 – 220	60
220 – 240	35
240 – 260	30
260 – 280	20
280 – 300	9

पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।



टिप्पणी

2. एक शहर के एक स्कूल में काम करने वाले अध्यापकों की आयु के आंकड़े नीचे दिए गए हैं:

आयु (वर्षों में)	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40
अध्यापकों की संख्या	25	110	75	120
आयु (वर्षों में)	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60
अध्यापकों की संख्या	100	90	50	30

पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए।

3. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए पद विचलन विधि का प्रयोग करते हुए प्रसरण और मानक विचलन परिकलित कीजिए :

आयु (वर्षों में)	25 – 30	30 – 35	35 – 40
व्यक्तियों की संख्या	70	51	47
आयु (वर्षों में)	40 – 50	45 – 50	50 – 55
व्यक्तियों की संख्या	31	29	22

17.11 प्रसरण और मानक विचलन के गुण

गुण I: प्रसरण मूल बिन्दु के परिवर्तन से स्वतन्त्र है।

इस गुण को सत्यापित करने के लिए हम नीचे दिए गए उदाहरण को लेते हैं।

उदाहरण 17.16. एक विशेष परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं:

10 12 15 12 16 20 13 17 15 10

बाद में यह निश्चित किया गया कि प्रत्येक विद्यार्थी को 5 अतिरिक्त अंक प्रदान किए जाएगें। इन दोनों स्थितियों में प्रसरण और मानक विचलन की तुलना करो।

हल : स्थिति-I

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
10	2	20	– 4	16	32
12	2	24	– 2	4	8
13	1	13	– 1	1	1
15	2	30	1	1	2
16	1	16	2	4	4
17	1	17	3	9	9
20	1	20	6	36	36
योग	10	140			92

यहां
$$\bar{x} = \frac{140}{10} = 14$$

$$\text{प्रसरण} = \frac{\sum\left[f_i(x_i - \bar{x})^2\right]}{10} = \frac{92}{10} = 9.2$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{9.2} = 3.03$$

स्थिति II : (प्रत्येक x_1 में 5 अंक जोड़ने पर)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
15	2	30	−4	16	32
17	2	34	−2	4	8
18	1	18	−1	1	1
20	2	40	1	1	2
21	1	21	2	4	4
22	1	22	3	9	9
25	1	25	6	36	36
योग	10	190			92

$$\bar{x} = \frac{190}{10} = 19$$

$$\therefore \quad \text{प्रसरण} = \frac{92}{10} = 9.2$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{9.2} = 3.03$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि यदि मूल बिन्दु को परिवर्तित कर दिया जाए तो दिए गए आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन में कोई परिवर्तन नहीं होता अर्थात यदि कोई स्थिरांक प्रक्षेणों में जोड़ दिया जाए तो प्रसरण और मानक विचलन में कोई अन्तर नहीं आता।

गुण II : प्रसरण पैमाने के परिवर्तन से स्वतन्त्र नहीं है।

उदाहरण 17.17. उपरोक्त उदाहरण में यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा कर दिया जा, तब प्रसरण और मानक विचलन में होने वाले परिवर्तन की विवेचना कीजिए।

हल : उपरोक्त स्थिति (1) में हमने देखा

प्रसरण $= 9.2$

मानक विचलन $= 3.03$

अब हम प्रसरण और मानक विचलन परिकलित करते हैं, जब प्रत्येक प्रेक्षण को 2 से गुणा किया जाए।

x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f_i(x_i - \bar{x})^2$
20	2	40	−8	64	128
24	2	48	−4	16	32
26	1	26	−2	4	4
30	2	60	2	4	8
32	1	32	4	16	16
34	1	34	6	36	36
40	1	40	12	144	144
	10	280			368

$$\bar{x} = \frac{280}{10} = 28$$

$$\text{प्रसारण} = \frac{368}{10} = 36.8$$

$$\text{मानक विचलन} = +\sqrt{36.8} = 6.06$$

यहां हम देखते हैं कि प्रसरण-वास्तविक प्रसरण का चार गुना होता है। परिणामस्वरूप मानक विचलन वास्तविक मानक विचलन का दुगुना होता है।

इसी प्रकार हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यदि प्रत्येक प्रेक्षण को किसी स्थिरांक से विभाजित किया जाए तब नए प्रेक्षण का प्रसरण उसी स्थिरांक के वर्ग से विभाजित हो जाता है। परिणामस्वरूप नए प्रेक्षण का मानक विचलन उसी स्थिरांक से विभाजित हो जाता है।

गुण III : सिद्ध कीजिए कि मानक विचलन न्यूनतम संभव माध्य वर्ग विचलन का वर्गमूल होता है।

हल: माना $\overline{x} - a = d$

परिभाषा से हमें प्राप्त हुआ

$$s^2 = \frac{1}{N}\sum\left[f_i\,(x_i - a)^2\right] = \frac{1}{N}\sum\left[f_i\,(x_i - \overline{x} + \overline{x} - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\left[(x_i - \overline{x})^2 + 2(x_i - \overline{x})(\overline{x} - a) + (\overline{x} - a)^2\right]$$

$$= \frac{1}{N}\sum f_i\,(x_i - \overline{x})^2 + \frac{2}{N}(\overline{x} - a)\sum f_i\,(x_i - \overline{x}) + \frac{(\overline{x} - a)^2}{N}\sum f_i$$

$$= \sigma^2 + 0 + d^2$$

($\because$ माध्य से विचलनों का बीजीय योग शून्य होता है)

या $$s^2 = \sigma^2 + d^2$$

स्पष्टत: s^2 न्यूनतम होगा जब d=0अर्थात $a = \overline{x}$ अत: माध्यवर्ग विचलन का वर्गमूल (root mean square Deviation) न्यूनतम होता है जब विचलनों की माप माध्य से की जाती है अर्थात् मानक विचलन माध्य वर्ग विचलन का वर्गमूल होता है।

गुण IV : दो (n_1 और n_2 संख्याओं वाले) समुच्चयों का उनके माध्य क्रमश: m_1 और m_2 से मापा गया। मानक विचलन σ_1 और σ_2 है।यदि दानों समुच्चयों को इकट्ठा कियाजाए अर्थात् $(n_1 + n_2)$ संख्याएं हों तो माध्य m से मापा गया मानक विचलन σ, निम्न द्वारा प्राप्त होता है :

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

उदाहरण 17.18. दो प्रतिदर्शों के मापों 50 और 100 के माध्य क्रमश: 54.1 और 50.3 हैं तथा मानक विचलन 8 और 7 हैं। दोनों प्रतिदर्शों को इकट्ठा करने पर 150 माप वाले प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : यहां हमें दिया है

$$n_1 = 50, n_2 = 100, m_1 = 54.1, m_2 = 50.3$$

$$\sigma_1 = 8 \text{ और } \sigma_2 = 7$$

$$\sigma^2 = \frac{n_1\sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{(n_1+n_2)} + \frac{n_1 n_2}{(n_1+n_2)^2}(m_1 - m_2)^2$$

$$= \frac{(50\times 64)+(100\times 49)}{150} + \frac{50\times 100}{(150)^2}(54.1-50.3)^2$$

$$= \frac{3200+4900}{150} + \frac{2}{9}(3.8)^2 = 57.21$$

इसलिए $\sigma = 7.56$ (लगभग)

उदाहरण 17.19. समान्तर श्रेढ़ी $a, a+d, a+2d, \ldots\ldots, a+2n.d$ के माध्य से माध्य विचलन और मानक विचलन ज्ञात कीजिए और यह सिद्ध कीजिए कि बाद वाला पहले से बड़ा है।

हल : समान्तर श्रेढ़ी में पदों की संख्या $(2n+1)$ है।

$\therefore$ $\bar{x} = a + nd$

माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{1}{(2n+1)}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\left|(a+rd)-(a+nd)\right|$

$$= \frac{1}{(2n+1)}.2\left[nd + (n-1)d + \ldots\ldots + d\right]$$

$$= \frac{2}{(2n+1)}\left[1+2+\ldots..+(n-1)+n\right]d$$

$$= \frac{2n(n+1)}{(2n+1)2}.d = \frac{n(n+1)d}{(2n+1)} \qquad \ldots..(1)$$

अब $\sigma^2 = \dfrac{1}{(2n+1)}\displaystyle\sum_{r=0}^{2n}\left[(a+rd)-(a+nd)\right]^2$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)}\left[n^2 + (n-1)^2 + \ldots. + 2^2 + 1^2\right]$$

$$= \frac{2d^2}{(2n+1)}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)d^2}{3}$$

इसलिए $\sigma = d.\sqrt{\left(\dfrac{n(n+1)}{3}\right)} \qquad \ldots..(2)$

हमें प्राप्त है $(2) > (1)$

यदि $d\sqrt{\left(\dfrac{n(n+1)}{3}\right)} > \dfrac{n(n+1)}{(2n+1)}d$

या यदि $(2n+1)^2 > 3n(n+1)$

या यदि $n^2 + n + 1 > 0$, जो कि $n > 0$ के लिए सत्य है।

यही परिणाम है।

उदाहरण 17.20. हमें यह दिखाना है कि किसी विविक्त बंटन के लिए मानक विचलन, माध्य से माध्य विचलन से कम नहीं होता।

हल : हमें दिखाना है कि

मानक विचलन $\geq$ माध्य से माध्य विचलन

या (मानक विचलन)^2 $\geq$ (माध्य से माध्य विचलन)^2

अर्थात् $$\frac{1}{N}\sum\left[f_i(x_i-\bar{x})^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i\left|(x_i-\bar{x})\right|\right]\right]^2$$

या $$\frac{1}{N}\sum\left[f_i d_i^2\right] \geq \left[\frac{1}{N}\sum\left[f_i\left|d_i\right|\right]\right]^2, \text{ यहाँ } d_i = x_i - \bar{x}$$

या $$N\sum\left(f_i d_i^2\right) \geq \left[\sum\{f_i\left|d_i\right|\}\right]^2$$

या $$(f_1+f_2+\ldots)\left(f_1 d_1^2 + f_2 d_2^2 + \ldots\right) \geq \left[f_1\left|d_1\right| + f_2\left|d_2\right| + \ldots\right]^2$$

या $$f_1 f_2\left(d_1^2 + d_2^2\right) + \ldots \geq 2 f_1 f_2\, d_1 d_2 + \ldots$$

या $$f_1 f_2 (d_1 - d_2)^2 + \ldots \geq 0$$

जो कि पूर्ण वर्ग होने के कारण सत्य है।

17.12 दो समान माध्य वाले बारम्बारता बंटनों का विश्लेषण

दो श्रृंखलाओं की विचरणता की तुलना तभी की जा सकती है जब विचरण की माप निरपेक्ष तथा इकाई से स्वतंत्र होती है। इसके लिए विचरण गुणांक (C.V.) प्राप्त करते हैं जिसे निम्नलिखित प्रकार से परिभाषित किया गया है :

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.)} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100, \bar{x} \neq 0$$

जहाँ σ तथा $\bar{x}$ क्रमशः आँकड़ों के मानक विचलन तथा माध्य हैं। दो श्रृंखलाओं की विचरणता जानने के लिए उनके विचरण गुणांक की तुलना की जाती है। श्रृंखला में, बड़े विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को दूसरी से अधिक विचरण या बिखराव वाली श्रृंखला कहते हैं। कम विचरण गुणांक वाली श्रृंखला को दूसरे से अधिक संगत कहते हैं।

समान माध्य वाली श्रृंखलाओं के लिए, हम प्राप्त कर सकते हैं

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.) (पहला बंटन)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 \qquad \ldots(1)$$

$$\text{विचरण गुणांक (C.V.) (दूसरा बंटन)} = \frac{\sigma_2}{\bar{x}} \times 100 \qquad \ldots(2)$$

जहाँ σ_1, σ_2 क्रमशः पहले और दूसरे बंटन के मानक विचलन, $\bar{x}$ बंटनों का समान माध्य है।

(1) और (2) से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दो विचरण गुणांकों की तुलना केवल σ_1 तथा σ_2 के मानों के आधार पर कर सकते हैं।

उदाहरण 17.21. दो बंटनों के मानक विचलन 21 तथा 14 है और उनका समान माध्य 35 है कौन से बंटन का अधिक विचरण होगा?

हल : मान लीजिए σ_1 = पहली श्रृंखला का मानक विचलन = 21

σ_2 = दूसरी श्रृंखला का मानक विचलन = 14

$$\bar{x} = 35$$

$$\text{C.V. (श्रृंखला I)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 = \frac{21}{35} \times 100 = 60$$

$$\text{C.V. (श्रृंखला II)} = \frac{\sigma_1}{\bar{x}} \times 100 = \frac{14}{35} \times 100 = 40$$

श्रृंखला I की C.V. > श्रृंखला II की C.V.

$\Rightarrow$ मानक विचलन = 21, वाली श्रृंखला का अधिक विचरण है।

उदाहरण 17.22. दो कारखानों A तथा B के कर्मचारियों को दिए गए मासिक वेतन तथा अन्य आंकड़े नीचे दिये गये हैं :

	कारखाना A	**कारखाना B**
मासिक वेतनों का माध्य	₹ 15550	₹ 15550
वेतनों के बंटनों का प्रसरण	100	121

व्यक्तिगत वेतन में किस कारखाने (A या B) में अधिक विचरण है?

हल : दिया है

$$\sigma_A = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{100} = 10$$

$$\sigma_B = \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{121} = 11$$

$$\bar{x} = ₹\ 15550$$

अब, $$\text{C.V. (A)} = \frac{\sigma_A}{\bar{x}} \times 100 = \frac{10}{15550} \times 100 = 0.064$$

$$\text{C.V.(B)} = \frac{\sigma_B}{\bar{x}} \times 100 = \frac{11}{15550} \times 100 = 0.07$$

वास्तव में C.V. (B) > C.V.(A)

अतः कारखाने B में व्यक्तिगत वेतनों में अधिक विचरण है।

उदाहरण 17.23. नीचे दी गयीं श्रृंखला X और Y में कौन अधिक संगत है?

X	58	52	50	51	49	35	54	52	53	56
Y	101	104	103	104	107	106	105	105	107	108

हल : दिये गये आँकड़ों से हम निम्नलिखित सारणी प्राप्त करते हैं :

X	Y	$D_i = X - \bar{X}$	D_i^2	$d_i = Y - \bar{Y}$	d_i^2
58	101	7	49	–4	16
52	104	1	1	–1	1
50	103	–1	1	–2	4
51	104	0	0	–1	1
49	107	–2	4	2	4
35	106	–16	256	1	1
54	105	3	9	0	0
52	105	1	1	0	0
53	107	2	4	2	4
56	108	5	25	3	9
$\Sigma X = 510$	$\Sigma Y = 1050$		$\Sigma D_i^2 = 350$		$\Sigma d_i^2 = 40$

अब,
$$\bar{X} = \frac{\Sigma X_i}{10} = \frac{510}{10} = 51$$

$$\bar{Y} = \frac{\Sigma Y_i}{10} = \frac{1050}{10} = 105$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma D_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{350}{10}} = 5.9$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma(Y-\bar{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\Sigma d_i^2}{N}} = \sqrt{\frac{40}{10}} = 2$$

अब,
$$\text{C.V.(X)} = \frac{\sigma_X}{X} \times 100 = \frac{5.9}{51} \times 100 = 11.5$$

$$\text{C.V.(Y)} = \frac{\sigma_Y}{Y} \times 100 = \frac{2}{105} \times 100 = 1.9$$

वास्तव में C.V.(Y) < C.V.(X) $\therefore$ श्रृंखला Y अधिक संगत है।

देखें आपने कितना सीखा 17.7

1. निम्नलिखित आंकड़ों से बताइए कि इनमें से किस में अधिक विचरण हैं

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
भाग A	9	10	40	33	8
भाग B	8	15	43	25	9

2. कौन–सा कारखाना मजदूरों को अधिक संगत वेतन देता है :

वेतन (₹ में) प्रतिदिन	100-150	150-200	200-250	250-300	300-350
कारखाना A	35	45	50	42	28
कारखाना B	16	50	55	13	46

3. दो विद्यालय एक ही वर्ष में बोर्ड परीक्षा का परिणाम निम्नलिखित दर्शाते हैं

	विद्यालय A	विद्यालय B
औसत प्राप्तांक	250	225
सम्मिलित छात्रों की संख्या	62	62
अंकों के बंटन का प्रसरण	2.25	2.56

व्यक्तिगत अंकों में किस विद्यालय का विचरण अधिक है?

आइये दोहराएँ

- परास दिए गए आंकड़ों के सब से बड़े और सब से छोटे मूल्य के बीच का अन्तर

- माध्य से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (f_i |x_i - \bar{x}|)}{N}$ जहां $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} (f_i x_i)$

- माध्यक से माध्य विचलन $= \dfrac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - M|}{N}$ जहां $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$, $M = l + \dfrac{\frac{N}{2} - C}{f} x_i$

- प्रसरण $\left(\sigma^2\right) = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}$ (यथा प्राप्त आंकड़ों के लिए)

- मानक विचलन $(\sigma) = +\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n}}$

- वर्गीकृत आंकड़ों के लिए प्रसरण $\sigma_g^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} \left[f_i (x_i - \bar{x})^2 \right]}{N}$, x_i वर्ग का मध्य चिन्ह है।

तथा $\sigma_x{}^2 = h^2 \sigma_u{}^2$ और $\sigma_u{}^2 = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{k} \left[f_i \left(u_i - \bar{u}^2 \right) \right]$

टिप्पणी

$$N = \sum_{i=1}^{k} f_i$$

या $$\sigma_u^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(f_i u_i^2\right) - \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\left(f_i u_i^2\right)\right]^2}{N}}{N}$$ जबकि $N = \sum_{i=1}^{k} f_i$

- वर्गीकृत आंकड़ों के लिए मानक विचलन $\sigma_g = +\sqrt{\sigma_g^2}$
- यदि दो बारंबारता बंटनों के माध्य समान हैं, तो बड़े विचरण गुणांक वाला बंटन दूसरे बंटन की तुलना में अधिक विचरण या बिखराव वाला होता है।

सहायक वेबसाइट

- *http:// en.wikipedia.org/wiki/Statistical_dispersion simon.cs.vt.edu/SoSci/converted/Dispersion_I/activity.html*

आइए अभ्यास करें

1. एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा 100 में से प्राप्त अंकों के निम्नलिखित आंकड़ों के लिए माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

   55 45 63 76 67 84 75 48 62 65

2. एक कारखाने के 50 मजदूरों की आय को दर्शाने वाले आंकड़े नीचे दिए गए हैं :

आय (रुपयों में):	1200	1300	1400	1500	1600	1800
मजदूरों की संख्या:	4	7	15	12	7	5

   माध्य विचलन परिकलित कीजिए।

3. एक कारखाने के 50 कर्मचारियों के प्रतिदिन का वेतन निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा दिया गया है:

वेतन (रुपयों में):	20–30	30–40	40–50	50–60
कर्मचारियों की संख्या	4	6	8	12
वेतन (रुपयों में):	60–70	70–80	80–90	90–100
कर्मचारियों की संख्या	7	6	4	3

   माध्य विचलन परिकलित कीजिए।

4. एक क्रिकेट खिलाड़ी के 50 पारियों के निम्नलिखित रनों (scores) के आंकड़ों के लिए औसत और माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

बनाए गए रन	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80
पारियों की संख्या	6	10	12	18
बनाए गए रन	80 – 100	100 – 120		
पारियों की संख्या	3	1		

5. एक परीक्षा में 10 विद्यार्थियों के गणित के अंक नीचे दिए गए हैं :

6 10 12 13 15 20 24 28 30 32

उपरोक्त आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

6. निम्नलिखित सारणी 10 अंडों के एक नमूने के द्रव्यमान (लगभग ग्राम में), दर्शाती है :

46 51 48 62 54 56 58 60 71 75

इस प्रतिदर्श के द्रव्यमानों का मानक विचलन परिकलित कीजिए।

7. एक कारखाने के 50 कर्मचारियों की साप्ताहिक आय (रुपयों में) नीचे दी गई है :

आय	400	425	450	500	550	600	650
कर्मचारियों की संख्या	5	7	9	12	7	6	4

उपरोक्त आंकड़ों का मानक विचलन परिकलित कीजिए।

8. निम्नलिखित आंकड़ों के लिए प्रसरण और मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
बारम्बरता	7	8	25	15	45

9. बंटन का मानक विचलन ज्ञात कीजिए जिसमें x के मान है।। 1,2,.....N। प्रत्येक की बारम्बारता एक है।

10. छात्रों की ऊँचाई तथा भार के लिए निम्नलिखित परिकलन किये गये हैं :

	भार	ऊँचाई
माध्य	52.5 किग्रा	160.5 सेमी
मानक विचलन	11.5	12.2

भार और ऊँचाई में से कौन अधिक विचरण दर्शाता है?

11. एक खिलाड़ी A (बौलर/गेंदबाज) द्वारा 20 मैचों में लिए गये विकेट निम्नलिखित हैं :

विकेटों की संख्या	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या	2	6	7	4	1

बौलर/गेंदबाज B के लिए, 20 मैचों में लिए गए विकेटों का माध्य 1.6 है साथ ही मानक विचलन 1.25 है कौन–सा खिलाड़ी अधिक संगत है?

निम्नलिखित बंटनों का माध्यक ज्ञात कीजिए (12-14) :

12.

x_i	14	20	26	29	34	46
f_i	4	6	7	8	9	6

13.

आयु (वर्षों में)	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
संख्या	8	7	9	11	5

14.

ऊँचाई (सेमी. में)	95-104	105-114	115-124	125-134	135-144
बच्चों की संख्या	10	8	18	8	16

माध्यक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए (15-18):

15.

x_i	5	15	25	35	45	55
f_i	5	23	30	20	16	6

16.

x_i	105	107	109	111	113	115
f_i	8	6	2	2	2	6

17.

आय (प्रतिमाह) ₹ ‘000' में	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25
सदस्यों की संख्या	5	6	12	14	26

18.

आयु (वर्षों में)	0-5	6-10	11-15	16-20	21-25	26-30	31-35	36-40
सदस्यों की संख्या	5	6	12	14	26	32	16	29

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 17.1

1. 15
2. 22
3. 9.4
4. 15.44
5. 13.7
6. 136
7. 5.01
8. 14.4

देखें आपने कितना सीखा 17.2

1. 16
2. 15
3. 15.357 अंक
4. 28 वर्ष

देखें आपने कितना सीखा 17.3

1. 1.85
2. 2.36
3. 3.73
4. 0.977

देखें आपने कितना सीखा 17.4

1. प्रसरण = 311, मानक विचलन = 17.63
2. प्रसरण = 72.9, मानक विचलन = 8.5
3. प्रसरण = 42.6, मानक विचलन = 6.53
4. मानक विचलन = 4
5. प्रसरण 13.14, मानक विचलन = 3.62
6. मानक विचलन = 17.6

देखें आपने कितना सीखा 17.5

1. प्रसरण = 734.96, मानक विचलन = 27.1
2. प्रसरण = 12.16, मानक विचलन = 3.49
3. प्रसरण = 5489, मानक विचलन = 74.09

देखें आपने कितना सीखा 17.6

1. प्रसरण = 2194, मानक विचलन = 46.84
2. प्रसरण = 86.5, मानक विचलन = 9.3
3. प्रसरण = 67.08, मानक विचलन = 8.19

देखें आपने कितना सीखा 17.7

1. विभाग A
2. कारखाना A
3. विद्यालय B

आइए अभ्यास करें

1. 9.4
2. 124.48
3. 15.44
4. 52, 19.8
5. प्रसरण = 72.29, मानक विचलन = 8.5
6. 8.8
7. प्रसरण = 5581.25, मानक विचलन = 74.7
8. प्रसरण = 840, मानक विचलन = 28.9

9. मानक विचलन $= \sqrt{\dfrac{N^2 - 1}{12}}$

10. भार

11. खिलाड़ी B

12. 29

13. 27.27

14. 121.16

15. 10.3

16. 3.38

17. 5.2

18. 0.62

18

यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाएँ

किसी क्रिकेट मैच के आरम्भ होने से पहले अपने दैनिक जीवन में हम देखते हैं कि दोनों टीमों के कप्तान एक सिक्का उछालते हैं। सिक्का उछालने की क्रिया के केवल दो परिणाम हो सकते हैं, चित या पट (यह अनुमान लगाकर कि सिक्का अपने किनारे पर खड़ा नहीं होगा) यदि एक पासे को उछालते हैं तो इस क्रिया में इसका कोई सा एक पृष्ठ अर्थात 1,2,3,4,5 या 6 ऊपर आ सकता है।

ऐसी क्रिया, जो परिणाम को दर्शाती है, को प्रयोग कहते हैं। प्राय: एक प्रयोग में कई परिणाम होते हैं, पर यह संयोग की बात है कि प्रयोग करते हुए कौन सा परिणाम सामने आ जाए। इस पाठ में हम विभिन्न प्रयोग तथा उनके परिणामों का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित करने में समर्थ हो जायेंगे :

- यादृच्छिक प्रयोग की परिभाषा देना तथा इसके उदाहरण देना
- प्रयोग में संयोग का कार्य बताना
- दिए गए प्रयोग के लिए प्रतिदर्श समष्टि (sample space) की परिभाषा लिखना
- कई प्रकार के परिणाम जैसे समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी, निश्शेष, स्वतन्त्र और निर्भर में अन्तर बताना

पूर्व ज्ञान

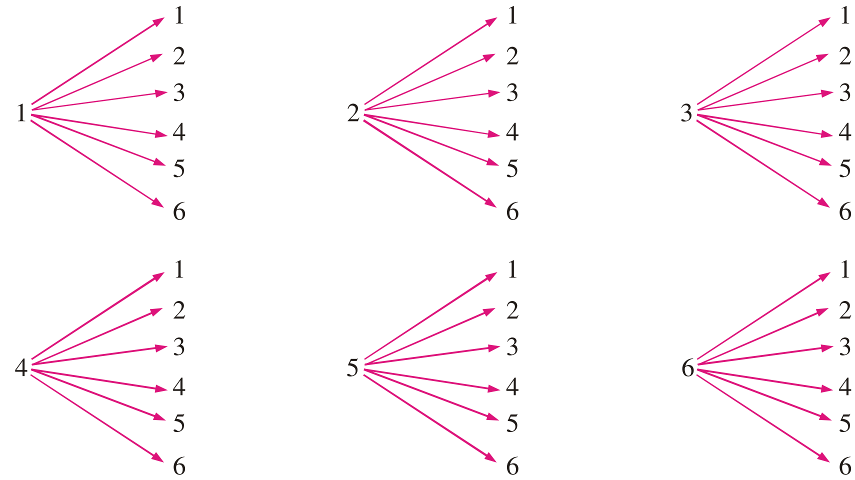
- प्रायिकता का मूल ज्ञान

18.1 यादृच्छिक प्रयोग

अब हम निम्नलिखित क्रियाओं पर विचार करते हैं :

1. एक सिक्का उछालिए और परिणाम देखिए, या तो चित (H) आएगा या पट (T) आएगा।
2. यदि हम एक पासे को, जिसके 6 फलक होते हैं, फेंकें तो 6 में से कोई एक फलक 1, 2, 3, 4, 5, 6 ऊपर आएगा।
3. एक के बाद एक दो सिक्के उछालिए और परिणामों को लिखिए। इसके चार परिणाम होंगे: HH,HT, TH, TT

4. यदि हम दो पासों को फेंकें तो 36 संभावित परिणाम होते हैं जिन्हें नीचे दिखाया गया है :



अर्थात परिणाम हैं (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6)

$$(2,1),(2,2),....,(2,6)$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$(6,1),(6,2),....,(6,6)$$

ऊपर लिखी क्रियाएं निम्नलिखित दो शर्तों को पूरा करती हैं :

(a) एक जैसी स्थितियों के लिए कोई भी क्रिया दोबारा हो सकती है।

(b) किसी भी क्रिया का परिणाम पहले से नहीं बताया जा सकता है।

ऐसी क्रिया (i) जो एक जैसी शर्तों के लिए दोबारा की जा सकती है और (ii) जिसका परिणाम पहले से ज्ञात न हो, को यादृच्छ प्रयोग कहते हैं।

उदाहरण 18.1. क्या अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकालना यादृच्छिक प्रयोग है।

हल : (a) यह क्रिया दोबारा हो सकती है क्योंकि ताश को बार-बार फेंट सकते हैं।

(b) यादृच्छिक 52 पत्तों में से कोई भी पत्ता निकल सकता है, इसलिए हमें पहले से परिणाम ज्ञात नहीं है।

अत: यह एक यादृच्छिक प्रयोग है।

उदाहरण 18.2. 100 कुर्सियों में से एक कुर्सी का चयन किसी वरीयता के बिना करना एक यादृच्छिक प्रयोग है। सिद्ध कीजिए ।

हल : (a) समान स्थितियों में प्रयोग को दोहराया जा सकता है।

(b) क्योंकि किसी कुर्सी का चयन बिना किसी वरीयता के है, इसलिए प्रत्येक कुर्सी के चयन का बराबर संयोग है। इसलिए हमें परिणाम पहले से ज्ञात नहीं है।

यह एक यादृच्छिक प्रयोग है

अब हम ऐसी क्रिया पर विचार करते हैं जो यादृच्छिक न हो।

1. मनीष का जन्म: यह ऐसी क्रिया है जो दोबारा नहीं हो सकती।

2. यदि 8 को 4 से केलकुलेटर पर गुणा करते हैं। यह क्रिया है जो दोबारा तो हो सकती है, पर पहले से हमें इसका परिणाम ज्ञात है, जो 32 है। अत: यह यादृच्छिक प्रयोग नहीं है।

18.2 सेम्पल स्पेस (प्रतिदर्श समष्टि)

यदि हम पासा फेंकें तो क्या परिणाम होगा? साफ है कि पासा फेंकने पर कोई एक फलक ऊपर आ सकता है। अत: प्रत्येक फलक का ऊपर आना एक संभव परिणाम है।

पासा फेंकने के परिणामों के समुच्चय को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

इस तरह एक सिक्का फेंकने के परिणामों का समुच्चय निम्न प्रकार होगा

$$S = \{H, T\}.$$

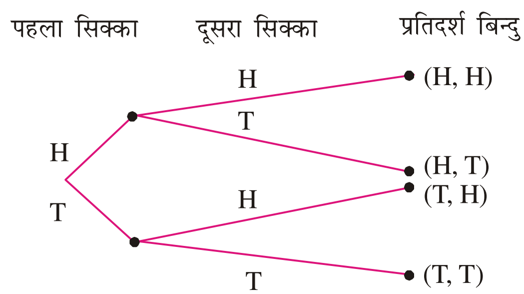
ऐसा समुच्चय जो निम्न गुणों को सन्तुष्ट करता है एक प्रतिदर्श समष्टि कहलाता है।

(i) समुच्चय का प्रत्येक अवयव किसी एक परिणाम को दर्शाता है।

(ii) परिणाम का कोई एक परीक्षण फल समुच्चय के सिर्फ एक अवयव के साथ अनुकूल होता है।
S को प्रयोग का सेम्पल स्पेस (Sample Space) कहते हैं तथा समुच्चय S के अवयवों को प्रतिदर्श बिन्दु कहते हैं।

उदाहरण 18.3. दो सिक्के एक साथ उछाले गए, प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल: मान H = चित और T = पट



$$S = \{ (H, H), (H, T), (T, H), (T, T) \}.$$

टिप्पणी:

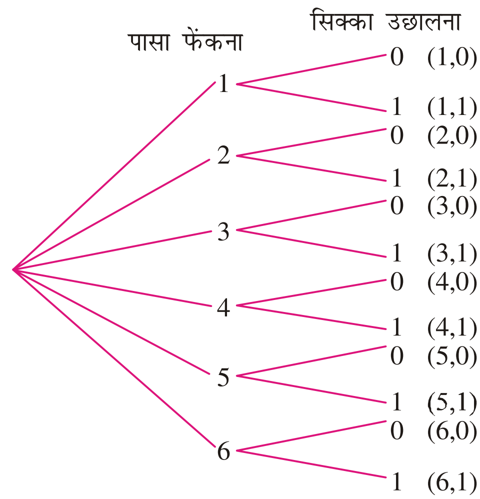
यदि दो सिक्के एक साथ उछाले जाऐं तो सेम्पल स्पेस

$$S = \{ H\,H, H\,T, T\,H, T\,T\}.$$

उदाहरण 18.4. एक प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए जिसमें पहले पासा फेंका जाता है और फिर सिक्का उछाला जाता है।

हल : पासा फेंकने के परिणाम होंगे। 1, 2, 3, 4, 5, 6 और सिक्का उछालने के परिणाम होंगे चित और पट ।

माना H (चित) = 0 और T (पट) = 1

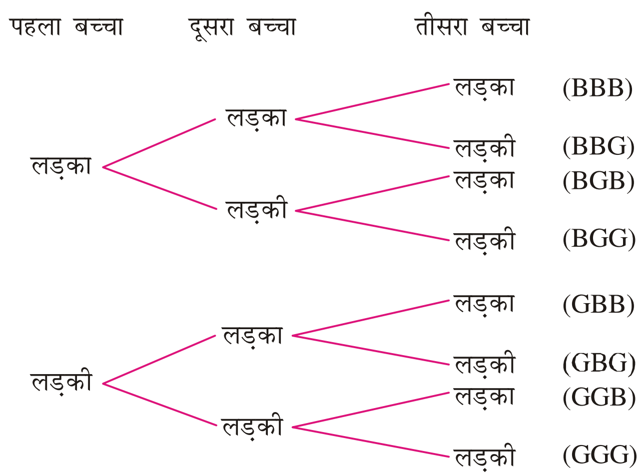


$$S = \{(1, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (4, 1), (5, 0), (5, 1), (6, 0), (6, 1)\}$$

$\therefore \quad n(S) = 6 \times 2 = 12$

उदाहरण 18.5. हम उन परिवारों को लेते हैं जिनमें 3 बच्चे हैं। हम प्रयोग करते हैं जिसमें हम तीनों बच्चों के लिंग के बारे में पूछते हैं। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

हल : माना लड़का B और लड़की G । तो निम्न चित्र बनाइए



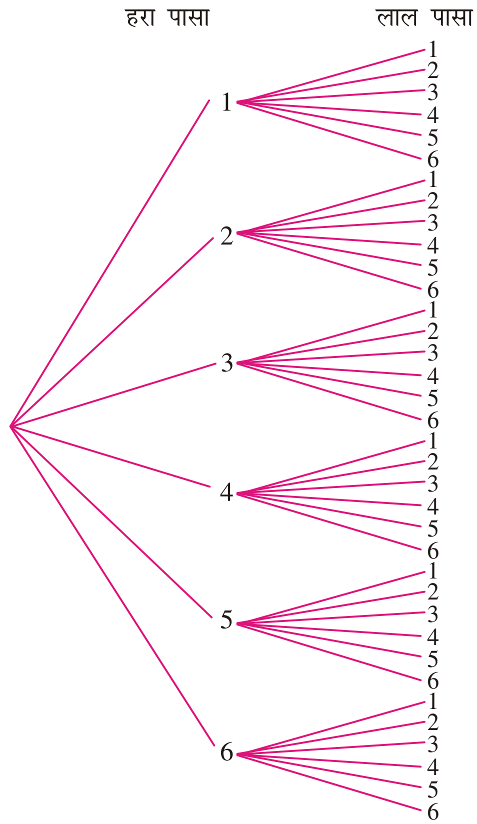
प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{BBB, BBG, BGB, BGG, GBB, GBG, GGB, GGG\}$$

इस प्रकार लिखने का एक लाभ है, हम प्रश्न पूछ सकते हैं क्या दूसरा बच्चा एक लड़की है: कितने परिवारों में पहला बच्चा लड़का हो सकता है। इस प्रकार के प्रश्नों का उत्तर आसानी से दिया जा सकता है।

उदाहरण 18.6. एक प्रयोग है जिसमें पहले हरा और लाल पासा फेंका गया। इसका प्रतिदर्श समिष्ट ज्ञात कीजिए।

हल : इस प्रयोग को हम वृक्ष चित्र द्वारा दिखा सकते हैं :



माना g_i और r_j अंक है (1 से 6) जो पासा हरा या लाल फेंकने पर ऊपर आते हैं तो इस प्रयोग का परिणाम एक क्रमित युग्म होगा। (g_i, r_j) यहां i और j, 1 से 6 तक कोई भी मान ले सकते हैं।

इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि होगा $S = \{(g_i, r_j) : 1 \le i \le 6, 1 \le j \le 6\}$.

गणना के नियम के अनुसार इस प्रतिदर्श समष्टि के 36 अवयव होंगे क्योंकि g और r के लिए 6,6 विकल्प हैं और $6 \times 6 = 36$

उदाहरण 18.7. निम्नलिखित प्रयोगों में प्रत्येक का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए :

(i) एक सिक्का तीन बार उछाला गया तथा प्रत्येक बार परिणाम नोट किया गया।

(ii) पांच खिलाड़ियों A,B,C,D तथा E में से एक मैच के लिए दो खिलाड़ियों को चुना गया।

(iii) छः बीज बोए गए तथा उगने वाले बीजों के संख्या को नोट किया गया।

(iv) एक सिक्का दो बार उछाला गया। यदि दूसरी बार उछालने पर चित आए तो एक पासा फेंका गया अन्यथा एक सिक्का उछाला गया।

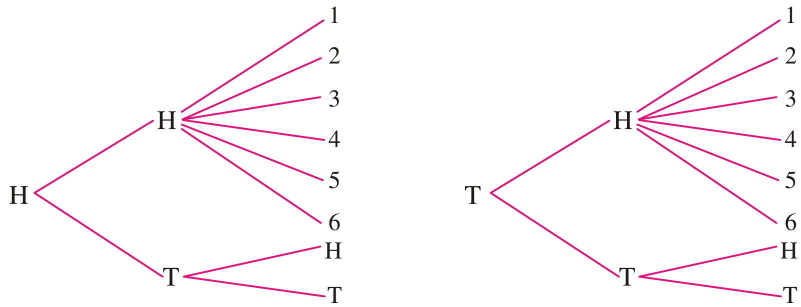
हल : (i) $S = \{TTT, TTH, THT, HTT, HHT, HTH, THH, HHH\}$

प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या है $2 \times 2 \times 2 = 8$

(ii) S= { AB, AC, AD, AE, BC, BD, BE, CD, CE, DE} यहां n (S) = 10

(iii) S = { 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6} यहां n (S) = 7

(iv) इस प्रयोग को हम निम्नलिखित वृक्ष चित्र द्वारा दिखा सकते हैं :



$\therefore$ S = {HH1, HH2, HH3, HH4, HH5, HH6, HTH, HTT, TH1, TH2,TH3,TH4, TH5, TH6, TTH, TTT}

अर्थात इस प्रयोग के 16 परिणाम हैं।

18.3 विभिन्न पदों की परिभाषा

(Event) घटना: सिक्का उछालने के प्रयोग में हम चाहते हैं कि चित आए, तो चित इस प्रयोग की घटना होगी।

पासा फेंकने के प्रयोग में यदि हम चाहते हैं कि सम संख्या आए तो इस प्रयोग का परिणाम होगा 2, 4 और 6 तथा यह एक घटना होगी।

हमने देखा कि ऐसे प्रयोग जो समान प्रतिबन्धों में करने पर एक परिणाम नहीं देते परन्तु परिणामों में से एक परिणाम देते हैं, प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं।

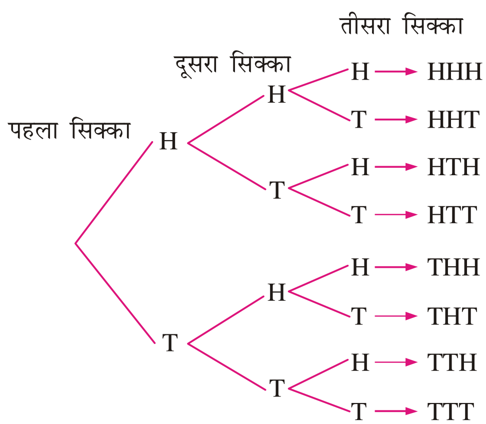
प्रतिदर्श समष्टि के कुछ निष्कर्ष जो किसी खास शर्त को सन्तुष्ट करते हैं परिणाम कहलाते हैं।

किसी परिणाम को हम A,B,C द्वारा दर्शाते हैं।

उदाहरण 18.8. एक प्रयोग E किया गया जिसमें 3 सिक्कों को एक साथ उछालते हैं। इस प्रयोग के संभव निष्कर्ष लिखिए और वे परिणाम घटनाएं लिखिए :

(i) जब चितों को संख्या पटों से ज्यादा हो (ii) जब दो चित आएँ

हल:



$$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$$

$$= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$$

माना E_1 परिणाम (घटना) है जिसमें चितों की संख्या पटों की संख्या से ज्यादा है।

तब $E_1 = \{w_1, w_2, w_3, w_5\}$

और E_2 वह घटना है जिसमें चित दो बार आता है।

$$E_2 = \{w_2, w_3, w_5\}$$

18.3.1 समप्रायिक घटनाएँ

किसी प्रयोग के निष्कर्ष समप्रायिक, होते हैं यदि दो में से किसी एक को वरीयता न दी जाए।

उदाहरण : 1. सिक्का उछालने के निष्कर्ष चित या पट समप्रायिक घटनाएँ हैं।

2. पासा फेंकने के परिणाम सभी 6 पृष्ठ भी समप्रायिक होते हैं।

3. पूरी ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकालना भी समप्रायिक परिणाम है।

18.3.2 परस्पर अपवर्जी घटनाएँ

वे घटनाएँ परस्पर अपवर्जी होती हैं जिनमें एक के घटित होने पर दूसरी घटित न हो।(एक ही प्रयोग में दो घटनाएँ एक साथ घटित न हों)

उदाहरण : (i) पासा फेंकने के प्रयोग में 6 फलक (1-6) परस्पर अपवर्जी हैं, क्योंकि एक बार पासा फेंकने पर एक ही फलक ऊपर आएगा तथा दूसरे किसी की संभावना समाप्त हो जाती है।

(ii) दो सिक्कों के उछालने में दोनों पट हों या कम से कम एक चित हो परस्पर अपवर्जी हैं। गणित की गणना के अनुसार घटनाएँ परस्पर अपवर्जी कहलाती हैं यदि इनका प्रतिच्छेदन एक रिक्त समुच्चय हो।

18.3.3 निश्शेष घटनाएँ

किसी एक गुण के आधार पर हम कुछ घटनाएँ एकत्र करते हैं। किसी प्रयोग के कितने भी निष्कर्ष हों, एकत्र की गई घटनाओं में से एक जरूर घटित होनी चाहिए।

ऐसी एकत्र की गई घटनाओं को निश्शेष घटनाएँ कहते हैं।

उदाहरण : 1 यदि पासा फेंका जाए तो यह जरूरी है कि या तो सम संख्या ऊपर आएगी या विषम संख्या आएगी अर्थात सम संख्या या विषम संख्या की घटनाएँ निश्शेष हैं।

2. यदि दो सिक्के फेंकें जाएं तो यह जरूरी है कि या तो चित आए या पट आए अर्थात या तो चित या पट आने की घटनाएँ निश्शेष हैं।

गणित की गणना के अनुसार एकत्र की गई घटनाएँ निश्शेष कहलाती हैं यदि इनके संघ का समुच्चय पूरा प्रतिदर्श समष्टि हो।

18.3.4 स्वतन्त्र और आश्रित घटनाएँ

घटनाओं का समुच्चय स्वतन्त्र कहलाता है यदि कुछ घटनाएँ घटित होती हैं और इनका असर दूसरी घटित घटनाओं पर नहीं होता। दूसरी ओर यदि एक घटित घटना का असर दूसरी घटना पर होता है तो ये घटनाएँ आश्रित घटनाएँ कहलाती हैं।

उदाहरण : बार-बार सिक्का उछालने की घटनाएँ स्वतंत्र होती हैं।

ताश में से एक पत्ता निकाला जाए और उसको वापस रख कर फिर एक पत्ता निकाला जाए तो ये स्वतंत्र घटनाएँ हैं। यदि एक पत्ता निकालने के बाद इसको वापस न रखें और दूसरा पत्ता निकालें तो यह निर्भर घटनाएँ होंगी।

देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. बिना किसी वरीयता के स्कूल के एक बच्चे का चयन करना एक यादृच्छिक प्रयोग है, सिद्ध कीजिए।
2. केलकुलेटर द्वारा दो संख्याओं का योग ज्ञात करना एक यादृच्छिक प्रयोग नहीं है, सिद्ध कीजिए।
3. एक समय में तीन सिक्के उछाले गए, इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
4. एक सिक्का तथा एक पासा दोनों उछाले गये। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
5. यदि दो पासे एक साथ फेंकें जाएं और ये जरूरी हो कि हर बार ऊपर वे फलक आएँ जिसमें 6 का अंक हो। क्या ये परस्पर अपवर्जी हैं ?
6. दो पासे एक साथ फेंकें गए घटनाएँ A, B, C, D हैं :

   A) पहले पासे पर सम संख्या का आना

   B) पहले पासे पर विषम संख्या का आना

   C) दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग < 7 आना

   D) दोनों पासों पर प्राप्त संख्याओं का योग > 7 आना।

   बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य

   (i) A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं।

   (ii) A तथा B परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष हैं।

   (iii) A तथा C परस्पर अपवर्जी हैं।

   (iv) A तथा D परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष हैं।
7. एक बक्से में 6 लाल, 4 सफेद और 5 नीली गेंदें हैं। इस बक्से से एक गेंद यादृच्छ रूप से निकाली गई। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए। इसमें कितने प्रतिदर्श बिन्दु हैं ?
8. एक बार दो पासे फेंकने के अवयव लिखिए और प्रतिदर्श बिन्दु भी लिखिए।
9. कुछ ऐसे परिवार हैं जिनमें सिर्फ 2 बच्चे हैं। इन परिवारों के पहले और दूसरे बच्चे के लिंग के बारे में पूछा जाता है। इसका प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।

आइये दोहराएँ

- ऐसी क्रिया जिसका कोई परिणाम हो उसे प्रयोग कहते हैं।
- एक ऐसी क्रिया, जो समान स्थितियों में दोबारा की जाये और जिसका परिणाम पहले से ज्ञात न हो, को यादृच्छिक प्रयोग कहते हैं।

- किसी यादृच्छिक प्रयोग के परिणामों के समुच्चय को प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं और इस समुच्चय के अवयवों को प्रतिदर्श समष्टि बिन्दु कहते हैं।
- प्रतिदर्श समष्टि के वे परिणाम, जो किसी शर्त को सन्तुष्ट करते हैं, घटना कहलाते हैं।
- उन घटनाओं को समप्रायिक कहते हैं जब किसी एक घटना के लिए दूसरी को वरीयता न दी जाए।
- यदि एक घटना के घटित होने से दूसरी घटना घटित नहीं होती तो ये परस्पर अपवर्जी घटनाएँ होती हैं।
- किसी परीक्षण के कुल परिणामों को निश्शेष घटनाएँ कहते हैं।
- घटनाओं का वह समुच्चय स्वतन्त्र कहलाता है जिसकी किसी घटना के घटित होने का प्रभाव दूसरी घटित घटना पर नहीं होता और यदि एक घटित घटना का असर दूसरी पर होती है, तो ये निर्भर घटनाएँ कहलाती हैं।

सहायक वेबसाइट

- *www.math.uah.edu/stat/prob/Events.html*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Experiment_(probability_theory)*

आइए अभ्यास करें

1. एक चाय सेट में चार कप और चार प्लेटें हैं। यदि कप प्लेटों पर यादृच्छ रूप से रखे जाएँ तो प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
2. यदि चार सिक्के उछाले जाएँ तो इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि लिखिए।
3. यदि एक के बाद एक n सिक्के उछाले जाएँ तो कितने प्रतिदर्श समष्टि अवयव बनेंगे।
   [संकेत : n = 1,2, 3,4, ...]
4. दो पासों को एक साथ उछाला गया। इसमें कितने प्रतिदर्श बिन्दु होंगे?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 18.1

1. दोनों गुण संतुष्ट होते हैं। 2. परिणाम का पूर्व ज्ञान हो सकता है?

3. S = {HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT}

4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T4, T6} 5. नहीं

6. (i) सत्य (ii) सत्य (ii) असत्य (iv) सत्य 7. 15

8. $$\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6)$$
$$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$$
$$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$$
$$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$$
$$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$$

9. {MM, MF, FM, FF}

आइए अभ्यास करें

1. $\{C_1S_1, C_1S_2, C_1S_3, C_1S_4, C_2S_1, C_2S_2, C_2S_3, C_2S_4,$
$C_3S_1, C_3S_2, C_3S_3, C_3S_4, C_4S_1, C_4S_2, C_4S_3, C_4S_4\}$

2. $2^4 = 16$, { HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, HHTT, HTHT, HTTH, HTTT,
THHH, THHT, THTH, THTT, TTHH, TTHT, TTTH, TTTT}

3. 2^n 4. $6^2 = 36$

19

प्रायिकता

आप दैनिक जीवन में प्राय: ऐसे कथन सुनते रहते हैं कि 'आज वर्षा हो सकती है' या 'संभवत: भारत मैच जीत जाए' या 'मैं संभवत: इस पद के लिए चुना जाऊं'। इन कथनों में अनिश्चितता का तत्व सम्मिलित है। अनिश्चितता को हम कैसे माप सकते हैं? गणित की वह शाखा जिसमें यह अनिश्चितता मापी जाती है, प्रायिकता का सिद्धान्त कहलाती है। किसी घटना के घटने की अनिश्चितता को मापने के लिए प्रायिकता के सिद्धान्त को बनाया गया है। शब्द कोष में प्रायिकता का अर्थ है 'संभवत: घटित हो परन्तु निश्चित नहीं'। इसलिए जब एक सिक्का उछाला जाता है तो चित्त आ सकता है परन्तु न भी आए। इसी प्रकार जब एक पासा फेंका जाता है, तो यह संख्या 6 दिखाए या ना दिखाए।

इस पाठ में हम, प्रायिकता की कुछ मूलभूत अवधारणाओं, योग प्रमेय, पराश्रित एवं स्वतंत्र घटनाएं, गुणन प्रमेय, बेज प्रमेय, यादृच्छिक चर और इसकी प्रायिकता बंटन एवं द्विपद बंटन का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस पाठ के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित में समर्थ हो जाएंगे :

- किसी घटना के घटने की प्रायिकता को परिभाषित करना,
- उदाहरणों द्वारा स्थापित करना कि किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता एक ऋणेतर भिन्न है जो कि एक से बड़ी नहीं है।
- प्रायिकता के प्रश्नों को हल करने में क्रमचय तथा संचय का उपयोग करना,
- प्रायिकता के योग के प्रमेय का कथन देना तथा इसे सिद्ध करना,
- प्रायिकता की योग प्रमेय का परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए व्यापीकरण करना।
- पराश्रित एवं स्वतन्त्र घटनाओं के लिए गुणन नियम को समझना और इस पर आधारित प्रश्नों को हल करना
- प्रतिबंधी प्रायिकता को समझना और संबंधित प्रश्नों को हल करना
- बेज प्रमेय को समझना और संबंधित प्रश्नों को हल करना
- यादृच्छिक चर को परिभाषित करना और इस की प्रायिकता बंटन ज्ञात करना
- यादृच्छिक चर के माध्य एवं प्रसरण को समझना एवं ज्ञात करना
- द्विपद बंटन को समझना और इस पर आधारित प्रश्नों को हल करना

पूर्व ज्ञान

- यादृच्छिक प्रयोग तथा घटनाओं का ज्ञान
- प्रतिदर्श समष्टि का अर्थ
- एक मानक ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं जो कि 13 पत्तों के चार रंग (सूट), हुकुम, चिड़ी,ईंट तथा पान में बटे होते हैं। जब कि प्रत्येक सूट में इक्का, बादशाह, बेगम, गुलाम 10,9,8,7,6,5,4,3 तथा 2 के पत्ते होते हैं। बादशाह, बेगम तथा गुलाम को तस्वीर वाला पत्ता (फेस कार्ड) कहते हैं। बाकी पत्तों को नम्बर कार्ड कहते हैं।

19.1 घटनाएं तथा उनकी प्रायिकता

इससे पहले पाठ में हमने अध्ययन किया कि कोई क्रियाकलाप यादृच्छिक प्रयोग है अथवा नहीं। प्रायिकता का अध्ययन सदैव यादृच्छिक प्रयोग से ही संबंधित होता है। अत: भविष्य में 'प्रयोग' शब्द का उपयोग केवल यादृच्छिक प्रयोग के लिए होगा।

उस पाठ में हमने विभिन्न प्रकार की घटनाओं जैसे समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी को परिभाषित किया है कुल संभव परिणामों की, स्वतन्त्र तथा आश्रित घटनाओं और उपर्युक्त घटनाओं के उदाहरण भी दिए हैं यहां हमारी रूचि किसी विशिष्ट घटना के घटित होने की संभावना में है, जबकि एक प्रयोग किया गया हो। आइए कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

एक सिक्के को उछालने पर चित्त (Head) आने की संभावना क्या है? यहां केवल दो समप्रायिक परिणाम हैं, चित्त अथवा पट (Tail)। दैनिक भाषा में हम कहते हैं कि चित्त आने की संभावना दो में से एक है। तकनीकी भाषा में हम कहते हैं कि चित्त की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है।

इसी प्रकार, एक पासे को फेंकने के प्रयोग में छ: समप्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6 है। अंक 1 वाले फलक के आने की संभावना 6 में से 1 है। इसलिए हम कहते हैं कि 1 आने की प्रायिकता $\frac{1}{6}$ है।

ऊपरी प्रयोग में मान लीजिए एक पासा फेंकने पर हम एक सम संख्या के आने की प्रायिकता जानना चाहते हैं। स्पष्ट है कि सम्भव संख्याएँ 2, 4 तथा 6 है। तथा सम संख्या आने की संम्भावना 6 में से 3 है इसलिए हम कहते हैं कि सम संख्या की प्रायिकता $\frac{3}{6}$ अर्थात $\frac{1}{2}$ है। इस से हमें प्रायिकता की निम्नलिखित परिभाषा मिलती है :

यदि n सभी संभव समप्रायिक तथा परस्पर अपवर्जी परिणाम वाले एक प्रयोग में, किसी घटना A के अनुकूल (पक्ष में) m परिणाम हों तो घटना A के घटित होने की प्रायिकता P को निम्नलिखित संबंध से प्राप्त किया जाता है :

$$p = \mathrm{P(A)} = \frac{\text{अनुकूल परिणामों की संख्या}}{\text{सभी संभव परिणामों की संख्या}} = \frac{m}{n} \qquad \text{....(i)}$$

चूंकि घटना A के न घटित होने के अनुकूल परिणामों की संख्या (n–m) है तो A के न घटित होने की प्रायिकता q होगी :

$$q = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$$= 1 - p \qquad \text{[(i) का उपयोग करने पर]}$$

$$\therefore \qquad p + q = 1.$$

स्पष्टत: p तथा q भी धनात्मक हैं और इनके मान 1 से अधिक नहीं हो सकते।

अर्थात् $\quad 0 \le p \le 1, \quad 0 \le q \le 1$

इस प्रकार किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता 0 से 1 के तक स्थित होती है।

टिप्पणी

1. किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p को सफलता की प्रायिकता, तथा घटना के न घटित होने की प्रायिकता q को असफलता की प्रायिकता भी कहते हैं।
2. (a) यदि $P(A) = 1$, तो A एक निश्चित घटना कहलाती है, अर्थात घटना A का घटित होना अवश्यंभावी है।

   (b) यदि $P(A) = 0$ तो A एक असंभव घटना कहलाती है, अर्थात घटना का घटित होना असंभव है।
3. एक घटना के अनुकूल (पक्ष) के परिणामों की संख्या (m) उसके कुल परिणामों की संख्या (n) से अधिक नहीं हो सकती।

आइए हम कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 19.1. दो सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं (i) दो 'चित्त' आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए

(ii) केवल एक 'चित्त' आने की प्रायिकता क्या है?

हल : यहां कुल संभव परिणाम 4 हैं अर्थात कुल संभव परिणामों की संख्या = 4.

HH, HT, TH, TT.

(i) घटना (दो चित्त) के अनूकूल परिणामों की संख्या = 1

अत: $$P\,(2\ \text{चित्त}) = \frac{1}{4}.$$

(ii) अब केवल एक 'चित्त' के अनुकूल परिणाम HT तथा TH है।

$$\therefore \quad P\,(\text{केवल 1 चित्त}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

उदाहरण 19.2. दो पासे फेंके जाते हैं। योग 9 आने की प्रायिकता क्या है?

हल : दो पासों को एक बार फेंकने पर आने वाले कुल संभव परिणाम $6 \times 6 = 36$ हैं। हम उन्हें निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

अब हम योग 9 कैसे प्राप्त कर सकते हैं? हमारे पास हैं :

$$3 + 6 = 9, \ 4 + 5 = 9$$
$$5 + 4 = 9, \ 6 + 3 = 9$$

दूसरे शब्दों में (3, 6), (4, 5), (5, 4) तथा (6,3) दी हुई घटना के अनुकूल परिणाम हैं।

अत: $$P(\text{योग 9}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

उदाहरण 19.3. यादृच्छिक चुने गए लीप वर्ष में 53 रविवार होने का संयोग क्या है ?

हल : लीप वर्ष में दिनों की संख्या = 366

अब 366 दिन = 52 सप्ताह और 2 दिन, अत: लीप वर्ष में 52 रविवार हैं अगले 2 दिन के संभव संचय नीचे दिये गए हैं:

(i) रविवार तथा सोमवार

(ii) सोमवार तथा मंगलवार

(iii) मंगलवार तथा बुधवार

(iv) बुधवार तथा बृहस्पतिवार

(v) बृहस्पतिवार तथा शुक्रवार

(vi) शुक्रवार तथा शनिवार

(vii) शनिवार तथा रविवार

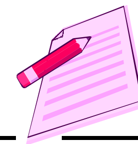
यादृच्छिक चुने गए लीप वर्ष में 53 रविवार होने के लिए, अगले 2 दिन में एक रविवार अवश्य होना चाहिए। चूँकि उपर्युक्त सात संभावनाओं में इस घटना के दो अनुकूल परिणाम हैं।

$$\therefore \text{ प्रायिकता } = \frac{2}{7}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. एक पासा एक बार फेंका जाता है। 3 प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्का एक बार उछाला जाता है। पट (टेल) प्राप्त करने की प्रायिकता क्या है?
3. एक पासे पर 3 से बड़ी संख्या आने की प्रायिकता क्या है?
4. दो सिक्कों को एक साथ उछालने पर कम से कम एक पट (टेल) प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. एक थैले में से जिस में 15 लाल तथा 10 नीली गेंदे है, एक गेंद यादृच्छिक रूपसे निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के (i) लाल होने की प्रायिकता क्या है? (ii) नीली होने की प्रायिकता क्या है?
6. यदि दो पासे फेंके जाते हैं तो योग (i) 6 (ii) 8 (iii)10 (iv)12 होने की प्रायिकता क्या हैं?
7. दो पासे फेंके गए। दोनों फलकों की संख्याओं के योग के 3 या 4 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
8. यदि दो पासे फेंके जाएं तो दोनों फलकों की संख्याओं का योग 10 से अधिक आने की प्रायिकता क्या होगी?
9. एक अच्छी प्रकार फेंकी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी से एक लाल पत्ता निकालने की प्रायिकता क्या है?
10. एक अच्छी प्रकार फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचा गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

    (i) हुकुम के पत्ते की (ii) बादशाह की (iii) हुकुम के बादशाह की



11. पासों का एक युग्म फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि :

    (i) योग एक अभाज्य संख्या हो

    (ii) एक द्विक (अर्थात दोनों पासों पर समान संख्या) आए

    (iii) एक पासे पर 2 का गुणज तथा दूसरे पर 3 का गुणन आए।

12. तीन सिक्के एक साथ उछाले गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

    (i) कोई चित्त ना आए (ii) कम से कम एक चित्त आए (iii) सभी चित्त आएं।

19.2 संचय विन्यास (क्रमचय तथा संचय) का उपयोग करके प्रायिकता का परिकलन

पिछले अनुच्छेद में हमने किसी घटना की प्रायिकता उसके सभी संभव परिणामों को तथा उस घटना के अनुकूल परिणामों को लिख कर परिकलित की थी। यह तभी संभव है जबकि परिणामों की संख्या छोटी हो, अन्यथा यह प्रक्रिया कठिन हो जाती है और इसमें समय भी अधिक लगता है। सामान्य रूप में हमें सभी परिणामों को लिखने की आवश्यकता नहीं है। हमें केवल सभी संभव परिणामों की संख्या और दी हुई घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या की आवश्यकता होती है। अनेक स्थितियों में इनको क्रमचय तथा संचय के ज्ञान का उपयोग करके ज्ञात किया जा सकता है जिसे आप पहले पढ़ चुके हैं।

आइए, निम्नलिखित उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 19.4. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद और 7 नीली गेंदें हैं। दो गेंदे निकाली जाती हैं उनके एक सफेद और एक नीली होने की प्रायिकता क्या है?

हल : कुल गेंदों की संख्या $= 3 + 6 + 7 = 16$

अब, 16 गेंदों में से 2 गेंद ${}^{16}C_2$ विधियों से निकाली जा सकती है। सभी संभव परिणामों की संख्या

$$= {}^{16}C_2 = \frac{16 \times 15}{2} = 120.$$

6 सफेद गेंदों में से 1 गेंद ${}^{6}C_1$ विधियों से निकाली जा सकती है। और 7 नीली गेंदों में से 1 गेंद ${}^{7}C_1$ विधियों से निकाली जा सकती है। चूँकि पूर्व की प्रत्येक स्थितियां बाद की प्रत्येक स्थितिं से संबद्ध है इसलिए कुल अनुकूल स्थितियों की संख्या ${}^{6}C_1 \times {}^{7}C_1 = 6 \times 7 = 42$ है।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{42}{120} = \dfrac{7}{20}$

टिप्पणी :

एक थैले में से जिसमें अनेक गेंद रखी हैं जब दो अथवा अधिक गेंद निकाली जाए, तो ऐसा दो विधियों से किया जा सकता है :

(i) **बिना वापस रखे :** जब दूसरी गेंद निकाली जाती है तो उसके पूर्व पहली गेंद वापस नहीं रखी गई। तीसरी गेंद भी पहली दो गेंदों को बिना वापस रखे निकाली जाती है, इत्यादि। स्पष्ट है कि बिना वापस रखे गेंदों के निकालने की स्थिति इस के समान है कि उन सभी गेंदों को एक साथ निकाला जाए।

(ii) **वापस रखकर :** इस स्थिति में, अगली गेंद निकालने से पहले पिछली गेंद को थैले में वापस रख दिया जाता है। यहां जब भी गेंद बाहर निकाली जाती है, तो थैले में गेंदों कीसंख्या समान रहती है।

इस प्रकार के प्रश्नों में जब तक दिया ना हो हम उसे बिना वापस रखे वाला ही प्रश्न मानेगें।

उदाहरण 19.5. 52 पत्तों वाली ताश की गड्डी में से 6 पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले गए। 3 लाल व 3 काले पत्ते होने की प्रायिकता क्या है?

हल: अच्छी प्रकार से फेंटी गई ताशों की गड्डी में से 6 पत्ते $^{52}C_6$ विधियों से निकाले जा सकते हैं अर्थात् संभव परिणामों की कुल संख्या = $^{52}C_6$। 3 लाल पत्ते $^{26}C_3$ विधियों से निकाले जा सकते हैं। 3 काले पत्ते $^{26}C_3$ विधियों से निकाले जा सकते हैं।

अनुकूल स्थितियों की कुल संख्या $= {}^{26}C_3 \times {}^{26}C_3$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{^{26}C_3 \times ^{26}C_3}{^{52}C_6} = \dfrac{13000}{39151}$

उदाहरण 19.6. 3 पुरुषों, 2 स्त्रियों तथा 4 बच्चों में से चार व्यक्तियों को यादृच्छिक रूप से चुनना है। दर्शाइए कि उनमें ठीक दो बच्चे सम्मिलित होने की प्रायिकता $\dfrac{10}{21}$ है।

हल : समुदाय में व्यक्तियों की संख्या $= 3 + 2 + 4 = 9$. चार व्यक्तियों को यादृच्छिक चुना जाता है, यदि उनमें से 2 बच्चे हैं, तब शेष दो 5 व्यक्तियों (3 पुरुषों +2 स्त्रियों) में से चुने जा सकते हैं।

4 बच्चों में से 2 बच्चे $^4C_2$ विधियों से चुने जा सकते हैं। $^4C_2 = \dfrac{4 \times 3}{1 \times 2} = 6$

5 व्यक्तियों में से 2 व्यक्तियों के चुनने की कुल विधियाँ $= {}^5C_2 = \dfrac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$ है।

9 व्यक्तियों में से 4 व्यक्तियों के चुनने की कुल विधियाँ $= {}^9C_4 = \dfrac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 126$

अत: अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{^4C_2 \times ^5C_2}{^9C_4} = \dfrac{6 \times 10}{126} = \dfrac{10}{21}$

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. एक थैले में 3 लाल, 6 सफेद तथा 7 नीली गेंद हैं। दो निकाली गई गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता क्या है?
2. एक थैले में 5 लाल, 8 नीली गेंद हैं। दो निकाली गई गेंदों में एक लाल तथा एक नीली होने की प्रायिकता क्या है?
3. एक थैले में 20 सफेद तथा 30 काली गेंद हैं। यादृच्छया निकाली गई दोनों गेंदो के सफेद होने की प्रायिकता क्या है, (a) वापस रखते हुए (b) बिना वापस रखते हुए ?
4. अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों वाली ताश की एक गड्डी में से तीन ताश के पत्ते खीचे जाते हैं। तीनों पत्तों के गुलाम होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. अच्छी तरह फेंटी गई 52 पत्तों की ताश की गड्डी में से दो पत्ते खीचें जाते हैं। दर्शाइए, कि उनके इक्के होने की प्रायिकता $\dfrac{1}{221}$ है।

6. एक विद्यालय में 10 होनहार विद्यार्थी हैं, जिस में 6 लड़के तथा 4 लड़कियां हैं। 3 विद्यार्थियों का वाद विवाद प्रतियोगिता के लिए यादृच्छया चुनाव करना है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि चुने गये विद्यार्थियों में :

   (i) एक लड़का तथा दो लड़कियां हों, (ii) सभी लड़के हों, (iii) सभी लड़कियां हों।

7. 21 टिकटों, जिन पर 1 से 21 तक संख्याएँ अंकित हैं, में से तीन यादृच्छिया निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि उन पर अंकित संख्याएं संमातर श्रेणी में हैं।

8. 1 से 8 तक संख्याओं वाले 8 कार्डों में से 2 कार्ड यादृच्छिक रुप से लिए गये यदि दोनों कार्ड इकट्ठे निकाले गए तो संख्याओं का योग विषम आने की प्रायिकता क्या होगी?

9. 6 लड़कों तथा 8 लड़कियों के एक समूह में से 5 खिलाड़ियों की एक टीम का चयन किया गया। इस टीम में 2 लड़के तथा 3 लडकियों के चुने जाने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि चयन यादृच्छिक रूप से किया गया हो।

10. पहले 200 घनात्मक पूर्णाकों में से एक पूर्णांक चुना गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पूर्णांक 6 या 8 से विभाजित होता है।

19.3 घटनाओं में संबंध

19.3.1 एक घटना का पूरक

आइए एक उदाहरण लें। जब एक पासा फेंका जाता तो इसका प्रतिदर्श समष्टि होगा:

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

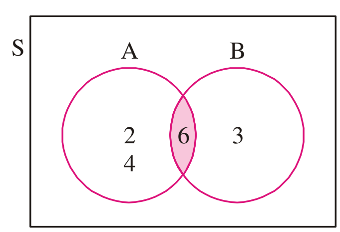
मान लीजिए कि A ऐसी घटना है जिसमें सम संख्या आनी चाहिए तो घटना A प्रतिदर्श अवयव 2, 4, 6, आने पर घटित होगा और 1, 3, 5 आने पर घटित नहीं होगा।

जिन परिणामों में घटना A घटित नहीं होती वे A के पूरक कहलाते हैं।

पूरक A में वे परिणाम आते हैं जो घटना A के अनुकूल नहीं है और इनको 'नहीं A' अथवा $\bar{A}$ द्वारा लिखा जाता है।

19.3.2 घटना A या B

एक पासा फेंका गया। माना घटना A में वे फलक ऊपर आते हैं जिन पर 2 के गुणज हैं और घटना B में वे फलक ऊपर आते हैं जिन पर 3 के गुणज हैं। इसलिए 2, 4, 6 घटना A के अनुकूल हैं और 3,6 घटना B के अनुकूल हैं।



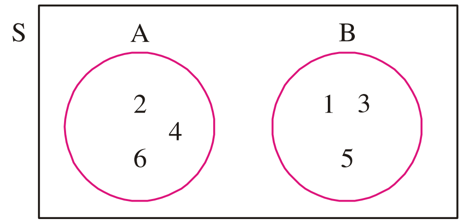
चित्र 19.1

A या B का घटित होना

$$A \cup B = \{ 2, 3, 4, 6 \}$$

फिर यदि घटना A में सम संख्या आए और B में विषम संख्या आए तो

$$A = \{ 2, 4, 6 \}, \qquad B = \{ 1, 3, 5 \}$$



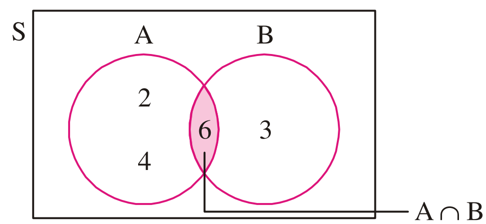
चित्र 19.2

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

इन उदाहरणों में हमने देखा कि यदि A तथा B दो घटनाऐं हैं तो A या B अर्थात् $(A \cup B)$ में वे सभी परिणाम होंगे जो या तो A के अनुकूल हैं, या B के अनुकूल हैं या दोनो के अनुकूल हैं।

19.3.3 घटना A और B

पुराने प्रयोग को एक बार फिर से याद करते हैं जिससे पासा फेंकने पर घटना A में 2 के गुणज और घटना B में 3 गुणज ऊपर आते हैं। घटना A के परिणाम हैं 2, 4, 6, और घटना B के परिणाम हैं 3, 6.



चित्र 19.3

इन दोनों घटनाओं से पता चलता है कि परिणाम 6 दोनों में एक अनुकूल परिणाम है।

ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला। घटनाएं A तथा B निम्नलिखित है :

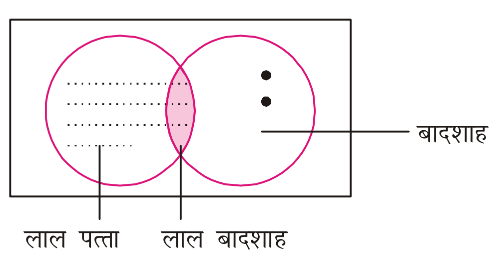
घटना A = एक लाल पत्ता आना

घटना B = एक बादशाह आना

हमें ज्ञात है कि पूरी ताश की गड्डी में 26 लाल पत्ते होते हैं और 4 बादशाह होते हैं, उन 4 बादशाहों के पत्तों में से दो लाल होते हैं। इस पूरे प्रयोग में 2 लाल वाले राजा के पत्ते दोनों घटनाओं में अनुकूल हैं।

इसलिए A और B में वे परिणाम आते हैं जो दोनों में अनुकूल होते हैं।

$\therefore A \cap B =$ {ताश में आने वाले बादशाह जो लाल हैं}



चित्र 19.4

अत: A और B में वे परिणाम आते हैं जो A और B दोनों में अनुकूल होते हैं, अर्थात् घटना A और B घटित होती है जबकि A और B साथ-साथ घटित होते हैं। संकेतन रूप में इसे $A \cap B$ लिखा जाता है।

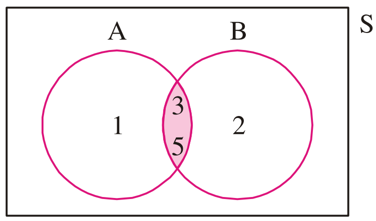
19.4 प्रायिकता के योग का नियम

एक पासा फेंकने के प्रयोग में मान लीजिए कि घटना A के परिणाम हैं विषम संख्याएें और घटना B के परिणाम हैं अभाज्य संख्यायें। इस प्रयोग की क्या प्रायिकता होगी कि एक विषम संख्या या एक अभाज्य संख्या आए।

एक पासा फेंकने का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$ है।

घटना A के परिणाम $= \{ 1, 3, 5 \}$

घटना B के परिणाम $= \{ 2, 3, 5 \}$



चित्र 19.5

घटना A या B के परिणाम

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 5 \}.$$

इसलिए एक विषम संख्या या एक अभाज्य संख्या की प्रायिकता $P(A \text{ या } B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

इसको हम दूसरी तरह भी हल कर सकते हैं जैसे

घटना A के अनुकूल परिणाम = 1, 3, 5

$\therefore$ A की प्रायिकता $P(A) = \frac{3}{6}$

घटना B के अनुकूल के परिणाम = 2, 3, 5.

B की प्रायिकता $P(B) = \frac{3}{6}$

A और B के अनुकूल परिणाम = 3, 5.

$\therefore$ A और B की प्रायिकता $P(A \text{ और } B) = \frac{2}{6}$

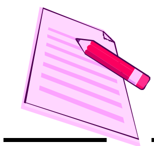
अब $P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} = P(A \text{ या } B)$$

अब हम योग के नियम को लिखते हैं जिसमें हम घटनाओं के संघ की (Union) प्रायिकता निकाल सकते हैं। किसी प्रतिदर्श समष्टि की दो घटनाओं A और B के लिए

$$P(A \text{ या } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B)$$

या $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad .....(ii)$$



उदाहरण 19.7. अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि या तो हुकम का पत्ता आए या बादशाह का पत्ता आए।

हल : यादृच्छिक रूप से यदि ताश में से एक पत्ता निकाला जाए तो प्रत्येक पत्ते के निकलने की बराबर संभावना है अर्थात इसके प्रतिदर्श स्मष्टि में 52 अवयव होगें।

अब यदि घटना A के परिणाम हैं हुकम का पत्ता और घटना B का परिणाम है बादशाह तो घटना Aमें 13 प्रतिदर्श अवयव होगें और घटना B में 4 प्रतिदर्श अवयव होगें।

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{13}{52}, \qquad P(B) = \frac{4}{52}$$

घटना A और B का एक प्रतिदर्श अवयव होगा

$$P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

अत: हुकम का पत्ता या बादशाह आने की प्रायिकता

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52}$$

$$= \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

उदाहरण 19.7. एक प्रयोग में दो पासे फेंके गए जिसमें

घटना A: ऊपर आए फलकों के अंकों का योग 8 आये।

घटना B: जब दोनों बार एक जैसा अंक आए।

इस प्रयोग में A या B की प्रायिकता क्या है?

हल : इस प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि में $6 \times 6 = 36$ प्रतिदर्श अवयव होगें।

घटना A के अनुकूल परिणाम

$$A = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$$

घटना B के अनुकूल परिणाम

$$B = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$$

घटना A और B दोनों के अनुकूल परिणाम

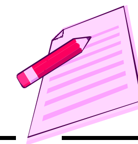
$$A \cap B = \{(4,4)\}.$$

अब $\qquad P(A) = \dfrac{5}{36}, \quad P(B) = \dfrac{6}{36}, \quad P(A \cap B) = \dfrac{1}{36}$

A या B की प्रायिकता

अर्थात $\qquad P(A \cup B) = \dfrac{5}{36} + \dfrac{6}{36} - \dfrac{1}{36}$

$$= \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$



19.5 परस्पर अपवर्जी घटनाओं की प्रायिकता के योग का नियम

हम जानते हैं दो घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती हैं यदि उनका कोई भी परिणाम उभयनिष्ठ न हो।

यानि कि $P(A \text{ और } B) = 0$ .....(iii)

इसका मान योग के नियम में रखने पर

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

इसलिए दो परस्पर अपवर्ती घटनाओं के लिए

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

उदाहरण 19.9. एक ही बार में दो पासे फेंके गए। यदि अंको का योग 9 या 11हो तो इस प्रयोग की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल : एक घटना में अंकों का योग 9 और एक घटना में अंकों का योग 11 आए, ये दोनों परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

$$P(\text{योग } 9 \text{ या योग } 11) = P(\text{योग } 9) + P(\text{योग } 11)$$

घटना (योग 9) के परिणाम $= \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}$

घटना (योग 11) के परिणाम $= (5,6)\ , (6,5)$

$$P(\text{योग } 9) = \frac{4}{36},\ P(\text{योग } 11) = \frac{2}{36}$$

$$P(\text{योग } 9 \text{ या योग } 11) = \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{1}{6}$$

उदाहरण 19.10. सिद्ध कीजिए कि एक घटना जो घटित न हुई हो उसकी प्रायिकता $1 - P(A)$ है।

अर्थात $\Rightarrow$ $P(A \text{ नहीं}) = 1 - P(A)$

या $P(\bar{A}) = 1 - P(A).$

हल : हम जानते हैं कि किसी भी प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि S की प्रायिकता 1 होती है। हम यह भी जानते हैं कि यदि एक प्रयोग में घटना A घटित होती है तो $(\bar{A})$ घटित नहीं होती। ये परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं। इन दोनों घटनाओं के प्रतिदर्श समष्टि अवयव मिलकर प्रतिदर्श समष्टि बनाते हैं।

अर्थात् $A \cup \bar{A} = S$

$\therefore$ $P(A \cup \bar{A}) = P(S)$

$$\Rightarrow P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A),$$

इसे कोटिपूरक नियम कहते हैं।

कोटिपूरक नियम: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

उदाहरण 19.11. यदि वर्षा होने की प्रायिकता 0.3 है। वर्षा के अनुकूल और वर्षा के प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल : माना A घटना है कि वर्षा होगी

$$\therefore \qquad P(A) = 0.3$$

कोटिपूरक नियम के अनुसार

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$= 1 - 0.3 = 0.7$$

अब वर्षा का अनुकूल संयोगातुपात

$$\frac{0.3}{0.7} \text{ या } 3 \text{ से } 7 \text{ (या } 3 : 7).$$

वर्षा का प्रतिकूल संयोगनुपात

$$\frac{0.7}{0.3} \text{ या } 7 \text{ से } 3.$$

यदि किसी घटना का अनुकूल या प्रतिकूल संयोगानुपात दिया गया हो तो उसकी प्रायिकता निम्नलिखित नियम से निकाली जा सकती है।

यदि A का अनुकूल संयोगनुपात $a : b$ है तो

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

यदि A का प्रतिकूल संयोगानुपात $a : b$ है तो

$$P(A) = \frac{b}{a+b}.$$

हम ऊपर लिखे नियम को सिद्ध कर सकते हैं।

माना A का संयोगानुपात $a : b$ है तो संयोगानुपात की परिभाषा अनुसार:

$$\frac{P(A)}{P(\bar{A})} = \frac{a}{b}.$$

कोटिपूरक नियम द्वारा

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

$$\frac{P(A)}{1 - P(A)} = \frac{a}{b} \qquad \text{या} \qquad b\,P(A) = a - a\,P(A)$$

$$\text{या} \qquad b\,P(A) + a\,P(A) = a \qquad \text{या} \qquad (a + b)\,P(A) = a$$

$$\boxed{P(A) = \frac{a}{a+b}}$$

इसी तरह से हम सिद्ध कर सकते हैं

$$P(\bar{A}) = \frac{b}{a+b}$$ जब घटना A का प्रतिकूल संयोगानुपात b : a है।

उदाहरण 19.12. क्या निम्नलिखित प्रायिकताएं तर्क संगत हैं। अपने उत्तर का औचित्य दीजिए :

(a) $P(A) = P(B) = 0.6$, $P(A$ और $B) = 0.05$

(b) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.4$, $P(A$ और $B) = 0.1$

(c) $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.7$, $P(A$ और $B) = 0.4$

हल : (a) $P(A$ या $B) = P(A) + P(B) - P(A$ और $B) = 0.6 + 0.6 - 0.05 = 1.15$

क्योंकि $P(A$ या $B) > 1$ संभव नहीं है इसलिए इसकी प्रायिकता तर्कसंगत नहीं है।

(b) $P(A$ या $B) = P(A) + P(B) - P(A$ और $B) = 0.5 + 0.4 - 0.1 = 0.8$

$P(A$ या $B) < 1$

और $P(A$ और $B) < P(A)$

$P(A$ और $B) < P(B)$

इसलिए ये प्रायिकताएं तर्कसंगत हैं।

(c) इस भाग में $P(A$ और $B) = .4$ जो कि $P(A) = .2$ से बड़ी है इसलिए यह प्रायिकता तर्कसंगत नहीं है।

उदाहरण 19.13. एक बॉक्स में 8 सफेद गेंद और दो हरी गेंद हैं इसमें से तीन गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई गेंदों में से कम से कम एक हरी गेंद हो।

हल : बक्से में 8 सफेद और दो हरी गेंद हैं।

तीन गेंद ${}^{10}C_3$ प्रकार से निकाली जा सकती हैं। $({}^{10}C_3 = 120)$

मान लीजिए कि घटना A = कम से कम एक हरी गेंद। हम घटना A के विभिन्न परिणामों की गणना करते हैं।

1. एक हरी गेंद 2 सफेद गेंदें
2. दो हरी गेंदे और एक सफेद गेंद

1. के लिए अनुकूल परिणाम $= {}^2C_1 \times {}^8C_2 = 2 \times 28 = 56$

2. के लिए अनुकूल परिणाम है $= {}^2C_2 \times {}^8C_1 = 1 \times 8 = 8$

$\therefore$ कम से कम एक हरी गेंद आने की प्रायिकता

P(कम से कम एक हरी गेंद) = P (एक हरी गेंद) + P (दो हरी गेंदें)

$$= \frac{56}{120} + \frac{8}{120}$$

$$= \frac{64}{120} = \frac{8}{15}$$

उदाहरण 19.14. एक बॉक्स में से यादृच्छिक रूप से एक- एक करके दो गेंद प्रतिस्थापना सहित निकाली जाती हैं इस बॉक्स में 5 नीली और 10 लाल गेंद हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि या तो दोनों गेंद नीली हों या दोनों लाल।

हल : मान लीजिए कि घटना A = दोनों नीली गेंद, घटना B = दोनों लाल गेंद

घटना A और B परस्पर अपवर्जी घटनाएं हैं।

गणना के मूलभूत सिद्धान्त के अनुसार घटना A के अनुकूल परिणाम

$$A = 5 \times 5 = 25.$$

घटना B के अनुकूल परिणाम $\quad B = 10 \times 10 = 100.$

इस पूरी घटना के कुल अनुकूल परिणाम $= 15 \times 15 = 225$

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{25}{225} = \frac{1}{9} \text{ और } P(B) = \frac{100}{225} = \frac{4}{9}.$$

क्योंकि घटनाएं परस्पर अपवर्जी हैं P (A या B) = P(A) + P(B)

$$= \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

P (दो नीली गेंद या दो लाल गेंद) $= \dfrac{5}{9}$

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह पत्ता या तो बेगम या पान का हो।
2. एक ही बार में दो पासे फेंके गए। अंकों का योग 7 या 12 होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. भारतीय क्रिकेट टीम का 2010 विश्वकप में जीतने के अनुकूल संयोगानुपात 9 से 7 है। भारतीय टीम की विजय की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. टीम A के जीतने का प्रतिकूल संयोगानुपात 5 से 7 है। टीम के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. दो पासे फेंके गए और सफल घटना वह है जब अंकों का योग 4 या 5 से विभाजित होता हो। सफल घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. पूरी ताश में से दो पत्ते पुर्नस्थापना सहित निकाले गए। इसकी क्या प्रायिकता है कि दोनों पत्ते काले हों या दोनों लाल।
7. एक अच्छी तरफ फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाला गया पत्ता इक्का हो या काले रंग का हो।
8. दो पासे फेंके गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहले पासे में 3 का गुणज आए या दोनों में आने वाले अंकों का योग 8 हो।

9 (a) एक साथ दो पासे फेंके जाने पर अंकों का योग 5 या 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

(b) A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाऐं है: जबकि P(A) = 0.3, P(B) = 0.4 तो (A या B) ज्ञात कीजिए।

10. एक बक्से में 12 बल्ब हैं जिनमें से 5 खराब हैं, सारे बल्ब एक जैसे हैं और उनको चुनने की समान प्रायिकता है। 3 बल्ब यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं, कम से कम दो बल्ब खराब आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

11. दो पासे एक साथ फेंके गए। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब

    (a) दोनों पर अलग-अलग अंक आएं

    (b) दोनों पर आने वाले अंकों का योग कम से कम 3 हो।

12. एक पति-पत्नी के तीन बच्चे हैं। इसकी क्या प्रायिकता होगी कि कम से कम एक लड़का हो और एक लड़की हो।

13. नीचे दी गई प्रायिकता के लिए अनुकूल और प्रतिकूल संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

    (a) $P(A) = 0.7$ (b) $P(A) = \frac{4}{5}$

14. A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि

    (a) A के अनुकूल संयोगानुपात है 7 से 2 (b) A के प्रतिकूल संयोगानुपात है 10 से 7 है।

15. नीचे लिखी गई प्रायिकताओं में से कौन असंगत है?

    (a) $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A$ और $B) = 0.4$

    (b) $P(A) = P(B) = 0.4$, $P(A$ और $B) = 0.2$

    (c) $P(A) = 0.85$, $P(B) = 0.8$, $P(A$और $B) = 0.61$

17. एक थैला जिसमें 5 सफेद और 10 हरी गेंद हैं, में से दो गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि कम से कम 1 सफेद गेंद हो।

18. अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से दो पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले गए जो पुन: रखे जाते हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि दोनों पत्ते एक जैसे (सूट के) हों।

    अत: दो स्वतंत्र घटनाओं के एक साथ घटित होने की प्रायिकता उनकी अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल के समान होती हैं।

19.6 स्वतन्त्र घटनाओं के लिए प्रायिकता का गुणात्मक नियम

आइए स्वतन्त्र घटनाओं की परिभाषा याद करें

दो घटनाएं A और B स्वतन्त्र घटनाऐं होती हैं जब एक के घटित होने का दूसरी घटना पर प्रभाव न हो। पहला सिक्का फेंकने पर चित्त आए और दूसरा सिक्का फेंकने पर पट आए। ये दोनों स्वतन्त्र घटनाऐं हैं। इसी तरह से यदि एक ही सिक्का हो और पहली बार फेंकने पर चित आ जाए और दूसरी बार फेंकने पर पट आ जाये तो भी ये स्वतन्त्र घटनाएं हैं। अब यदि हम ताश की गड्डी में से एक इक्का निकालना चाहते हैं और उसको वापस रखे बिना दूसरी बार इक्का निकालना चाहते हैं तो दोनों घटनाएं स्वतन्त्र नहीं हैं। पहली घटना की प्रायिकता $\frac{4}{52}$ है, जब की दूसरी घटना की प्रायिकता $\frac{4}{51}$ होगी क्योंकि पहला पत्ता पुन: नहीं रखा गया।

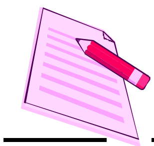
टिप्पणी:

यदि पत्ता पुन: रख कर दूसरा पत्ता खींचा जाए तो दोनों घटनाएं स्वतंत्र होंगी।

क्या कोई ऐसा नियम है जिससे हम बता सकते हैं कि घटनाएं स्वतन्त्र हैं?

दो स्वतन्त्र घटनाओं की जो एक बार एक घटित होती हैं उनकी प्रायिकता कैसे निकाली जाए।

यदि A और B दो स्वतन्त्र घटनाऐं है तो



$$P\ (A \text{ और } B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$\text{और } \ P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

इसलिए दो स्वतन्त्र घटित होने वाली समक्षणिक घटनाओं की प्रायिकता, दोनों घटनाओं की अलग-अलग प्रायिकताओं के गुणनफल के बराबर होती है।

ऊपर का नियम दो से अधिक स्वतन्त्र घटनाओं के लिए भी उपयोग में लाया जा सकता है। अर्थात

$$P(A \cap B \cap C...) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)...$$

विलोमत: यदि घटना A और B की प्रायिकता घटना A और घटना B की प्रायिकता के गुणनफल के बराबर हो तो दोनों घटनाएं स्वतन्त्र होती हैं।

उदाहरण 19.15. एक पासा दो बार फेंका गया। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि हर पासे पर 4 से बड़ा अंक आए।

हल : माना घटना A = 4 से बड़ा अंक पहले पासे पर और घटना B = 4 से बड़ा अंक दूसरे पासे पर।

साफ है कि घटना A और B स्वतन्त्र हैं।

पहला पासा फेंकने के अनुकूल परिणाम = 5,6

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

इसी तरह से $P(B) = \dfrac{1}{3}$

$$P\ (A \text{ और } B) = P\ (A) \times P(B)$$

जब
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

उदाहरण 19.16. अरूण और तरूण ने नौकरी के लिए एक परीक्षा दी। अरूण के पास होने की प्रायिकता $\frac{1}{3}$ और तरूण के पास होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) दोनों पास हो जाएं

(b) कोई भी पास न हो

(c) कम से कम एक पास हो

(d) दोनों में से केवल एक पास हो

हल : अरूण के पास होने की प्रायिकता $= P(A) = \dfrac{1}{3}$

तरूण के पास होने की प्रायिकता $= P(T) = \dfrac{1}{5}$

(a) जब दोनों पास हो जाएंगे $= P(A)\ P(T) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{1}{15}$

(b) (P) कोई भी पास न हो : P (दोनों नहीं होंगे) $= P(\bar{A})P(\bar{T})$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}\times\frac{4}{5} = \frac{8}{15}$$

(c) P (कम से कम एक पास हो) $= 1 - P$ (कोई भी पास न हो)

$$= 1 - P(\bar{A})P(\bar{T}) = 1-\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)$$

$$= 1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}\right) = 1-\frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

(d) P (दोनों में से एक पास होगा)

$$= P(A)P(\bar{T}) + P(\bar{A})\,P(T)$$

$$= \frac{1}{3}\times\frac{4}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

उदाहरण 19.17. तीन बच्चों को एक प्रश्न हल करने को दिया गया । इस प्रश्न को हल करने की तीनों की प्रायिकताएं क्रमशः $\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ और $\frac{1}{4}$ हैं। प्रश्न के हल होने की प्रयिकता ज्ञात कीजिए।

हल : $p_1 = \frac{1}{2},\ p_2 = \frac{1}{3},\ p_3 = \frac{1}{4}$

(1) यदि तीनों में से एक प्रश्न को हल कर ले तो P (कम से कम एक प्रश्न हल करता है)

=1–P (जब कोई भी हल नहीं करता)........(1)

P (जब कोई भी हल नहीं करता)

$$= (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

यह मान (1) में रखने पर

P (कम से कम एक बच्चा प्रश्न हल करता है) $= 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

प्रश्न के हल होने की प्रायिकता $\frac{3}{4}$ है।

उदाहरण 19.18. पुनः वापस रखते हुए एक बक्से से दो गेंद यादृच्छिक रूप से निकाली जाती हैं। इसमें 15 लाल और 10 सफेद गेंद हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि

(a) दोनों गेंदे लाल हो

(b) पहली गेंद लाल और दूसरी सफेद हो

(c) दोनों में एक सफेद और एक लाल हो।

हल : (a) माना घटना A = जब प्रथम गेंद लाल हो, घटना B = जब द्वितीय गेंद लाल हो। क्योंकि गेंद पुनः वापस रखते हुए निकाले गये हैं, इसलिए

$$P(A) = \frac{15}{25} = \frac{3}{5},\ P(B) = \frac{3}{5}$$

क्योंकि A और B दोनों स्वतन्त्र घटनाएँ हैं

$$P(\text{दोनों लाल}) = P(A \text{ और } B)$$

$$= P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

(b) माना घटना A= प्रथम निकाली गई गेंद लाल हो, B = द्वितीय निकाली गई गेंद सफेद हो।

$$\therefore \quad P(A \text{ और } B) = P(A) \times P(B) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

क्योंकि A और B दोनों स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(c) माना घटना WR= पहले सफेद गेंद फिर लाल गेंद और घटना RW= पहले लाल गेंद फिर सफेद गेंद तो WR और RW परस्पर अपवर्जी घटनायें हैं।

$$\therefore \quad P(\text{एक सफेद और एक लाल}) = P(WR \text{ या } RW) = P(WR) + P(RW)$$

$$= P(W)\,P(R) + P(R)\,P(W)$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$$

उदाहरण 19.19. एक पासा तीन बार फेंका गया। अंक 5 या 6 आने पर सफलता मानी जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि जब (a) तीनों बार सफलता मिले (b) दो बार सफलता मिले (c) ज्यादा से ज्यादा दो बार सफलता मिले (d) कम से कम दो बार सफलता मिले।

हल : माना पासा फेंकने पर S = सफलता, F = असफलता

$$P(S) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P(F) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(a) क्योंकि ये घटनाएँ स्वतंत्र हैं इसलिए स्वतंत्र घटनाओं के लिए गुणात्मक प्रमेय द्वारा

$$P(SSS) = P(S)\ P(S)\ P(S)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

(b)

$$P(SSF) = P(S)\,P(S)\,P(F)$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{27}$$

दो सफलताएँ ${}^3C_2$ तरह से प्राप्त हो सकती हैं।

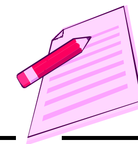
$$\therefore \quad P(\text{दो सफलता के लिए}) = {}^3C_2 \times \frac{2}{27} = \frac{2}{9}$$

(c) $P(\text{ज्यादा से ज्यादा दो सफलता}) = 1 - P(3 \text{ सफलता})$

$$= 1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$$

(d) $P(\text{कम से कम दो सफलता}) = P(\text{दो सफलता}) + P(3 \text{ सफलता})$

$$= \frac{2}{9} + \frac{1}{27} = \frac{7}{27}$$



उदाहरण 19.20. ताश की गड्डी में से किसी एक पत्ते को चुनना समप्रायिक है। बताइए कि निम्न में से कौन सी घटनायें स्वतन्त्र हैं?

(i) A: निकाला गया पत्ता हुकम का है B: निकाला गया पत्ता इक्का है।

(ii) A: निकाला गया पत्ता काले रंग का है B: निकाला गया पत्ता बादशाह है।

(iii) A: निकाला गया पत्ता बादशाह या बेग़म है B: निकाला गया पत्ता बेग़म या गुलाम है।

हलः (i) 52 ताश के पत्तों में हुकम के 13 पत्ते होते हैं।

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

52 ताश के पत्तों में 4 इक्के होते हैं

$$\therefore \qquad P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(A और B) = (हुकम का इक्का)

$$\therefore \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

अब $\qquad P(A)\ P(B) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{52}$

$$P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$$

$\therefore$ घटनाएँ A और B स्वतन्त्र हैं।

(ii) ताश में 26 काले रंग के पत्ते होते हैं।

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$$

ताश में चार बादशाह होते हैं

$$P(B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

(A और B) यानि कि $A \cap B = \{$2 काले पत्ते वाले बादशाह$\}$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

अब, $\qquad P(A) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{13} = \frac{1}{26}$

$$P(A \cap B) = P(A)\ P(B)$$

$\therefore$ घटनाएँ स्वतन्त्र हैं।

(iii) ताश में चार बादशाह और चार बेग़म के पत्ते होते हैं।

$\therefore$ घटना A के अनुकूल परिणाम = 8

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

इसी तरह $$P(B) = \frac{2}{13}$$

$$A \cap B = \text{बेगम (वाले पत्ते)}$$

$$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

$$\therefore \quad P(A) \times P(B) = \frac{2}{13} \times \frac{2}{13} = \frac{4}{169}$$

$$P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

इसलिए घटनाएँ A और B स्वतन्त्र नहीं हैं।

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. एक पति-पत्नि किसी नौकरी के लिए साक्षात्कार के लिए बुलाए जाते हैं। पति के सफल होने की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ है और पत्नी की सफल होने की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है। क्या प्रायिकता है कि
   (a) दोनों में से केवल एक सफल होगा।
   (b) दोनों सफल हो जाऐंगे।
   (c) दोनों में से कोई भी सफल नहीं होगा
   (d) कम से कम एक सफल होगा।

2. किसी प्रश्न को स्वतन्त्र रूप से हल करने की राजू और सोमा की प्रायिकता क्रमशः $\frac{1}{2}$ और $\frac{1}{3}$ है। यदि दोनों स्वतन्त्र रूप से समस्या को हल करते हैं तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब
   (a) समस्या हल हो जाए
   (b) दोनों में से केवल एक ही समस्या को हल कर सके।

3. एक पासा दो बार फेंका गया। प्रत्येक बार 3 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. सीता एक साक्षात्कार में दो पदों A तथा B के लिए आती है। दोनों पदों का चयन स्वतन्त्र है। पहले पद के चयन के लिए उसकी सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{5}$ है और दूसरे पद के चयन के लिए उसकी सफलता की प्रायिकता $\frac{1}{7}$ है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि
   (a) उसका चयन दोनों पदों के लिए हो।
   (b) उसका चयन कम से कम एक पद के लिए हो।

5. A,B,C द्वारा किसी प्रश्न को हल करने की प्रायिकतायें क्रमशः $\frac{1}{3}, \frac{2}{7}$ और $\frac{3}{8}$ है। यदि तीनों उस प्रश्न को एक साथ हल करने का प्रयास करें तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि केवल एक ही उस प्रश्न को हल कर सकेगा।

6. A ताश की गड्डी में से दो पत्ते निकालता है (पहला पत्ता वापस रखते हुए) और इसी समय B दो पासे फेंकता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब

   (a) A को दो पत्ते एक जैसे सूट के मिलते हैं और B को दो अंकों का योग 6 मिलता है।

   (b) A के दोनों गुलाम के पत्ते निकले और B के दोनों अंक एक जैसे आएं।

7. माना A जो इस समय 35 वर्ष का है के 65 वर्ष तक जीने का प्रतिकूल संयोगनुपात 9:7 है। B जो इस समय 45 वर्ष का है के 75 वर्ष तक जीने का प्रतिकूल संयोगानुपात 3:2 है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए की कम से कम एक अगले 30 वर्ष तक जीवित रहेगा।

8. एक बैग में 13 गेंदे हैं जिन पर 1 से 13 तक अंक लिखे हैं। इस घटना की सफलता एक सम संख्या आना है। दो गेंदें बैग में से निकाली जाती (एक निकालने के बाद पुनः वापस रखी जाएगी) हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि (a) दोनों बार सफलता मिले। (b) केवल एक बार सफलता मिले (c) कम से कम एक बार सफलता मिले (d) सफलता न मिले।

9. एक अच्छी तरह फेंटी गई ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया। प्रत्येक पत्ते का चयन समप्रायिक है। निम्न में से कौन सी घटनाएं स्वतन्त्र हैं।

   (a) (A) निकाला गया पत्ता लाल है (B) निकाला गया पत्ता रानी है।

   (b) (A) निकाला गया पत्ता दिल है (B) निकाला गया पत्ता तस्वीर वाला पत्ता है।

19.7 प्रतिबंधी प्रायिकता (संभाव्यता)

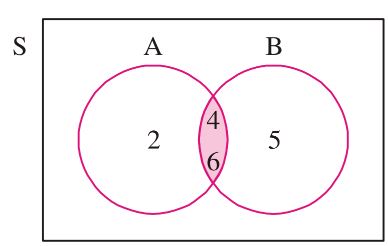
माना एक पासा फेंका गया और उसका परिणाम लिखा गया। माना घटना A है जब परिणाम सम संख्या है।

$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$\therefore \quad P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

अब यदि हमें बता दिया जाए कि परिणाम 3 से बड़ा है तो इस सूचना का P (A) पर क्या प्रभाव पड़ेगा। माना इस परिणाम की घटना B है तो $B = \{4, 5, 6\}$। जब घटना B घटित होती है तो अंक 3 या उससे छोटे अंक आने की कोई संभावना नहीं रहती। घटना B के प्रतिदर्श समष्टि में 3 अवयव हैं। इन तीन अवयवों में दो सम संख्याऐं हैं। इसलिए यदि यह सूचना मिल जाए कि घटना B घटित हो गई है तो

$$P(A) = \frac{2}{3}$$



चित्र 19.7

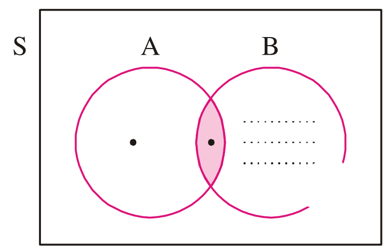
इस पूरी घटना की संभाव्यता को $P(A/B)$ द्वारा लिख सकते हैं। अब एक और घटना पर विचार करते है। एक प्रयोग में ताश की गड्डी में से एक पत्ता निकाला गया, हम चाहते हैं, ये पत्ता इक्का हो जिसका रंग काला हो। अब 52 समप्रायिक परिणाम संभव है और 2 काले इक्के हैं।

इसलिए इस घटना की संभाव्यता $P(A) = \frac{2}{52}$ है।

अब माना कि एक पत्ता निकाला गया और सूचना दी गई कि पत्ता हुकम का है। अब बताइए इस सूचना का घटना A पर क्या प्रभाव हुआ। यदि घटना B घटित हो जाती है (जिसमें हुकम का पत्ता निकला) तो प्रतिदर्श समष्टि के अवयव 52 से घट कर 13 रह जायेंगे। अब काले इक्के जो निकाले जाने हैं उनकी संख्या एक रह गई। अब घटना A की प्रायिकता नए प्रतिदर्श समष्टि के अनुसार गणना करने पर:

$$P(A/B) = \frac{1}{13}$$

ऊपर की घटना को एक बार फिर से समझते है। घटना A में एक काला इक्का निकाला जाता है। अब हम A की संभाव्यता निकालते हैं जब कि घटना B घटित हो चुकी है। B को सार्वत्रिक समुच्चय माना जाता है। इसलिए हमें A का सिर्फ वही हिस्सा गणना में लाना चाहिए जो B में हो। यानि कि हम $A \cap B$ की गणना करते हैं। (देखिये चित्र 31.8)



चित्र 19.8

A की प्रायिकता जबकि B घटित हो गई हो, को $A \cap B$ तथा B सम्मुचय की प्रविष्टियों के अनुपात से व्यक्त किया जाता है।

क्योंकि $n(A \cap B) = 1$ तथा $n(B) = 13$

तब, $$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{1}{13}$$

ध्यान दें: $$n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{52}$$

$$n(B) = 13 \Rightarrow P(B) = \frac{13}{52}$$

$$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{1}{13} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{13}{52}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

अब हम प्रतिबंधी प्रायिकता (संभाव्यता) की परिभाषा निम्न प्रकार से दे सकते हैं।

माना किसी प्रतिदर्श समष्टि के लिए घटना A और B परिभाषित है। माना $P(B) > 0$ तो घटना A की प्रतिबंधी प्रायिकता जब घटना B घटित हो चुकी हो, की गणना निम्न प्रकार होती है :

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0$$

इसी तरह $$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) > 0$$

घटना A प्रायिकता जब घटना B घटित हो चुकी हो। [$P(A/B)$ को सामान्यत: पढते हैं : "A की प्रायिकता जब B" दिया है]

उदाहरण 19.21. ऐसे परिवार लेते हैं जिनमें दो बच्चे (जुडवां नहीं) हैं। माना कि इन परिवारों का प्रतिदर्श समष्टि $\{BB, BG, GB, GG\}$ समप्रायिक होगा (यहां पर उदाहरण के लिए BG जन्म अनुक्रम 'लड़का लड़की' को दर्शाता है) माना घटना A में दोनों लड़के सफल परिणाम हैं और घटना B में कम से कम एक लड़का सफल परिणाम है। $P(A/B)$ ज्ञात कीजिए।

हल : $$A = \{ BB \}$$

$$B = \{ BB, BG, GB \}$$

$$A \cap B = \{ BB \}$$

$$\Rightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\therefore \quad P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}.$$

उदाहरण 19.22. एक स्कूल में लड़के और लड़कियों की संख्या समान है। लड़को की संख्या का 5% फुटबाल के खिलाड़ी हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए यदि यादृच्छिक चयन में लड़का फुटबाल का खिलाड़ी हो।

हल : माना M = लड़का और F = फुटबाल का खिलाड़ी

हम $P(M \cap F)$ ज्ञात करना चाहते हैं

$$P(M) = \frac{1}{2} \quad (\because \text{लड़के और लड़कियों की संख्या बराबर है})$$

$$P(F \mid M) = 0.05$$

प्रतिबंधी प्रायिकता द्वारा

$$P(F \mid M) = \frac{P(M \cap F)}{P(M)}$$

या $$P(M \cap F) = P(M) \times P(F \mid M) = \frac{1}{2} \times 0.05 = 0.025$$

उदाहरण 19.23. यदि A और B दो घटनायें हों और

$P(A) = 0.8$, $P(B) = 0.6$, $P(A \cap B) = 0.5$ तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P(B \mid A)$ (iii) $P(A \mid B)$.

हल : (i) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.8 + 0.6 - 0.5 = 0.9$

(ii) $P(B \mid A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.5}{0.8} = \dfrac{5}{8}$

(iii) $P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.5}{0.6} = \dfrac{5}{6}$

उदाहरण 19.24. एक सिक्का तब तक उछाला जाता है जब तक कि चित न आ जाए या फिर 3 बार उछाला जा चुका हो। अगर दिया जाए कि पहली बार में चित नहीं आया तो क्या प्रायिकता है कि सिक्का 3 बार उछाला गया है।

हल : दिया गया है कि चित्त पहली उछाल में नहीं आया, तो या तो दूसरी उछाल में आएगा या तीसरी में, या चित ना भी आए।

माना घटना B = पहली उछाल में चित नहीं'

$$B = \{TH, TTH, TTT\}$$

ये परस्पर अपवर्ती घटनायें हैं।

$\therefore$ $$P(B) = P(TH) + P(TTH) + P(TTT) \qquad .....(1)$$

अब $P(TH) = \dfrac{1}{4}$ ($\because$ इस घटना की समष्टि में चार अवयव हैं।)

और $P(TTH) = P(TTT) = \dfrac{1}{8}$ ($\because$ इस घटना की समष्टि में आठ अवयव हैं।)

ये मान (1) में रखने पर

$$P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

माना घटना A = जब सिक्का 3 बार उछाला गया।

$$A = \{TTH, TTT\}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

यहाँ $(A \cap B) = A$

$\therefore$ $$P(A \mid B) = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.5

1. ताश की गड्डी में से दो पत्ते पुर्नस्थापना रहित निकाले गए। क्या प्रायिकता है कि पहला पत्ता लाल हो ओर दूसरा काला हो?

2. एक परिवार का चयन करते हैं जिसमें 3 बच्चे हैं। इसका प्रतिदर्श समष्टि निम्न प्रकार का है:

   { BBB, BBG, BGB, GBB, BGG, GBG, GGB, GGG }

   माना घटना A = परिवार में केवल दो लड़के हैं।

   घटना B = पहला बच्चा लड़का है।

   क्या प्रायिकता है कि परिवार में दो लड़के हों जबकि पहला बच्चा लड़का है।

3. ताश की गड्डी में से दो पत्ते निकाले गए (पहला पत्ता वापस नहीं रखते हुए) प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पहला पत्ता पान का है और दूसरा लाल रंग का।

4. यदि A और B दो घटनायें हैं और $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.2$, $P(A \cap B) = 0.1$ तो A की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब B दिया हो। $P(B/A)$ भी ज्ञात कीजिए।

5. एक बक्से में 4 सफेद, 3 पीली और 1 हरी गेंद है। इसमें से वापस रखे बिना दो गेंदें निकाली जाती हैं। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब एक सफेद और एक पीली गेंद निकले।

19.8 प्रायिकता और प्रतिबंधी प्रायिकता के गुणनफल नियम पर प्रमेय

प्रमेय 1: दो घटनाओं A और B के लिए

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A),$$

और

$$P(A \cap B) = P(B).P(A \mid B),$$

यहां $P(B/A) =$ B की प्रतिबंधी संभाव्यता जब A घटित हो गई।

$P(A/B) =$ A की प्रतिबंधी संभाव्यता जब B घटित हो गई।

उपपति : माना $n(S) =$ कुल समप्रायिक परिणाम, $n(A) =$ घटना A के अनुकूल परिणाम, $n(B) =$ घटना B के अनुकूल परिणाम और $n(A \cap B)$ दोनों घटनाओं के अनुकूल परिणाम

$$\therefore \quad P(A) = \frac{n(A)}{n(S)},$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} \qquad .....(1)$$

घटना A/B का अनुकूल परिणाम घटना B के प्रतिदर्श समष्टि में से होना चाहिए यानि कि घटना A/B का प्रतिदर्श समष्टि B वाला होगा और $n(B)$ अवयवों में से $n(A \cap B)$ अवयवघटना A से संबंधित हैं।

$$P(A \mid B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

(1) को हम इस तरह भी लिख सकते हैं:

$$P(A \cap B) = \frac{n(B)}{n(S)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = P(B) \cdot P(A \mid B)$$

इसी तरह हम सिद्ध कर सकते हैं:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B \mid A)$$

ध्यान कीजिए: यदि A और B स्वतन्त्र घटनाऐं हैं तो

$$P(A/B) = P(A) \text{ और } P(B/A) = P(B)$$

$$\therefore \qquad P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

प्रमेय 2 : किसी प्रतिदर्श समष्टि S की दो घटनाएं यदि और केवल यदि स्वतन्त्र होंगी

यदि $\qquad P(A \cap B) = P(A).P(B)$

उपपति : A और B स्वतन्त्र घटनाऐं हैं तो

$$P(A \mid B) = P(A) \qquad (1)$$

हम जानते हैं: $\qquad P(A \mid B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} \qquad (2)$

(1) और (2) से $\qquad P(A \cap B) = P(A)P(B)$

अत:, यदि A और B स्वतन्त्र घटनाएं हैं तो A और B की प्रायिकता, A और B की प्रायिकताओं के गुणनफल के समान है।

विलोमत: यदि $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ तो

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A \mid B) = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

यानि की A और B स्वतन्त्र घटनायें हैं।

19.9 बेज-प्रमेय से परिचय

सप्रतिबंध प्रायिकता में हमने किसी घटना की प्रायिकता इस प्रतिबंध के साथ ज्ञात करना सीखा है कि कोई दूसरी घटना पहले से घटित हो चुकी है। तीन सिक्कों में से एक सिक्के के चयन के परीक्षण की चर्चा करते हैं : यदि, I, $P(H) = \frac{1}{3}$ तथा $P(T) = \frac{2}{3}$, II, $P(H) = \frac{3}{4}$ एवं $P(T) = \frac{1}{4}$ और III, $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{1}{2}$ (सामान्य सिक्का)

यादृच्छिक रूप से किसी सिक्के का चयन करने के पश्चात् इसे उछाला जाता है। हम एक सिक्के के चयन की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं $\left(\text{i.e. } \frac{1}{3}\right)$ और किसी भी परिणाम i.e. चित अथवा पट की प्रायिकता भी ज्ञात कर सकते हैं, यदि सिक्के का चयन दिया हुआ है। परन्तु क्या हम यह प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं कि चयनित सिक्का I, II अथवा III है जबकि यह दिया हुआ है कि परिणाम के रूप में चित प्राप्त किया गया है। इसके लिए हमें एक ऐसी

घटना की प्रायिकता ज्ञात करनी है जो दी हुई घटना से पूर्व घटित हो गई है। इस प्रकार की प्रायिकता वेज़ प्रेमय की सहायता से ज्ञात की जा सकती है। इस प्रमेय को प्रसिद्ध गणितज्ञ जॉन बेज के नाम से जाना जाता है। बेज प्रमेय के बारे में चर्चा करने से पूर्व आइए कुछ मूलभूत परिभाषाएं सीखते हैं।

परस्पर अपवर्जी एवं निशेष घटनाएँ :

एक प्रतिदर्श समष्टि S के लिए, घटनाएँ $E_1, E_2, \ldots E_n$ परस्पर अपवर्ती एवं निशेष घटनाएँ कहलाती हैं यदि

(i) $E_i \cap E_j = \phi, \forall\, i \neq j = 1, 2, \ldots\ldots n$ i.e. कोई भी दो घटनाएँ एक साथ नहीं घट सकतीं

(ii) $E_i \cup E_2 \cup \ldots. \cup E_n = S$, S के सभी परिणाम घटनाओं $E_1, E_2 \ldots E_n$ में सम्मिलित हैं।

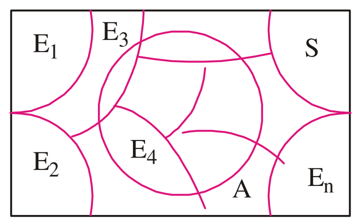
(iii) $P(E_i) > 0$ सभी $i = 1, 2, \ldots.. n$ के लिए।

19.10 सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय

मान लीजिए किसी प्रतिदर्श समष्टि S के लिए $E_1, E_2, \ldots., E_n$, परस्पर अपवर्ती एवं निशेष घटनाएँ हैं जहां $P(E_i) > 0, \ \forall\, i = 1, 2, \ldots n$. मान लीजिए कि A, प्रतिदर्श समष्टि S की कोई घटना है, तो

$$P(A) = P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) + \ldots + P(E_n)\,P(A/E_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)$$



$U(A \cap E_n)$

उपपत्ति : घटनाओं E_i एवं A को वेन चित्र से दर्शाया गया है :

दिया हुआ है

$S = E_1 \cup E_2, \cup E_3, \ldots \cup E_n$ और $E_i \cap E_j \neq \phi$.

हम लिख सकते हैं $A = A \cap S$

$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup \ldots \cup E_n)$

$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup (A \cap E_3) \ldots (A \cap E_n)$

क्योंकि सभी E_i, परस्पर अपवर्ती हैं इसलिए $A \cap E_1, A \cap E_2 \ldots$ भी परस्पर अपवर्ती होंगे।

$\Rightarrow \quad P(A) = P(A \cap E_1) + P(A \cap E_2) + P(A \cap E_3) + \ldots + P(A \cap E_n)$

$= P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)\,P(A/E_2) + \ldots + P(E_n)\,P(A/E_n)$

प्रायिकता के गुणन नियम के प्रयोग से

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)$$

19.11 बेज प्रमेय

यदि $E_1, E_2, \ldots E_n$ हमने प्रतिदर्श समष्टि S की परस्पर अपवर्ती, निशेष एवं अरिक्त घटनाएँ हैं $P(E_i) > 0 \ \forall\, i)$ और A शून्येतर प्रायिकता की कोई घटना हो, तो

$$P(E_i/A) = \frac{P(E_i)\,P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i)\,P(A/E_i)} \ \forall\, i = 1, 2, \ldots n$$

उपपत्ति : सम्पूर्ण प्रायिकता के नियम से हम जानते हैं

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)\, P(A/E_i) \qquad \text{...(i)}$$

प्रायिकता के गुणन नियम से हम प्राप्त करते हैं :

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)} = \frac{P(E_i)\, P(A/E_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(E_i) P(A/E_i)} \qquad \text{(i) के प्रयोग से}$$

यह बेज प्रमेय की उपपत्ति है। आइए अब हम प्रायिकता ज्ञात करने के लिए बेज प्रमेय का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 19.25. निम्नलिखित निर्देशों के साथ तीन सर्वसम (आकार एवं रूप दोनों में) सिक्के दिए हुए है।

सिक्का I : $P(H) = \frac{1}{3}$, $P(T) = \frac{2}{3}$

सिक्का II : $P(H) = \frac{3}{4}$ $P(T) = \frac{1}{4}$

सिक्का III : $P(H) = \frac{1}{2}$, $P(T) = \frac{1}{2}$ (सामान्य सिक्का)

एक सिक्के का यादृच्छ रूप से चयन किया जाता है और इसे उछाला जाता है। यदि परिणाम के रूप में चित प्राप्त होता है, तो इसकी प्रायिकता क्या है कि चयनित सिक्का III था?

हल : मान लीजिए E_1, E_2, E_3 क्रमशः सिक्के I, II, III के चयन की घटनाएँ हैं,

तो $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

मान लीजिए A घटना है : चयनित सिक्के को उछालने पर चित प्राप्त होता है।

तो $$P(A/E_1) = P\,(\text{सिक्के I पर स्थित}) = \frac{1}{3}$$

$$P(A/E_2) = P\,(\text{सिक्के II पर चित}) = \frac{3}{4}$$

$$P(A/E_3) = P\,(\text{सिक्के III पर चित}) = \frac{1}{2}$$

अब यह प्रायिकता कि उछाला हुआ सिक्का, III है $= P(E_3/A)$

$$= \frac{P(E_3)\, P(A/E_3)}{P(E_1)P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2) + P(E_3)P(A/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{6}{4+9+6} = \frac{6}{19}$$

उदाहरण 19.26. दो थैले I दिए हुए हैं। थैले I में 4 लाल और 3 काली गेंदें हैं जबकि थैले II में 6 लाल और 5 काली गेंदें हैं। एक थैले का चयन यादृच्छया किया जाता है और उसमें से एक गेंद निकाली जाती है। यदि यह दिया हुआ है कि निकाली गई गेंद लाल है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले II से निकाली गई थी।

हल : मान लीजिए E_1 एवं E_2 क्रमशः थैला I थैला II के चयन की घटनाएँ हैं और A लाल गेंद के चयन की घटना है।

इसलिए $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

एवं $$P(A/E_1) = P(\text{थैला I से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता}) = \frac{4}{7}$$

$$P(A/E_2) = P(\text{थैला II से लाल गेंद निकालने की प्रायिकता}) = \frac{6}{11}$$

अब बेज प्रमेय के अनुसार

$P(E_2/A) = P$ (यदि यह ज्ञात है कि निकाली गई गेंद लाल है, तो चयनित थैला II है)

$$= \frac{P(E_2)\,P(A/E_2)}{P(E_1)\,P(A/E_1) + P(E_2)P(A/E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}}{\frac{1}{2}\times\frac{6}{11}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}} = \frac{4/7}{\frac{6}{11}+\frac{4}{7}} = \frac{22}{43}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.6

1. थैला I में 3 नीली तथा 4 सफेद गेंदें हैं और थैला II में 4 नीली तथा 3 सफेद गेंदें हैं। एक थैले का यादृच्छया चयन किया गया और चयनित थैले में से एक गेंद निकाली गई। यदि निकाली गई गेंद सफेद हैं, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि यह गेंद थैले II से निकाली गई थी।

2. एक कारखाने में A तथा B दो मशीनें हैं। पूर्व विवरण से पता चलता है कि कुल उत्पादन का 60% मशीन A तथा 40% मशीन B द्वारा किया जाता है। इसके अतिरिक्त मशीन A का 2% तथा मशीन B का 1% उत्पाद खराब है। यदि कुल उत्पादन का एक ढेर बना लिया जाता है और उस ढेर से यादृच्छया निकाली गई वस्तु खराब हो, तो इस वस्तु के 'मशीन A' द्वारा बने होने की प्रायिकता क्या होगी?

3. जब कोई व्यक्ति वास्तव में टी.बी. से पीड़ित है तो छाती के एक्स–रे के निरीक्षण से टी. बी. के पता चलने की प्रायिकता 0.99, एक्स–रे के आधार पर डाक्टर द्वारा व्यक्ति को टी.बी. होने का गलत निदान करने की प्रायिकता 0.001 है। किसी शहर में 10,000 व्यक्तियों में से एक व्यक्ति को टी.बी. है। यदि यादृच्छया चयनित एक व्यक्ति को टी.बी. पाई जाती है, तो उस व्यक्ति को वास्तव में टी.बी. होने की प्रायिकता क्या है?

19.12 एक यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन

19.12.1 याद्रच्छिक चर

पूर्व खंड में आपने कुछ प्रतिबंधों के अन्तर्गत विभिन्न घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात करना सीखा है। आइए एक सिक्के को चार बार उछालने की चर्चा करते हैं। सभी संभावित परिणामों को एक प्रतिदर्श समष्टि में इस प्रकार दर्शाया जा सकता है।

S = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, THHT, HHTT, HTTH, TTHH, HTHT, THTH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}

इस प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक परिणाम के साथ एक संख्या जोड़ने की बात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए 'चितों की संख्या' के संगत प्रत्येक परिणाम के लिए एक संख्या हैं। इस संख्या को हम X कह सकते हैं।

स्पष्टतः

X(HHHH) = 4, X(HHHT) = 3, X(HHTH) = 3

X(THHH) = 3, X(HHTT) = 2, X(HTTH) = 2

X(TTHH) = 2, X(HTHT) = 2, X(THTH) = 2

X(THHT) = 2, X(HTTT) = 1, X(THTT) = 1

X(TTHT) = 1, X(TTTH) = 1, X(TTTT) = 0

इस प्रकार हम देखते हैं कि प्रत्येक परिणाम के संगत 0 एवं 4 के बीच X का कोई मान है। इस प्रकार के चर X को यादृच्छिक चर कहते हैं।

परिभाषा

यादृच्छिक चर वह फलन होता है जिसका प्रांत किसी यादृच्छिक परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि होता है और परिसर एक वास्तविक संख्या होती है।

उदाहरण 19.27. दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं। यादृच्छिक चर X, 'पासों के ऊपरी फलनों की संख्याओं का योग' का मान लिखिए।

हल : इस परीक्षण के प्रतिदर्श समष्टि में 36 तत्व हैं

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3) \ldots\ldots\ldots (1, 6)$$
$$(2, 1), (2, 2), (2, 3) \ldots\ldots\ldots (2, 6)$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$(6, 1), (6, 2), (6, 3) \ldots\ldots\ldots (6, 6)\}$$

स्पष्टतः प्रत्येक युग्म का योग 2 से 12 के बीच कोई संख्या है। इसलिए यादृच्छिक चर X के निम्नलिखित मान हैं :

$X(1, 1) = 2$

$X((1, 2), (2, 1)) = 3$

$X((1, 3), (2, 2), (3, 1)) = 4$

$X((1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1) = 5$

$X((1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1) = 6$

$X((1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1), = 7$

$X((2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2) = 8$

$X((3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) = 9$

$X((4, 6), (5, 5), (6, 4) = 10$

$X((5, 6), (6, 5)) = 11$

$X((6, 6)) = 12$

19.12.2 यादृच्छिक चर की प्रायिकता बंटन

ताश के 52 पत्तों की एक सुमिश्रित गड्डी से दो पत्ते उत्तरोत्तर (एक के बाद दूसरा) प्रतिस्थापना के साथ निकालने के परीक्षण की चर्चा करते हैं। इस प्रकार निकाले गए दो पत्तो में इक्कों की संख्या पर हम अपना ध्यान केन्द्रित करते हैं। इसे X से दर्शाते हैं। स्पष्टतः X के मान 0, 1, 2 हो सकते हैं।

इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है : S = {(इक्का, इक्का), (इक्का, इक्का नहीं), (इक्का नहीं, इक्का), (इक्का नहीं, इक्का नहीं)}

X(इक्का, इक्का) = 2

X{(इक्का, इक्का नहीं) अथवा (इक्का नहीं, इक्का)} = 1

और X{(इक्का नहीं, इक्का नहीं)} = 0

$$P(X=2) = P(\text{इक्का, इक्का}) = \frac{4}{52}\times\frac{4}{52} = \frac{1}{13}\times\frac{1}{13} = \frac{1}{169}$$

$$P(X=1) = P[(\text{इक्का, इक्का नहीं}) \text{ अथवा } (\text{इक्का नहीं, इक्का})]$$

$$= \frac{4}{52}\times\frac{48}{52}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{52}$$

$$= \frac{12}{169}+\frac{2}{169}=\frac{24}{169}$$

$$P(X=0) = P(\text{इक्का नहीं, इक्का नहीं})$$

$$= \frac{48}{52}\times\frac{48}{52}=\frac{144}{169}$$

यादृच्छिक चर के मान और उनके संगत प्रायिकताओं का वर्णन प्रायिकता बंटन कहलाता है।

परिभाषा

यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन X के प्रत्येक मान के लिए प्रायिकताओं का बंटन है। यादृच्छिक चर X की प्रायिकता बंटन को निम्न प्रकार दर्शाया जाता है :

X_i	:	x_1	x_2	x_3	....	x_n
$P(X_i)$	:	P_1	P_2	P_3	....	P_n

जहाँ $P_i > 0, \sum_{i=1}^{n} P_i = 1, \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots n$.

वास्तविक संख्याएँ $x_1, x_2, \ldots x_n$ चर X के संभावित मान है और यादृच्छिक चर x के मान X_i की प्रायिकता P_i है, इसे $P(X = x_i) = P_i$ के रूप में लिखा जाता है।

अतः ताश के 52 पत्तों की सुमिश्रित गड्डी से दो पत्तों को उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकालने का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X	:	0	1	2
$P(x_i)$	:	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

ध्यान दीजिए प्रायिकता बंटन में प्रत्येक प्रायिकता का मान 0 एवं 1 के मध्य होना चाहिए और सभी प्रायिकताओं का योग 1 होना चाहिए।

$$\Sigma P_i = \frac{144}{169} + \frac{24}{169} + \frac{1}{169} = \frac{144+24+1}{169} = 1$$

उदाहरण 19.28. जाँचिए कि निम्न बंटन प्रायिकता बंटन है या नहीं

X	2	1	0	–1	–2
P(X)	0.1	0.2	0.3	0.2	0.2

हल : सभी प्रायिकताएँ P(X) धनात्मक हैं और 1 से छोटी हैं। इसके अतिरिक्त

$$\Sigma P(x_i) = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.2 + 0.2$$
$$= 1.0$$

अतः दिया हुआ बंटन यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन है।

उदाहरण 19.29. एक यादृच्छिक चर X का प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है :

X	–1	–2	–3	–4	–5	–6
P(X)	$\frac{1}{3}$	k	$\frac{1}{4}$	$2k$	$\frac{1}{6}$	$\frac{k}{4}$

ज्ञात कीजिए : (1) k (2) $P(X > -4)$ (3) $P(X < -4)$

हल : (1) दिए हुए बंटन में प्रायिकताओं का योग 1 होना चाहिए।

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3} + k + \frac{1}{4} + 2k + \frac{1}{6} + \frac{k}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{4+12k+3+24k+2+3k}{12} = 1$$

$$39k + 9 = 12$$

$$\Rightarrow \quad 39k = 3$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{13}$$

(2) $$P(X > -4) = P(x = -3) + P(x = -2) + P(x = -1)$$

$$= \frac{1}{4} + k + \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} + \frac{1}{3} = \frac{103}{156}$$

(3) $$P(X < -4) = P(x = -5) + P(x = -6)$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{k}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{13 \times 4} = \frac{29}{156}$$

उदाहरण 19.30. तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर पटों की संख्या की प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

हल : तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि इस प्रकार है :

S = {HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT}

मान लीजिए पटों की संख्या X है।

स्पष्टतः X के मान 0, 1, 2, 3 हैं।

अब

$$P(X = 0) = P(HHH) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= P(HHT \text{ or } HTH \text{ or } THH) \\ &= P(HHT) + P(HTH) + P(THH) \\ &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X = 2) &= P(HTT \text{ or } THT \text{ or } TTH) \\ &= P(HTT) + P(THT) + P(TTH) \\ &= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = \frac{3}{8} \end{aligned}$$

$$P(X = 3) = P(TTT) = \frac{1}{8}.$$

अतः अभीष्ट प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X	:	0	1	2	3
P(X)	:	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

देखें आपने कितना सीखा 19.7

1. बताइए निम्न में से कौन से बंटन यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन नहीं हैं? अपने उत्तर को उचित ठहराइए।

(a)

x	100	200	300
P(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

(b)

Y	0	1	2	3	4	5
P(y)	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6

(c)

x_i	–1	–2	0	2	1
P_i	0.2	0.15	–0.5	0.45	0.7

(d)

x_i	2	3	4	5
P_i	0.4	0.1	0.2	0.2

2. निम्नलिखित प्रश्न हल कीजिए :

(a) एक थैले में 4 लाल तथा 3 सफेद गेंदें हैं और उसमें से दो गेंदें उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाली जाती हैं, तो लाल गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

(b) जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं तो छः की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

(c) जब दो पासे एक साथ फेंके जाते हैं तो पासों के द्विक (दोनों पासों पर एक जैसी संख्या) होने की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

19.13 यादृच्छिक चर का माध्य एवं प्रसरण

19.13.1 माध्य

यादृच्छिक चर X के माध्य को μ से प्रदर्शित करते हैं और इसे

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \text{ द्वारा परिभाषित}$$

किया जाता है जहाँ $\Sigma P_i = 1$, $P_i > 0$, $\forall i = 1, 2, \ldots n$.

दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि यादृच्छिक चर का माध्य, चर के मान और संगत प्रायिकताओं के गुणनफलों का योग है। यादृच्छिक चर के माध्य को प्रत्याशा (expectation) भी कहते हैं और इसे $E(x)$ से व्यक्त करते हैं।

इसलिए $$E(x) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P_i \,.$$

19.13.2 प्रसरण

स्मरण कीजिए, बारंबारता बंटन में हमने पढ़ा है कि प्रसरण प्रकीर्णन का एक माप अथवा मानों में विचरण का माप है। यादृच्छिक चर के प्रसरण का अर्थ भी वही है।

परिभाषा : मान लीजिए एक बारंबारता बंटन इस प्रकार दिया गया है :

X_i	:	x_1	x_2	x_3	...	x_n
$P(X_i)$	:	P_1	P_2	P_3	...	P_n

मान लीजिए $\mu = E(x)$, x का माध्य है।

X के प्रसरण को σ_x^2 द्वारा व्यक्त किया जाता है और इसे इस प्रकार परिभाषित किया गया है :

$$\sigma_x^2 = \text{प्रसरण } (x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 P_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_1^2 p_i + \mu^2 p_i - 2\mu\, x_i p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i^2 P_i + \mu^2 P_i - 2\mu x_i\; p_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \sum_{i=1}^{n} \mu^2 P_i - \sum_{i=1}^{n} 2\mu x_i\; p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 \sum_{i=1}^{n} P_i - 2\mu \sum_{i=1}^{n} x_i\; p_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i + \mu^2 .1 - 2\,\mu.\mu$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 \quad \left(\because\; \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i \text{ तथा } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\right)^2$$

हम इसे इस प्रकार भी लिख सकते हैं

प्रसरण $(x) = \mathrm{E}(\mathrm{X}^2) - [\mathrm{E}(\mathrm{X})]^2$

उदाहरण 19.31. निम्नलिखित बंटन का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए :

x	–2	–1	0	1	2
P(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

हल : दिया हुआ बंटन है :

X_i	–2	–1	0	1	2
$\mathrm{P}(\mathrm{X}_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$\mathrm{X}_i\mathrm{P}(\mathrm{X}_i)$	$-\frac{2}{8}$	$-\frac{2}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$
$x^2\mathrm{P}(\mathrm{X}_i)$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$

अब, $\mu = \Sigma P(X_i)X_i = -\frac{2}{8}-\frac{2}{8}+0+\frac{1}{8}+\frac{2}{8} = -\frac{1}{8}$

प्रसरण (x) $= \Sigma X_i^2 P(X_i) - [\Sigma P(X_i)X_i]^2$

$$= \left[\frac{4}{8}+\frac{2}{8}+0+\frac{1}{8}+\frac{4}{8}\right]-\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{11}{8}-\frac{1}{64}=\frac{87}{64}$$

देखें आपने कितना सीखा 19.8

1. निम्नलिखित बंटनों के लिए माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए :

(a)

X	:	1	2	3	4
P(X)	:	0.3	0.2	0.4	0.1

(b)

y_i	-2	-1	0	1	2
$P(y_i)$	0.1	0.2	0.3	0.25	0.15

2. एक निष्पक्ष (fair) सिक्के को तीन बार उछालने में चितों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।
3. मान लीजिए दो निष्पक्ष पासों को फेंकने पर प्राप्त संख्याओं के अन्तर को X से व्यक्त किया जाता है। X का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए (अन्तर का निरपेक्ष मान लीजिए)
4. एक अभिनत सिक्के को उछालने पर 25% चित एवं 75% पट प्राप्त होने की उम्मीद है। इस सिक्के को दो बार उछाला जाता है। प्राप्त पटों की संख्या का माध्य ज्ञात कीजिए।
5. दो पासों को फेंकने पर छः की संख्याओं का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

19.14 बरनौली अभिप्रयोग

जब एक जैसे प्रतिबंधों के अन्तर्गत किसी परीक्षण की पुनरावृत्ति की जाती है तो प्रत्येक बार की गई पुनरावृत्ति एक अभिप्रयोग कहलाती है। उदाहरण के लिए यदि एक सिक्के को तीन बार उछाला जाता है, तो हम कहते हैं कि सिक्के को उछालने के तीन अभिप्रयोग हैं।

किसी विशिष्ट घटना को अभिप्रयोग की सफलता कहा जा सकता है। स्पष्टतः किसी घटना का घटित नहीं होना असफलता कहा जाएगा। उदाहरण के लिए एक पासे को उछालने पर यदि 4 से छोटी संख्या प्राप्त होगी को सफलता माना जाता है तो 4 से छोटी प्राप्त नहीं होना असफलता माना जाएगा। इस प्रकार प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परिणाम हो सकते हैं, सफलता अथवा असफलता।

किसी यादृच्छया परीक्षण के दो अथवा अधिक अभिप्रयोग दो प्रकार से किए जा सकते हैं :

1. सफलता अथवा असफलता की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में स्थिर रहे। उदाहरण के लिए एक सिक्के को n बार उछालने पर, प्रत्येक अभिप्रयोग में चित प्राप्त होने की प्रायिकता $\frac{1}{2}$ है, इस प्रकार के अभिप्रयोग स्वतंत्र अभिप्रयोग कहलाते हैं।

2. सफलता अथवा असफलता की प्रायिकता प्रत्येक अभिप्रयोग में बदलती रहे। उदाहरण के लिए ताश के पत्तों की गड्डी में से प्रतिस्थापना के बिना उत्तरोत्तर पत्ते (एक के बाद दूसरा) निकालना। इस प्रकार के अभिप्रयोगों में यदि हुकम का पत्ता प्राप्त होना सफलता माना जाए तो प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता बदलती रहेगी।

i.e.	अभिप्रयोग	प्रथम	द्वितीय	तृतीय,....
	प्रायिकता	$\frac{13}{52}$	$\frac{12}{51}$	$\frac{11}{50}, \ldots$

प्रथम प्रकार के अभिप्रयोग i.e. स्वतंत्र अभिप्रयोग जिनमें केवल सफलता अथवा असफलता नामक दो परिणाम होते हैं, बरनौली अभिप्रयोग कहलाते हैं।

परिभाषा : किसी यादृच्छिक परीक्षण के अभिप्रयोग बरनौली परीक्षण कहलाते हैं, यदि प्रत्येक अभिप्रयोग के दो परिणाम (सफलता अथवा असफलता) हैं, अभिप्रयोग स्वतंत्र और सीमित हैं।

19.15 द्विपद बंटन

किसी यादृच्छिक परीक्षण के बरनौली अभिप्रयोगों की सफलता की संख्या का प्रायिकता बंटन, $(q + p)^n$ के प्रसार से प्राप्त किया जा सकता है जहाँ

$p =$ प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता

$q = 1 - p,$ = असफलता की प्रायिकता

$n =$ अभिप्रयोगों की संख्या

इस प्रकार का प्रायिकता बंटन द्विपदी बंटन कहलाता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि किसी यादृच्छिक परीक्षण के n बरनौली अभिप्रयोगों में, सफलताओं की संख्या का मान 0, 1, 2, 3, ...n हो सकता है।

इसलिए X की सफलताओं की संख्या का प्रायिकता बंटन निम्न प्रकार है :

$P(X = 0) = (q + p)^n$ के प्रसार में प्रथम पद

$P(X= 1) = (q + p)^n$ के प्रसार में द्वितीय पद

$\vdots$

$P(X = r) = (q + p)^n$ के प्रसार में $(r + 1)$वाँ पद

$\vdots$

$P(X = n) = (q + p)n$ के प्रसार में $(n + 1)$वाँ पद

हम जानते हैं कि

$$(q + p)^n = {}^nC_0\, q^n + {}^nC_1\, q^{n-1}\, p + {}^nC_2\, q^{n-2} p^2 + \ldots + {}^nC_r\, q^{n-r} p^r + \ldots + {}^nC_n p^n$$

$$\Rightarrow \quad P(x = 0) = {}^nC_0\, q^n$$

$$P(x = 1) = {}^nC_1\, q^{n-1} p$$

$$P(x = 2) = {}^nC_2\, q^{n-2} p^2$$

$$\vdots$$

$$P(X = r) = {}^nC_r\, q^{n-r} p^r$$

$$\vdots$$

$$P(X = n) = {}^nC_n\, p^n.$$

एक द्विपद बंटन, जिसमें n बरनौली अभिप्रयोग हो और प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता P है, को $B(n, p)$ से व्यक्त करते हैं।

आइए उदाहरणों की सहायता से द्विपद बंटन को समझते हैं।

उदाहरण 19.32. तीन बरनौली अभिप्रयोगों में सफलताओं की संख्या का द्विपद बंटन लिखिए।

हल : मान लीजिए $p =$ प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता

$q =$ प्रत्येक अभिप्रयोग में असफलता की प्रायिकता

स्पष्टतः $q = 1 - p$

तीन अभिप्रयोगों में सफलता की संख्या के मान 0, 1, 2 अथवा 3 हो सकते हैं।

तीन अभिप्रयोगों का प्रतिदर्श समष्टि

$$S = \{SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF\}$$

जहाँ S और F क्रमशः सफलता एवं असफलता को व्यक्त करते हैं।

$$P(S = 0) = P(FFF) = P(F)\,P(F)\,P(F)$$
$$= q.q.q = q^3$$
$$P(S = 1) = P(SFF, FSF \text{ or } FFS)$$
$$= P(SFF) + P(FSF) + P(FFS)$$
$$= P(S).P(F)\,P(F) + P(F).P(S).P(F) + P(F)\,P(F)\,P(S)$$
$$= p.q.q. + q.p.q + q.q.p$$
$$= 3\,q^2p$$
$$P(S = 2) = P(SSF \text{ अथवा } SFS \text{ or } FSS)$$
$$= P(SSF) + P(SFS) + P(FSS)$$
$$= P(S).P(S).P(F) + P(S)\,P(F)P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S)$$
$$= p.p.q + p.q.p + q.p.p$$
$$= 3qp^2$$
$$P(S = 3) = P(SSS) = P(S)\,.\,P(S)\,.\,P(S)$$
$$= p.p.p = p^3$$

अतः सफलताओं की संख्या की प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

X_i	:	0	1	2	3
$P(X_i)$	:	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

इसके साथ–साथ $(q + p)^3 = q^3 + 3q^2p + 3p^2q + p^3$

ध्यान दीजिए 0, 1, 2, 3 सफलताओं की प्रायिकता क्रमशः $(q + p)^3$ के प्रसार के प्रथम, द्वितीय, तृतीय एवं चौथे पद हैं।

उदाहरण 19.33. एक पासा 5 बार फेंका जाता है। यदि सम संख्या प्राप्त करना एक सफलता है, तो

(a) 5 सफलताओं (b) कम से कम 4 सफलताएँ

(c) अधिकतम 3 सफलताओं, की प्रायिकता क्या है?

हल : दिया हुआ है X : ''एक सम संख्या''

तब p = P(एक सम संख्या) = $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

q = P(एक सम संख्या नहीं) = $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

क्योंकि पासे को फेंकने के अभिप्रयोग बरनौली अभिप्रयोग हैं।

इसलिए, P(r सफलता) = ${}^{n}C_r\, q^{n-r} p^r$

यहाँ, $n = 5 = {}^{5}C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = {}^{5}C_r\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$

(*a*) P(5 सफलता) = ${}^{5}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{5}=\frac{1}{32}$

(b) P(कम से कम 3 सफलता)

= P(3 सफलता अथवा 4 सफलता अथवा 5 सफलता)

= P(3 सफलता) + P(4 सफलता) + P(5 सफलता).

$$= {}^{5}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + {}^{5}C_4\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + {}^{5}C_5\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{5}\left(\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}+5+1\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{5}(10+5+1)=\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$$

(c) P(अधिकतम 3 सफलता)

= P(0 सफलता अथवा 1 सफलता अथवा 2 सफलता अथवा 3 सफलता)

= P(0 सफलता) + P(1 सफलता) + P(2 सफलता) + P(3 सफलता)

$$= {}^{5}C_0\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + {}^{5}C_1\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + {}^{5}C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{5} + {}^{5}C_3\left(\frac{1}{2}\right)^{5}$$

$$= \frac{1}{32}+5\times\frac{1}{32}+\frac{5\times4}{2\times1}\times\frac{1}{32}+\frac{5\times4\times3}{3\times2\times1}\times\frac{1}{32}$$

$$= \frac{1}{32}[1+5+10+10]=\frac{26}{32}=\frac{13}{16}.$$

देखें आपने कितना सीखा 19.9

1. यदि एक न्याय सिक्के को 10 बार उछाला जाए तो निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए :

(a) 6 चित (b) कम से कम 6 चित (c) अधिकतम 6 चित

2. एक पासों के युग्म को 4 बार उछाला जाता है। यदि द्विक (1, 1), (2, 2)...} प्राप्त करना सफलता है; तो दो सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. एक थैले में 3 लाल और 4 काली गेंदें हैं। उसमें से पाँच गेंद उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाली जाती हैं। यदि "काली गेंद" प्राप्त करना एक सफलता माना जाए, तो 3 सफलताएँ प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
4. किसी कारखाने में निर्मित बल्बों में से 5% बल्ब खराब हैं। यादृच्छया लिए गए 10 बल्बों में 1 से ज्यादा खराब बल्ब नहीं होगा इसकी प्रायिकता क्या है?
5. एक कारखाने में निर्मित सीएफएल की 1 वर्ष के बाद खराब होने की प्रायिकता 0.01 है। इस कारखाने में निर्मित 5 सीएफएल में से 1 वर्ष बाद
   (a) शून्य
   (b) अधिकतम एक
   (c) एक से अधिक
   (d) न्यूनतम एक, सीएफएल
   के खराब होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

आइये दोहराएँ

- एक घटना का पूरक किसी घटना के पूरक में वे सभी परिणाम होते हैं जो इस घटना के अनुकूल न हों, तथा इसे A नहीं अथवा $\overline{A}$ से लिखा जाता है।
- घटना A या B: घटना A या B तब घटित होती है जब घटना A या घटना B या दोनों घटित हों।
- घटना A और B:घटना A और B में वे सब परिणाम होते हैं जो दोनों में उभयनिष्ठ हों।
- योग का नियम: कोई दो घटनाओं के लिए

$$P(A \text{ अथवा } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ और } B)$$

- परस्पर अपवर्जी घटनाओं के लिए योग का नियम

  यदि A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाऐं हों तो

$$P(A \text{ या } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- घटना के अनुकूल संयोगानुपात यदि A के संयोगानुपात a से b है तो

$$P(A) = \frac{a}{a+b}$$

  यदि A के प्रतिकूल संयोगानुपात a से b हैं तो

$$P(A) = \frac{b}{a+b}$$

- दो घटनाऐं परस्पर अपवर्जी हाती है यदि घटित घटना दूसरी घटना को घटित होने से रोके।
- दो घटनाऐं स्वतन्त्र होती हैं, यदि एक के घटने का प्रभाव दूसरे पर नहीं पड़ता।

  यदि A और B स्वतंत्र घटनाएं हैं तो

$P(A \text{ और } B) = P(A).P(B)$

या $P(A \cap B) = P(A) . P(B)$

- दो पराश्रित घटनाओं के लिए

  $P(A \cap B) = P(A)\, P(B \mid A),\ P(A) > 0$

  या $P(A \cap B) = P(B)\, P(A \mid B),\ P(B) > 0$

- प्रतिबंधी प्रायिकता $P(A/B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$ तथा $P(B/A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

- सम्पूर्ण प्रायिकता की प्रमेय:

  $P(A) = P(E1).P(A \mid E1) + PE2\ P(A \mid E2) + ... + P(E1)\ P(A \mid E2)$

- बेज प्रमेय: यदि B1, B2, ..., Bn परस्पर अपवर्ती घटनाएं हैं और A एक ऐसी घटना है जो B1, अथवा B2 अथवा Bn के साथ घटित होती है, तो

  $$P(Bi/A) = \frac{P(Bi).P(A \mid Bi)}{\sum_{i=1}^{n} P(Bi).P(A \mid Bi)} \quad \text{जहां } i = 1, 2, ..., n$$

- यादृच्छिक चर का माध्य तथा प्रसरण:

  $$m = E(X) = \frac{n}{2} XiPi$$

  $$\sigma^2 = \frac{n}{2}(Xi - m)^2 = \frac{n}{2} X_i^2 Pi - m^2$$

- द्विपद बंटन $P(X = r) = {}^nC_r\, q^{n-r} \cdot p^r$

सहायक वेबसाइट

- *http://en.wikipedia.org/wiki/Probability*
- *http://mathworld.wolfram.com/Probability*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/probability _distribution*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Probability_theory*
- *http://en.wikipedia.org/wiki/Bernoulli_distribution*

आइए अभ्यास करें

1. चार सिक्के उछालने पर प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब (a) तीन चित आएं (b) कम से कम 3 चित आएं (c) अधिक से अधिक तीन चित आएं।
2. दो पासे एक बार फेंके गए। उस घटना की प्रायिकता निकालिए पहले पासे पर या तो विषम संख्या आए या अंकों का योग 7 हो।
3. पहले दो सौ पूर्णांकों में से एक पूर्णांक यादृच्छिक रूप से चुना गया। चुने गये पूर्णांक 6 या 8 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

4. एक बैग में 13 गेंदें है जिनमें 1 से 13 नम्बर लिखे हैं। यादृच्छ रूप से एक गेंद निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब निकाली गई गेंद का नम्बर 2 या 3 से विभाजित हो।

5. उस घटना की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब चार बार सिक्का उछालने पर 2 या 3 बार चित आए।

6. क्या निम्नलिखित प्रायिकताएं संगत हैं :

   (a) $P(A) = 0.6,\ P(B) = 0.5$, $P($A और B$) = 0.4$

   (b) $P(A) = 0.2,\ P(B) = 0.3$, $P($A और B$) = 0.4$

   (c) $P(A) = P(B) = 0.7$, $P($A और B$) = 0.2$

7. एक बक्से में 25 टिकटें हैं जिन पर 1 से 25 नम्बर लिखे हैं। दो टिकटें यादृच्छिक रूप से निकाली गईं। क्या प्रायिकता है कि निकाली गई टिकटों के नम्बरों का गुणनफल सम हो।

8. एक दराज में 50 कुण्डे और 150 पेंच हैं। आधे कुण्डे और आधे पेंचों को जंग लग गया है। यदि दराज में कोई एक वस्तु यादृच्छिक रूप से निकाली जाए तो क्या प्रायिकता है कि उस वस्तु में जंग लगा हो या वह कुण्डा हो ?

9. एक स्त्री 12 अंडे खरीदती है जिसमें से दो अंडे खराब हैं। स्त्री ने फेंटने के लिए चार अण्डे निकाले: प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब (a) चारों अंडे ठीक हों। (b) तीन अच्छे और एक खराब हों (c) दो अच्छे और दो खराब हों (d) कम से कम एक खराब हो।

10. दो पत्तों को यादृच्छिक रूप से निकालना है जो पुन: नहीं रखे जाते। प्रायिकता ज्ञात कीजिए जब दोनों लाल हों या दोनों बादशाह हों।

11. माना A और B दो घटनाएं हैं जबकि $P(\bar{A}) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{2}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, तो $P(A/B)$ और $P(B/A)$ ज्ञात कीजिए।

12. एक बैग में 10 काले रंग की और 5 सफेद रंग की गेंदें हैं। बैग में से दो गेंद बिना वापिस रखे (एक के बाद दूसरी) निकाली जाती है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि निकाली गई दोनों गेंद काले रंग की हैं।

13. दो पासों को फेंकने पर प्राप्त अंकों के योग को यदि X से व्यक्त किया जाए, तो X का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

14. एक कलश में 4 काली, 2 लाल और 2 सफेद गेंदें हैं। कलश में से दो गेंद यादृच्छय रूप से उत्तरोत्तर (एक के बाद दूसरी) बिना प्रतिस्थापना के निकाली जाती हैं। काली गेंदों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

15. ताश के 52 पत्तों की गड्डी में से 2 पत्ते युगपत् रूप (एक साथ) से निकाले जाते हैं। बादशाहों की संख्या का माध्य एवं प्रसरण ज्ञात कीजिए।

16. एक थैले में 5% खराब बोल्ट हैं। उसमें से 10 बोल्ट उत्तरोत्तर प्रतिस्थापना के साथ निकाले जाते हैं। कम–से–कम एक खराब बोल्ट होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

17. द्विपद, $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ का माध्य ज्ञात कीजिए।

18. एक पासे को बार–बार तब तक फेंका जाता है जब तक तीन छः प्राप्त नहीं हो जाएँ। तीसरे छः को छठे प्रयास में प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

19. किसी व्यक्ति द्वारा एक न्याय सिक्के को कितनी बार अवश्य उछाला जाना चाहिए ताकि कम–से–कम एक चित प्राप्त होने की प्रायिकता 90% से अधिक हो।

20. एक पासे को 7 बार फेंकने पर संख्या 5 को दो बार प्राप्त होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

21. एक न्याय सिक्के को तीन बार उछालने पर चितों की माध्य संख्या ज्ञात कीजिए।

22. एक कारखाने में नट बनाए जाते हैं। उस कारखाने में तीन मशीनें A, B तथा C क्रमशः द्वारा निर्मित उत्पाद में से क्रमशः 5%, 4% एवं 2% नट खराब पाए जाते हैं। उत्पाद के ढेर में से एक नट यादृच्छया उठाया जाता है और वह खराब पाया जाता है। इस बात की प्रायिकता क्या है कि यह नट मशीन C द्वारा निर्मित है?

उत्तरमाला

देखें आपने कितना सीखा 19.1

1. $\frac{1}{6}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. $\frac{3}{4}$

5. (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{2}{5}$

6. (i) $\frac{5}{36}$ (ii) $\frac{5}{36}$ (iii) $\frac{1}{12}$ (iv) $\frac{1}{36}$

7. $\frac{5}{9}$ 8. $\frac{1}{12}$ 9. $\frac{1}{2}$

10. (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) $\frac{1}{52}$

11. (i) $\frac{5}{12}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{11}{36}$

12. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{7}{8}$ (iii) $\frac{1}{8}$

देखें आपने कितना सीखा 19.2

1. $\frac{1}{8}$ 2. $\frac{20}{39}$ 3.(a) $\frac{4}{25}$ (b) $\frac{38}{245}$

4. $\frac{1}{5525}$ 6. (i) $\frac{3}{10}$ (ii) $\frac{1}{6}$ (iii) $\frac{1}{30}$

7. $\frac{10}{133}$ 8. $\frac{4}{7}$ 9. $\frac{60}{143}$ 10. $\frac{1}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 19.3

1. $\frac{4}{13}$ 2. $\frac{7}{36}$ 3. $\frac{9}{16}$ 4. $\frac{7}{12}$

5. $\frac{4}{9}$ 6. $\frac{1}{2}$ 7. $\frac{7}{13}$ 8. $\frac{5}{12}$

9. (a) $\frac{5}{18}$ (b) 0.7   10. $\frac{4}{11}$

11. (a) $\frac{5}{6}$ (b) $\frac{35}{36}$ 12. $\frac{3}{4}$

13 (a) A के अनुकूल संयोगानुपात 7:3. A के प्रतिकूल 3:7

(b) A के अनुकूल संयोगानुपात 4:1 A के प्रतिकूल संयोगानुपात 1:4

14. (a) $\frac{7}{9}$ (b) $\frac{7}{17}$ 15. (a) $\frac{5}{9}$ (b) $\frac{3}{4}$

16. (a), (c)   17. $\frac{4}{7}$ 18. $\frac{1}{4}$

देखें आपने कितना सीखा 19.4

1. (a) $\frac{2}{7}$ (b) $\frac{1}{35}$ (c) $\frac{24}{35}$ (d) $\frac{11}{35}$

2. (a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ 3 . $\frac{1}{4}$

4. (a) $\frac{1}{35}$ (b) $\frac{11}{35}$ 5. $\frac{1}{2}$

6. (a) $\frac{5}{144}$ (b) $\frac{1}{1014}$ 7. $\frac{53}{80}$

8. (a) $\frac{36}{169}$ (b) $\frac{84}{169}$ (c) $\frac{120}{169}$ (d) $\frac{49}{169}$

9. (a) स्वतंत्र   (b) स्वतन्त्र

देखें आपने कितना सीखा 19.5

1. $\frac{13}{51}$ 2. $\frac{1}{2}$ 3. $\frac{25}{204}$

4. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 5. $\frac{3}{7}$

देखें आपने कितना सीखा 19.6

1. $\frac{3}{7}$ 2. $\frac{3}{4}$ 3. $\frac{10}{111}$

देखें आपने कितना सीखा 19.7

1. (a) हाँ   (b) नहीं क्योंकि $\Sigma P_i \neq 1$

(c) नहीं क्योंकि P_i की एक मात्रा ऋणात्मक है

(d) नहीं क्योंकि $\Sigma P_i \neq 1$

2. (a)

x :	0	1	2
$P(x)$:	$\frac{9}{49}$	$\frac{24}{49}$	$\frac{16}{49}$

(b)

X_i :	0	1	2
$P(X_i)$:	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

देखें आपने कितना सीखा 19.8

1. (a) $\mu = 2.3$, प्रसरण $= 1.01$

   (b) $\mu = 0.15$, प्रसरण $= 0.4275$

2. $\mu = \frac{3}{2}$

3.

X :	0	1	2	3	4	5
$P(X_i)$:	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

4. $\mu = \frac{3}{2}$, प्रसरण $(X_i) = \frac{3}{8}$

5. माध्य $= \frac{1}{3}$, प्रसरण $= \frac{5}{18}$

देखें आपने कितना सीखा 19.9

1. (i) $\frac{105}{512}$ (ii) $\frac{193}{512}$ (iii) $\frac{53}{64}$

2. $\frac{25}{216}$ 3. $\frac{90 \times 64}{7^5}$ 4. $\left(\frac{29}{20}\right)\left(\frac{19}{20}\right)^9$

5. (a) $\left(\frac{99}{100}\right)^5$ (b) $\left(\frac{99}{100}\right)^5 + 5.\frac{99^4}{100^5}$

   (c) $1-\left\{\left(\frac{99}{100}\right)^5 + \frac{5 \times 99^4}{100^5}\right\}$ (d) $1-\left(\frac{99}{100}\right)^5$

आइए अभ्यास करें

1. (a) $\frac{1}{4}$ (b) $\frac{5}{16}$ (c) $\frac{15}{16}$ 2. $\frac{7}{12}$

3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{8}{13}$ 5. $\frac{5}{8}$

6. केवल (a) संगत   7. $\frac{456}{625}$ 8. $\frac{5}{8}$

9. (a) $\frac{14}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ (c) $\frac{1}{11}$ (d) $\frac{19}{33}$

10. $\frac{55}{221}$ 11. $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}$ 12. $\frac{3}{7}$

13.

X_i :	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X_i)$:	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

14.

x :	0	1	2
$P(x)$:	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{14}$

15. माध्य $= \frac{34}{221}$, प्रसरण $= \frac{6800}{(221)^2}$.

16. $1-\left(\frac{19}{20}\right)^{10}$ 17. $\frac{4}{3}$ 18. $\frac{625}{23328}$

19. $n = 4$ 20. $\frac{7}{12}\times\left(\frac{5}{6}\right)^5$ 21. 1.5

22. $\frac{4}{17}$

माड्यूल I

समुच्चय, संबंध एवं फलन

1. समुच्चय
2. संबंध एवं फलन
3. त्रिकोणमितीय फलन-I
4. त्रिकोणमितीय फलन-II
5. त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों में संबंध

मॉडयूल-I: समुच्चय, संबंध एवं फलन

समुच्चय एवं फलन मुख्य आधारभूत अवधारणाएं हैं जो एक साथ मिलकर गणित का आधार बनाती हैं। गणित की विभिन्न शाखाओं में इन दो आधारभूत अवधारणाओं का प्रयोग किया जाता है। यह मॉडयूल आपको वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर परिभाषित समुच्चयों, संबंधों तथा फलनों की अवधारणओं एवं परिभाषाओं को समझने के लिए प्रेरित करेगा। आपके लिए यह भी महत्वपूर्ण बात होगी कि आप फलनों को त्रिकोणमितीय अनुपातों से संबंधित कर सकेंगे। यह मॉडयूल आपको को संबंधों तथा फलनों से संबंधित गुणों को समझने में सहायता करेगा। यह अवधारणाएं अन्य अवधारणाओं जैसे त्रिकोणमितीय फलन, त्रिकोणमितीय तत्समकों और त्रिकोणमितीय समीकरणों को हल करने के लिए विभिन्न कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपात, त्रिभुज की भुजाओं एवं कोणों को ज्ञात करने के लिए ज्या एवं कोज्या नियमों का उपयोग एवं त्रिकोणमितीय फलनों के आलेखों को समझने में सहायता करेंगी। समुच्चयों, संबंधों तथा फलनों की अवधारणात्मक समझ पुस्तक 2 में मॉडयूल-VIII में दी गई अन्य अवधारणाओं जैसे संबंध, फलन तथा प्रतिलोम त्रिकोणमितीय फलन को समझने में सहायता करेंगी।

माड्यूल II

अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

6. अनुक्रम तथा श्रेणियाँ
7. कुछ विशेष श्रेणियाँ

मॉडयूल-II: अनुक्रम तथा श्रेणियाँ

मानवीय गतिविधियों के विभिन्न क्षेत्रों में अनुक्रम के बहुत से महत्वपूर्ण अनुप्रयोग हैं। इस मॉडयूल के द्वारा आप अनुक्रम तथा अनुक्रम के पद की अवधारणाओं को समझ सकेंगे। ऐसे अनुक्रम जो एक विशेष पैटर्न का अनुसरण करते है, श्रेणी कहलाते हैं। एक अनुक्रम जिसके किसी भी दो क्रमागत पदों का अन्तर निश्चित होता है, समान्तर श्रेणी कहलाती है तथा यदि किसी भी दो क्रमागत पदों का अनुपात निश्चित होता है, जो वह गुणोत्तर श्रेणी कहलाती है। श्रेणी में किसी भी पद का मान जानने के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि एक ऐसे नियम को परिभाषित किया जाए जो श्रेणी को प्रदर्शित करता हो। एक ऐसे नियम को परिभाषित करने की भी आवश्यकता होगी जिसकी सहायता से श्रेणी के सभी पदों का योग ज्ञात किया जा सके। इस मॉडयूल के द्वारा आप समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा इन दोनों माध्यों में संबंध को समझ सकेंगे। इस मॉडयूल के अन्त में आप श्रेणी की अवधारणा को समझ सकेंगे तथा कुछ विशेष प्रकार की श्रेणियों के पदों का योग जैसे $\Sigma n, \Sigma n^2$ तथा Σn^3 इत्यादि को समझने के योग्य हो सकेंगे।

माड्यूल III

बीजगणित - I

8. सम्मिश्र संख्याएं
9. द्विघात समीकरण एवं रैखिक असमिकाएं
10. गणितीय आगमन का सिद्धान्त
11. क्रमचय तथा संचय
12. द्विपद प्रमेय

मॉडयूल-III: बीजगणित - I

कुछ समीकरणों को वास्तविक संख्या पद्धति में हल नहीं किया जा सकता है। इसलिए, वास्तविक संख्या पद्धति को इससे भी बड़ी पद्धति के रूप में विस्तार करने की आवश्यकता है जिससे कि उन सभी समीकरणों का हल प्रस्तुत किया जा सके जिनकों वास्तविक संख्या पद्धति में हल नहीं किया जा सकता। इस मॉडयूल में वास्तविक संख्या पद्धति को इससे बड़ी संख्या पद्धति सम्मिश्र संख्या पद्धति तक विस्तारित किया जाएगा ताकि द्विघात समीकरणों को हल किया जा सके। गणितीय आगमन का सिद्धांत विशेष से सामान्य तक जाने की प्रक्रिया है। गणितीय आगमन का सिद्धान्त कुछ अंतरिम निष्कर्षो तक पहुँचने में सहायता करता है। आपको दैनिक जीवन में वस्तुओं के चयन तथा प्रबंध के विभिन्न तरीकों से संबंधित समस्याओं को हल करना पड़ता है। इस मॉडयूल के अंतर्गत आप विभिन्न परिस्थितियों में वस्तुओं के चयन तथा प्रबंध के विभिन्न तरीकों की गणना करने हेतु कुछ आधारभूत तकनीकों को सीखेंगे। विभिन्न प्रबंध क्रमचय तथा विभिन्न चयन संचय की और अग्रसर होते है। द्विपद प्रमेय हमें किसी द्विपद व्यंजक को किसी भी घातांक तक विस्तार करने में सहायता करती है। कुछ साधारण अनुप्रयोगों के जरिए आप द्विपद प्रमेय तथा रैखिक असमिकाएं के उपयोग को जानेंगे। इस मॉडयूल में दी गई अवधारणाओं की समझ पुस्तक 2 में मॉडयूल-VI बीजगणित -II में दी गई अवधारणाओं को समझने में भी सहायता करेंगी।

माड्यूल IV

निर्देशांक ज्यामिति

मॉडयूल-IV: निर्देशांक ज्यामिति

निर्देशांक ज्यामिति गणित की वह शाखा है जो बीजगणित के द्वारा ज्यामिति के अध्ययन में सहायता करता है। आप जानेंगे कि किसी सरल रेखा या वक्र को किसी समतल में एक बीजगणितीय समीकरण के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है। निर्देशांक ज्यामिति में किसी तल में किसी बिंदु को वास्तविक संख्याओं के कार्तीय युग्मों के द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जिन्हें उस बिंदु के निर्देशांक कहते हैं तथा किसी सरल रेखा या वक्र को किसी समतल में वास्तविक गुणाकों द्वारा एक बीजगणितीय समीकरण के जरिए प्रदर्शित किया जा सकता है। आप सरल रेखा या ज्यामितीय वक्रों के अध्ययन में बीजगणित का उपयोग उनके गुणों एवं प्रकृति के जानने के लिए कर सकेंगे। किसी लम्बवृतीय शंकु के किसी समतल में परिच्छेद के द्वारा कुछ वक्रों की खोज की गई जिन्हें शंकु परिच्छेद कहा जाता है। इस प्रकार से प्राप्त वक्रों में तीन वक्र परवलय, दीर्घवृत तथा अतिपरवलय हैं। इस मॉडयूल में आप परवलय, दीर्घवृत, अतिपरवलय एवं वृत की मानक समीकरणों एवं उनके कुछ साधाारण अनुप्रयोंगों को जानेगें।

माड्यूल V

सांख्यिकी एवं प्रायिकता

मॉडयूल-V: सांख्यिकी एवं प्रायिकता

सांख्यिकी गणित के महत्वपूर्ण आधारभूत क्षेत्रों में से एक है जिसका प्रयोग हम अध्ययन के विभिन्न क्षेत्रों में करते हैं तथा यह बाजार, औद्योगिक उत्पादनों के विश्लेषण में अति उपयोगी है। सांख्यिकी का अध्ययन से सांख्यिकी बिंदु हमें सम्पूर्ण जनसंख्या के संबंध में सूचना एकत्र करके उनका विश्लेषण कर महत्वपूर्ण निष्कर्ष उपलब्ध कराते हैं। सांख्यिकी हमें किसी परिस्थिति का वास्तविक मूर्त आधार प्रदान करती है तथा उस परिस्थिति के संबंध में निर्णय लेने में सहायता करती है। मात्रात्मक आंकड़ों के लिए सबसे सामान्य परिक्षेपण के मापक विचरण, विचरण का वर्गमूल, मानक विचलन, सांख्यिकीय प्रसार, अन्तर चतुर्थक प्रसार तथा निरपेक्ष विचलन हैं। प्रायिकता का अध्ययन हमें अवसर के सिद्धान्त पर निर्णय लेने में सहायता करता है। औद्योगिक उत्पादनों में उच्च, औसत तथा निम्न गुणवत्ता निर्धारित करने में प्रायिकता का उपयोग किया जाता है। मुख्य रूप से सांख्यिकी एवं प्रायिकता आपको आपके दैनिक जीवन तथा उच्च अध्ययन में सहायता करती हैं।

APPENDIX-D

Complete and Post the feedback form today

First Fold

Feed back on Lesson No.

Lesson No.	Lesson Name	Was the Content				Was the language		Were the Illustrations		What you have learnt is		
		Easy	Difficult	Interesting	Confusing	Simple	Complex	Useful	Not Useful	Very helpful	Somewhat helpful	Not Helpful

Final Fold and seal

Fourth Fold

Third Fold

Dear learners,

You must have enjoyed going through yours course books. It was our endeavor to make the study material relevant, interactive and interesting. Production of course books is a two way process. Your feedback would help us improve the study material. Do take a few minutes of your time and fill-up the feedback form so that an interesting and useful study material can be made.

Thank you
Course Co-ordinator
Mathematics

Feed back on Questions

Lesson No.	Lesson Name	Intest Questions		Terminal Questions		
		Useful	Not useful	Easy	Diff.	V.diff.

Second Fold

Yours suggestion

____

____

____

____

Did you consult any other book to study Mathematics? Yes/No

If yes, give reason for consulting it.

____

____

Name: ________________________________ Subject: ___________________

Enrolment No: _________________________ Book No.: _________________

Address: ______________________________

____

Postage Stamp

Course Coordinator,
Mathematics
National Institute of Open Schooling
A-24-25, Institutional Area
Sector-62, NOIDA (U.P.), Pin-201309

No Enclosures allowed